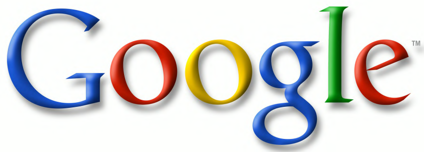
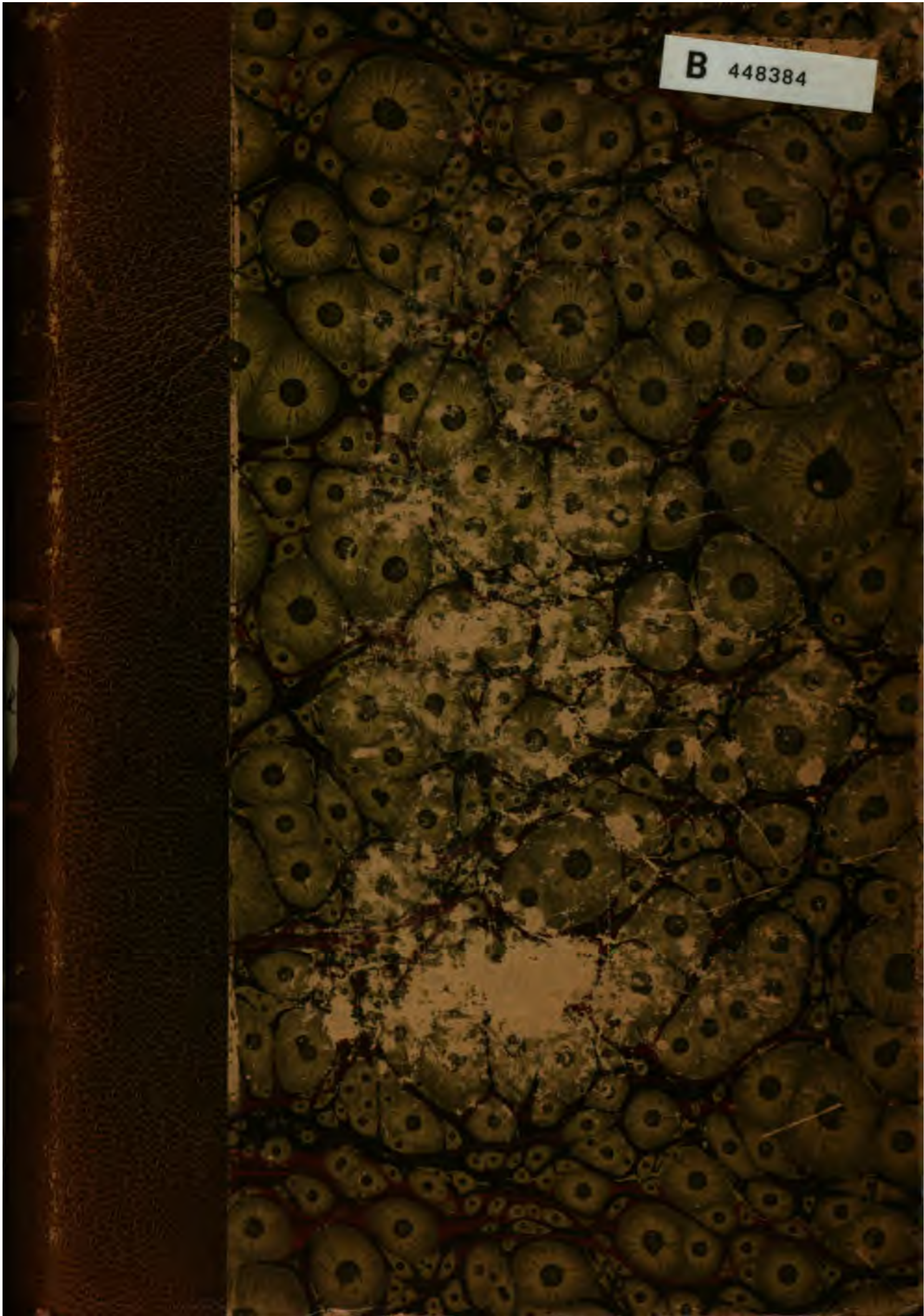
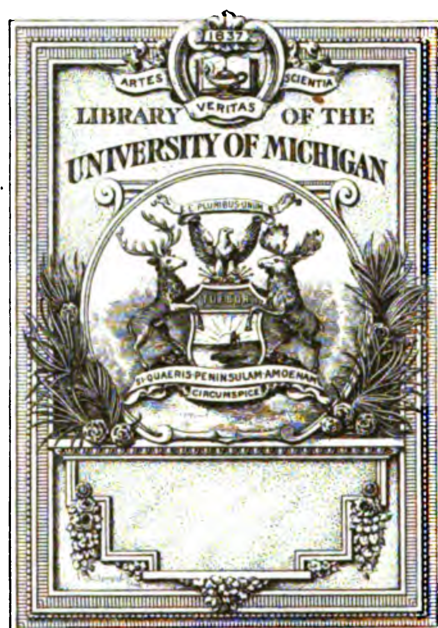





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Leçons

d'Algèbre élémentaire

Leçons

d'Algèbre élémentaire

IMPRIMERIE E. CAPIOMONT ET Cie



PARIS

6, RUE DES POITEVINS, 6

(Ancien Hôtel de Thou)

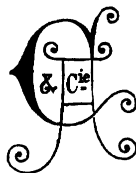
Cours complet de mathématiques élémentaires
Publié sous la direction de **M. DARBOUX,** doyen de la Faculté des Sciences de Paris.

Leçons d'Algèbre élémentaire

PAR

C. Bourlet

Docteur ès sciences mathématiques, Professeur au lycée Henri IV.



PARIS
Armand Colin & Cie, Éditeurs
5, rue de Mézières, 5

1896

AVERTISSEMENT

Je tiens, avant tout, à remercier M. Darboux d'avoir bien voulu me confier la rédaction de ces « Leçons d'Algèbre ».

Je veux aussi lui exprimer ici toute ma respectueuse reconnaissance pour les conseils qu'il m'a prodigués tant sur la forme que sur le fond de cet Ouvrage.

Ce Livre est destiné, plus spécialement, aux élèves de la classe de Mathématiques Élémentaires; mais, avec les trois Appendices, il contient l'exposition complète des connaissances exigées pour l'admission à l'École de Saint-Cyr, en Algèbre. Il a bien des analogies avec les traités semblables, parus jusqu'à ce jour, mais il en diffère sur certains points dont je dirai quelques mots.

J'ai commencé ce volume par l'exposé complet et détaillé de la théorie des nombres négatifs. J'ai suivi, en cela, le programme de la classe de Mathématiques Élémentaires au pied de la lettre et je m'empresse d'ajouter que je l'ai fait parce que cette façon de procéder est celle qui m'a paru la plus logique. On trouvera, peut-être, ce premier chapitre un peu long; mais je ne crois pas qu'il soit possible, en cette matière, d'être, à la fois, *court* et *complet*. Entre deux maux j'ai choisi le moindre et j'ai préféré les longueurs aux omissions. D'ailleurs, si on y

regarde de près, l'exposition systématique des propriétés commutatives, associatives et distributives des opérations sur les nombres n'est au fond que celle des « Opérations algébriques ». Les règles d'addition, de soustraction, de multiplication des polynômes entiers ne sont que des applications directes de propositions sur les transformations des sommes et produits de sommes algébriques. Ces règles apparaissent ainsi sous leur jour véritable : car elles se réduisent à énoncer comment on dispose, pratiquement, une opération pour que, les polynômes donnés étant réduits et ordonnés, le résultat soit lui-même réduit et ordonné.

Aussitôt après avoir défini une expression algébrique, j'ai donné quelques exemples de *fonctions* d'une variable; puis, dès les équations du premier degré, j'ai montré comment on représentait graphiquement la variation d'une fonction. Ceci m'a conduit à donner quelques notions très brèves de Géométrie analytique et à montrer, en particulier, que l'*équation* d'une droite est du premier degré. Ces notions si simples ne me paraissent pas du tout dépasser le niveau des Mathématiques dites élémentaires et, tout au contraire, elles me semblent très utiles pour faire comprendre toute la portée de la discussion des équations du premier degré à une et à deux inconnues.

Je n'ai rien de spécial à dire sur les équations du second degré. Je ferai cependant observer que je me suis absolument interdit de parler des nombres imaginaires dans le corps du volume. J'ai réservé l'Appendice I à cette généralisation de l'idée de nombre qui ne m'a pas paru nécessaire, ni même profitable, pour les élèves de Mathématiques Élémentaires, proprement dits.

D'après les conseils de M. Darboux, conseils qu'il m'a été bien agréable de suivre, j'ai résolument abandonné, pour l'étude de la variation des fonctions, la méthode dite élémentaire et j'ai adopté celle des *dérivées*. Au premier abord, ceci peut paraître une hardiesse; mais, si on se reporte aux difficultés que présente l'exposition *rigoureuse* et complète d'une quel-

conque des méthodes réputées élémentaires (1), on sera forcé de convenir que celle des dérivées, sans être plus difficile à concevoir, est d'une application beaucoup plus régulière et plus aisée (2). D'ailleurs, le domaine de la science mathématique allant en s'élargissant de jour en jour, il faut bien, pour permettre aux jeunes générations d'aller plus loin que nous dans l'étude de cette science, élaguer l'enseignement de tout ce qui fait double emploi. Il faut bien nous résoudre, quelque intérêt qu'ils puissent présenter en eux-mêmes, à reléguer au second plan les procédés particuliers non susceptibles de généralisation.

. C'est dans cet esprit que j'ai conçu tout cet Ouvrage et, chaque fois qu'il m'a fallu choisir entre deux méthodes, j'ai toujours donné la préférence à celle qui était susceptible d'une extension ultérieure. Ainsi, pour les logarithmes, j'ai écarté la définition par la correspondance entre les termes de deux progressions. Il est très facile de montrer, qu'étant donnés deux nombres positifs a et A, il existe toujours un nombre *rationnel* x (positif ou négatif) tel que a^x soit une valeur aussi approchée qu'on le voudra de A. Ceci suffit amplement, au point de vue pratique, le seul auquel on ait à se placer dans le cas présent.

Je dirai, en terminant, que, suivant l'exemple que m'a donné M. Tannery, dans ses excellentes « Leçons d'Arithmétique », auxquelles je renvoie souvent le lecteur, j'ai apporté le plus grand soin au choix des exercices. Chaque chapitre est suivi

(1) Par exemple, celle de M. Hermite, qui consiste à ramener l'étude de la fonction

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

à celle de la fonction :

$$x \pm \frac{a}{x}.$$

(2) L'expérience sur ce sujet est, d'ailleurs, faite. Il y a longtemps qu'on enseigne la méthode des dérivées dans les classes de l'enseignement moderne et on a pu constater qu'elle ne présentait aucune difficulté insurmontable pour des débutants.

d'une série d'exercices relatifs aux matières qui y sont traitées. Je les ai, en général, rangés par ordre de difficulté croissante, mais cette règle n'est pas sans exceptions : car il pouvait souvent y avoir intérêt à rapprocher des questions analogues ou connexes. Je ne conseille pas aux débutants de s'acharner aux questions difficiles, dans une première lecture. Il y a certains exercices que l'on traitera beaucoup plus aisément lorsqu'on aura lu le volume tout entier (1). Il est bon, d'ailleurs, de revenir, de temps à autre, sur ses pas.

C. BOURLET.

(1) Je citerai, par exemple, l'exercice 5, qui donne la manière de définir les nombres négatifs d'après M. Weierstrass, et le bel exercice 29, dû à Cauchy.

Parmi les 257 exercices proposés, un grand nombre ont été choisis dans les questions posées à divers examens. Quelques autres ont été extraits des travaux de mathématiciens célèbres comme Cauchy, Lagrange, Euler, etc... Enfin, nous avons emprunté un certain nombre d'exercices aux traités élémentaires suivants :

J. BERTRAND et H. GARCET, *Traité d'Algèbre* (1re Partie), Paris, Hachette.

BARBARIN, *Recueil de Calculs logarithmiques*, Paris, Nony.

BEZODIS, *Cours d'Algèbre*, Paris, Garnier frères.

CATALAN, *Mélanges mathématiques*, Bruxelles, Hayez.

SMITH, *a Treatise on Algebra*, Londres, Macmillan and Co.

TODHUNTER, *Algebra*, Londres, Macmillan and Co.

Les trois exercices signés *Niewenglowski*, *Desboves* et *Rouché* sont tirés du « Cours d'algèbre à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales » de M. *Niewenglowski* (Paris, Armand Colin et Cie). Ceux qui portent les mentions : *Cayley*, *H. Prior*, proviennent du journal anglais *The messenger of mathematics*.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE II

Équations du premier degré.

LIVRE III

Équations du second degré.

LIVRE IV

Dérivées, variation des fonctions.

LIVRE V

Progressions, Logarithmes, Intérêts.

APPENDICES

INTRODUCTION

1. La théorie des *segments* portés par un axe joue un rôle très important dans les applications de l'algèbre à la géométrie. La connaissance des éléments de cette théorie facilite, en outre considérablement, l'exposition des principes de la théorie des *nombres négatifs*. Pour ces deux raisons, nous commencerons par donner les rudiments de la théorie des segments portés par un axe.

Définitions. — On appelle *segment* une portion de droite sur laquelle un sens est défini. Pour déterminer le *sens* du segment, on distingue les deux points qui limitent le segment. L'un de ces points est appelé *origine* du segment et l'autre *extrémité*. On appelle alors *sens* du segment *le sens dans lequel se déplace un mobile qui parcourt le segment en allant de l'origine vers l'extrémité*.

On voit qu'un segment n'est autre chose qu'un chemin, décrit par un mobile, auquel on adjoint l'indication du sens dans lequel il a été parcouru. Dans tous les problèmes de mouvement, il est nécessaire de connaître, non seulement le chemin effectué par le mobile, mais encore le sens dans lequel ce chemin a été parcouru. Si on dit qu'un mobile, en partant d'un point A d'une droite, a parcouru un certain chemin sur cette droite, il y a ambiguïté pour le point d'arrivée; car on ne sait pas si le point d'arrivée est à droite ou à gauche du point de départ. Si, au contraire, on indique le *segment* décrit par le mobile, il n'y aura pas d'ambiguïté; car on connaîtra, non seulement la longueur du chemin, mais encore son sens de parcours.

On énonce un segment en énonçant d'abord l'origine (point de départ du mobile) et, ensuite, l'extrémité (point d'arrivée). Ainsi en énonçant *sg*AB on désigne le segment qui a pour origine A et pour extrémité B; tandis que *sg*BA désigne le segment qui a pour origine B et pour extrémité A.

On appelle *longueur* d'un segment la distance (géométrique) de

l'origine à l'extrémité. Un segment est dit *nul* lorsque sa longueur est nulle, c'est-à-dire lorsque l'origine coïncide avec l'extrémité.

Deux segments, portés par une même droite, sont dits *égaux* lorsqu'ils ont même longueur et même sens. Ainsi (*fig.* 1), on a

$$sg\mathrm{AB} = sg\mathrm{CD}$$

si les longueurs AB et CD sont égales et si, de plus, les segments sont de même sens.

On peut toujours faire coïncider deux segments égaux, portés par une même droite, en faisant glisser l'un, le long de la droite, jusqu'à ce que son origine coïncide avec l'origine de l'autre.

Deux segments, portés par une même droite, sont dits *égaux et de sens contraires* lorsqu'ils ont même longueur, mais des sens contraires. Ainsi (*fig.* 1), les segments sgAB et sgDC sont égaux et de sens



Fig. 1.

contraires. D'ailleurs, étant donnés deux points quelconques A et B sur une droite, ces deux points peuvent définir deux segments, à savoir les segments sgAB et sgBA qui sont égaux et de sens contraires. On ne peut pas faire coïncider deux segments de sens contraires, portés par une même droite, en les faisant glisser le long de cette droite de façon à faire coïncider les origines et les extrémités, mais si on amène l'origine de l'un à coïncider avec l'extrémité de l'autre, l'autre origine coïncidera avec l'autre extrémité.

2. Résultante de deux segments. — Lorsque deux segments, placés sur une même droite, sont tels que l'origine du second coïncide avec l'extrémité du premier, le segment ayant pour origine l'origine du premier et pour extrémité l'extrémité du second est appelé *la résultante* ou encore la *somme géométrique* des deux segments.

Ainsi (*fig.* 1), les deux segments sg AB et sg BC, qui sont tels que l'origine B du second coïncide avec l'extrémité du premier, ont pour résultante le segment sg AC dont l'origine est l'origine A du premier, et l'extrémité l'extrémité C du second. De même, les deux segments sg BC et sg CA ont pour résultante sg BA.

Lorsque deux segments, portés par la même droite, ne sont pas placés bout à bout, on forme leur résultante en faisant glisser le second, le long de la droite, jusqu'à ce que son origine coïncide avec l'extrémité du premier. La résultante de ces deux nouveaux seg-

ments, *ou tout autre segment qui lui est égal*, est ce qu'on appelle la résultante des deux segments donnés.

Théorème. — *La résultante de deux segments est indépendante de l'ordre dans lequel on place les deux segments bout à bout pour la former.*

Soient *sg*AB et *sg*BC deux segments placés bout à bout de façon que *sg*AB soit le premier. Leur résultante est, alors, *sg*AC. Soient d'autre part, deux segments :

$$sg\mathrm{EF} = sg\mathrm{AB}, \quad sg\mathrm{DE} = sg\mathrm{BC},$$

placés bout à bout de façon que *sg*DE soit le premier. La résultante *sg*DF de ces deux segments n'est autre chose que la résultante de *sg*BC et de *sg*AB formée en prenant *sg*BC le premier. Je dis que les deux résultantes *sg*DF et *sg*AC sont égales.

Il y a deux cas à distinguer :

1° Supposons, d'abord, les segments *sg*AB et *sg*BC de même sens (*fig.* 2). Les segments *sg*DE et *sg*EF seront aussi de même sens.

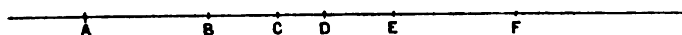


Fig. 2.

Si, par exemple, B est à droite de A, C sera à droite de B et, par suite, aussi à droite de A; B sera situé entre A et C et on aura, entre les longueurs des portions de droite, la relation

$$\mathrm{AC} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC}.$$

De même, E sera à droite de D, F à droite de E, et, par suite, F sera à droite de D et on aura

$$\mathrm{DF} = \mathrm{DE} + \mathrm{EF}.$$

Comme AB = EF et BC = DE, on en conclut que AC = DF; les deux segments *sg*AC et *sg*DF sont donc égaux puisqu'ils ont même longueur et même sens (car C est du même côté de A que F de D).

2° Supposons les segments *sg*AB et *sg*BC de sens contraires et supposons, par exemple, que le segment *sg*AB soit celui qui a la plus grande longueur (*fig.* 3).

Si, par exemple, B est à droite de A, C sera à gauche de B et, comme la longueur BC est plus courte que la longueur BA, le point C sera situé entre A et B, à *droite* de A. De même, le segment *sg*DE

étant du même sens que sgBC, E est à gauche de D, et sgEF étant de même sens que sgAB, F est à droite de E. Comme la longueur

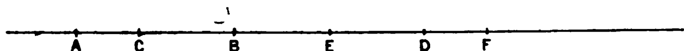


Fig. 3.

EF est plus grande que la longueur ED, F est aussi à *droite* de D. C étant entre A et B, et D entre E et F, on a :

$$AC = AB - BC,$$
$$DF = EF - ED.$$

D'où
$$AC = DF.$$

Les deux segments sgAC et sgDF sont donc égaux, puisqu'ils ont même longueur et même sens ; car C est à droite de A et F à droite de D.

Remarque I. — *La résultante de deux segments égaux et de sens contraires est un segment nul.* Car (*fig.* 3), si on avait AB = BC, le point C coïnciderait avec le point A et le segment sgAC serait nul puisque son origine et son extrémité coïncideraient.

Remarque II. — Il résulte du théorème précédent que, pour définir la résultante de deux segments, il est inutile de dire dans quel ordre on prend ces segments, puisque le résultat ne dépend pas de l'ordre qu'on a suivi pour former la résultante.

Remarque III. — Lorsqu'un mobile part d'un point A d'une droite pour aller au point B, puis repart du point B pour aller au point C, il a parcouru, successivement, les deux segments sgAB et sgBC. On voit, alors, que la résultante de ces deux segments n'est autre chose que le segment qu'aurait parcouru le mobile s'il était allé directement du point de départ A au point d'arrivée final C.

Le théorème qui précède nous montre que, le point A de départ étant le même, le point d'arrivée final C est indépendant de l'ordre dans lequel le mobile a parcouru les deux segments. Ainsi, si le mobile, en partant du point A, parcourt d'abord 100 mètres de gauche à droite, puis 50 mètres de droite à gauche, le point d'arrivée C sera le même que s'il avait d'abord parcouru 50 mètres de droite à gauche, puis, ensuite, 100 mètres de gauche à droite. Dans les deux cas, le point d'arrivée C est le même que si le mobile avait parcouru, directement, 50 mètres de gauche à droite.

3. Résultante de plusieurs segments. — Étant donnés plusieurs segments S, S′, S″, S‴, portés par une même droite, on

appelle *résultante* ou *somme géométrique* de ces segments le segment obtenu de la façon suivante : on forme la résultante R′ des deux premiers segments S et S′, puis la résultante R″ de R′ et du segment suivant S″; enfin, la résultante de R″ et du dernier segment S‴ est la *résultante* R des quatre segments donnés, *pris dans l'ordre énoncé*. Lorsque les segments donnés sont placés bout à bout de façon que l'extrémité de l'un coïncide avec l'origine du suivant, la résultante est le segment qui a pour origine l'origine du premier et pour extrémité l'extrémité du dernier. Ainsi, considérons (*fig.* 4) les

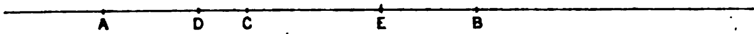


Fig. 4.

segments placés bout à bout *sg*AB, *sg*BC, *sg*CD, *sg*DE. La résultante de *sg*AB et *sg*BC est *sg*AC; la résultante de *sg*AC et *sg*CD est *sg*AD; enfin, la résultante de *sg*AD et de *sg*DE est *sg*AE. Donc, la résultante des quatre segments est *sg*AE dont l'origine est l'origine du premier et l'extrémité l'extrémité du dernier.

Théorème I. — *La résultante de plusieurs segments, portés par une même droite, ne change pas si on remplace deux ou plusieurs segments consécutifs par leur résultante ou, réciproquement, si on remplace un segment par deux ou plusieurs segments dont il est la résultante.*

Soient, en effet, *sg*AB, *sg*BC, *sg*CD, *sg*DE, *sg*EF cinq segments dont la résultante est *sg*AF (*fig.* 5). Supprimons dans la figure

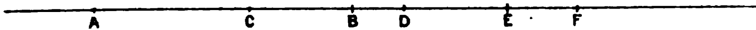


Fig. 5.

le point intermédiaire C; cette suppression ne changeant pas les deux points extrêmes A et F, il nous reste quatre segments *sg*AB, *sg*BD, *sg*DE, *sg*EF dont la résultante est encore *sg*AF. On peut donc, sans changer la résultante, remplacer deux segments *consécutifs* par leur résultante. D'une manière plus générale, on peut remplacer plusieurs segments *consécutifs* par leur résultante; car cela revient tout simplement, dans la figure formée par les segments, à supprimer un ou plusieurs points intermédiaires.

Réciproquement, considérons les quatre segments *sg*AB, *sg*BD, *sg*DE, *sg*EF dont la résultante est *sg*AF; marquons, sur la droite qui porte les segments, un point C. Ce point C forme avec les deux points B et D deux segments consécutifs *sg*BC et *sg*CD dont *sg*BD est la

résultante. Cette opération n'ayant pas modifié les deux points extrêmes, la résultante des cinq segments ainsi obtenus est encore *sg*AF. Plus généralement, on peut remplacer un segment par plusieurs autres segments consécutifs dont il est la résultante ; car cela revient à introduire un ou plusieurs points intermédiaires dans la figure formée par les segments.

Théorème II. — *Étant donnés plusieurs segments, sur une même droite, la résultante de tous ces segments est indépendante de l'ordre dans lequel on prend ces segments pour la former.*

En d'autres termes, il faut montrer que la résultante de plusieurs segments, portés par une même droite, ne change pas quand on change l'ordre de ces segments. Nous distinguerons, à cet effet, deux cas :

1° La résultante ne change pas quand on permute deux segments *consécutifs*. En effet, d'après le théorème précédent, on peut remplacer ces deux segments par leur résultante ; mais, ensuite, d'après la réciproque, on peut remplacer cette résultante par deux segments consécutifs dont elle soit la résultante, en particulier, par les deux segments précédents pris dans l'ordre inverse. Finalement, le résultat de ces deux opérations successives est d'avoir permuté les deux segments proposés sans avoir modifié la résultante générale.

2° On peut permuter les segments d'une façon *quelconque*. Puisque, d'après ce qui précède, on peut permuter deux segments consécutifs, on pourra, en faisant un nombre suffisant de permutations de deux segments consécutifs, placer les segments dans tel ordre que l'on voudra et, comme chaque permutation de deux segments ne modifie pas la résultante, le théorème est démontré. Ainsi, par exemple, considérons les cinq segments suivants dans l'ordre :

$$S,\ S',\ S'',\ S''',\ S^{\prime v}.$$

On peut les amener à l'ordre

$$S',\ S,\ S^{\prime v},\ S''',\ S''$$

par les permutations successives de deux segments consécutifs suivantes :

$$\underline{S',\ S},\ S'',\ S''',\ S^{\prime v};$$
$$S',\ S,\ S'',\ \underline{S^{\prime v},\ S'''};$$
$$S',\ S,\ \underline{S^{\prime v},\ S''},\ S''';$$
$$S',\ S,\ S^{\prime v},\ \underline{S''',\ S''}.$$

(nous avons souligné, à chaque opération, les deux segments qui ont été permutés).

Remarque. — Il résulte de ce théorème important que, pour définir la résultante de plusieurs segments, il est inutile de dire dans quel ordre on prend ces segments pour la former.

Les *sommes géométriques de segments* jouissent donc de la propriété fondamentale des *sommes arithmétiques de nombres*, à savoir que la somme ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des parties.

Théorème III. — *Étant donnés plusieurs segments portés par une même droite, on peut, sans modifier leur résultante, remplacer deux ou plusieurs segments par leur résultante.*

Nous avons déjà démontré ce théorème lorsque les segments sont *consécutifs*. Si les segments ne sont pas consécutifs on peut, d'abord, sans modifier la résultante, changer l'ordre des segments de façon que les segments considérés deviennent consécutifs; et, alors, on peut les remplacer par leur résultante.

D'ailleurs, *réciproquement*, on peut, sans modifier la résultante, remplacer un segment par plusieurs segments dont il soit la résultante, puis, distribuer d'une façon quelconque ces nouveaux segments parmi les précédents.

Remarque. — Ce théorème complète l'analogie entre les sommes géométriques de segments et les sommes arithmétiques de nombres; car il correspond à la proposition d'arithmétique d'après laquelle, dans une somme, on peut remplacer plusieurs parties par leur somme effectuée, et réciproquement.

LIVRE I

CALCUL ALGÉBRIQUE

CHAPITRE PREMIER

NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS

4. La théorie des segments portés par une droite nous a fourni un exemple de grandeurs susceptibles d'avoir *deux sens différents*.

Des exemples de grandeurs de cette nature sont fréquents. Ainsi, lorsqu'on compte le temps à partir d'un instant initial, pris comme *origine* du temps, ou plutôt lorsqu'on *repère* les divers instants en indiquant les intervalles de temps qui les séparent de l'origine du temps, il faut distinguer entre le cas où l'instant *précède* ou *suit* l'instant initial. Le temps peut être ainsi compté dans deux sens différents suivant qu'il s'est *écoulé après* l'instant initial ou qu'il *précède* cet instant.

Les *degrés de température* indiqués par un thermomètre sont aussi comptés dans deux sens différents, suivant qu'ils indiquent une température *au-dessus* ou *au-dessous* du zéro. En partant du zéro, la colonne mercurielle *monte* ou *descend* dans le thermomètre, suivant que la température finale qu'elle doit marquer est plus élevée ou plus basse que le zéro.

Dès le début de l'algèbre, on sent la nécessité de donner une mesure d'une telle grandeur qui indique, non seulement la mesure arithmétique de cette grandeur, mais encore son *sens*. On est ainsi conduit à créer deux nouvelles classes de nombres correspondant aux deux sens, dans lesquels on peut compter les grandeurs linéaires. Il faut, ensuite, donner des règles de calcul de ces nombres entre eux.

Le choix de ces règles de calcul n'a pas été fait d'une manière *arbitraire*, mais de telle sorte que presque toutes les opérations jouissent des mêmes propriétés que les opérations arithmétiques. Il est inutile d'insister ici sur les raisons logiques pour lesquelles on a fait ce choix; il suffira de constater que les *définitions* nouvelles conduisent à des conclusions non contradictoires, utiles, et qui donnent au calcul une généralité qui est la base même du calcul algébrique.

Pour montrer l'insuffisance de l'arithmétique dans de pareils cas, nous prendrons l'exemple suivant : Soient *sg* AB et *sg* BC deux segments, cherchons à calculer la longueur de leur résultante *sg* AC et à connaître son sens. Il y a trois cas à distinguer.

1° Si les deux segments sont *de même sens*, on a

$$AC = AB + BC$$

et la résultante est de même sens que les deux segments.

2° Si les deux segments sont de *sens contraires* et si

$$AB > BC,$$

on a :

$$AC = AB - BC$$

et le sens de la résultante est celui de *sg* AB.

3° Si les deux segments sont de *sens contraires* et si

$$AB < BC,$$

on a :

$$AC = BC - AB$$

et le sens de la résultante est celui de *sg* BC.

On voit donc que, suivant les cas, il faut *trois* formules *différentes* pour donner la longueur de la résultante et que chaque fois il faut adjoindre à la formule une indication pour donner le sens de la résultante.

Comme nous le verrons plus loin, l'introduction des deux classes de nombres nous permettra de substituer à ces trois formules une formule *unique* qui donnera, *à la fois*, *la longueur et le sens* de la résultante.

Pour donner la mesure d'une grandeur ayant un sens, il suffira de prendre le nombre arithmétique qui mesure cette grandeur et de lui adjoindre un signe distinctif pour indiquer le *sens* de la grandeur. Au premier abord, il semble qu'on pourra prendre ce signe distinctif arbitrairement. Par exemple, pour indiquer des degrés de température, on pourrait affecter tous les degrés au-dessus de zéro de l'indice a et tous ceux au-dessous de zéro de l'indice b; ainsi, 5_a indiquerait 5 degrés au-dessus de zéro et 4_b indiquerait 4 degrés au-dessous de zéro. On pourrait, au lieu d'indices, employer des accents ou tout autre mode de distinction. Mais une discussion approfondie de la question vous conduit rapidement à la conclusion que, parmi tous les signes distinctifs que l'on pourrait employer, ceux qu'il est le plus

commode et même qu'il est presque *nécessaire* d'adopter sont les signes + et — qui servent en arithmétique à indiquer l'addition et la soustraction (1). Ainsi, pour distinguer les degrés de température au-dessus de zéro des degrés au-dessous de zéro, on fait précéder les premiers du signe (+) et les seconds du signe (—). On a ainsi deux classes de nombres, ceux qui sont précédés du signe (+) qui mesurent les températures au-dessus de zéro, ceux qui sont précédés du signe (—) qui mesurent les températures au-dessous de zéro et, à ces deux classes, il faut ajouter le nombre *zéro* qui n'appartient à aucune des deux et qui est la température qui sert de trait d'union entre les deux classes. Ainsi, au lieu d'indiquer 5 degrés au-dessus de zéro par 5_a on l'indiquera par $+5$ et, pour 4 degrés au-dessous de zéro, on prendra -4 au lieu de 4_b.

5. Définitions. — *On appelle nombre positif tout nombre (arithmétique), autre que zéro, précédé du signe +. On appelle nombre négatif tout nombre (arithmétique), autre que zéro, précédé du signe —.*

L'ensemble des nombres positifs et négatifs auquel on adjoint le nombre *zéro*, qui n'a aucun signe, forme ce qu'on appelle *les nombres algébriques.*

On appelle *valeur absolue* ou *module* d'un nombre algébrique le nombre arithmétique que l'on obtient en supprimant son signe. Ainsi, la valeur absolue de $+3$ est 3. Pour indiquer la valeur absolue d'un nombre, on le place entre deux barres verticales. $|a|$ désigne la valeur absolue du nombre algébrique a.

$$|+4| = 4,$$
$$|-2| = 2,$$
$$|0| = 0.$$

Dans la suite de ce chapitre, pour éviter toute confusion, nous désignerons toujours un nombre algébrique par une *petite* lettre, et un nombre arithmétique par une *grande* lettre.

Deux nombres algébriques sont dits *égaux* lorsqu'ils ont *même valeur absolue et même signe.* Dans le cas contraire, ils sont dits *inégaux.* Pour désigner l'égalité ou l'inégalité de deux nombres algébriques, nous emploierons les signes habituels $=$ (égal) et $\neq$ (inégal).

(1) Voir à ce sujet : Méray, *Les fractions et les quantités négatives* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. VIII et IX).
H. Padé, *Premières leçons d'Algèbre élémentaire* (Gauthier-Villars et fils, 1892).

Deux nombres algébriques sont dits *égaux et de signes contraires* lorsqu'ils ont *même valeur absolue* et *des signes contraires*. Ainsi, $+3$ et -3, $+\frac{2}{5}$ et $-\frac{2}{5}$ sont égaux et de signes contraires [1].

Remarque. — Il faut bien remarquer que les signes $+$ et $-$ qui servent à distinguer les deux classes de nombres n'ont, malgré leur analogie avec les signes d'addition et de soustraction, aucune signification *opérative*, jusqu'à nouvel ordre du moins.

6. Addition. — Étant donnés deux nombres algébriques, on appelle *somme* de ces deux nombres, le nombre obtenu de la façon suivante :

1° *Si les deux nombres sont de même signe, on fait la somme (arithmétique) des valeurs absolues, et on lui donne le signe commun des deux nombres.*

2° *Si les deux nombres sont de signes contraires, on fait la différence (arithmétique) des valeurs absolues, et on lui donne le signe de celui des deux nombres qui a la plus grande valeur absolue. Dans le cas particulier où les deux nombres ont même valeur absolue, c'est-à-dire sont égaux et de signes contraires, leur somme est* 0.

3° *Si l'un des deux nombres est* 0, *la somme est égale à l'autre.*

Nous emploierons, pour désigner la somme, le signe $+$, comme en arithmétique; et, pour ne pas confondre le signe $+$ de l'opération avec les signes distinctifs des nombres positifs et négatifs, nous placerons les nombres et leurs signes dans des parenthèses, pour bien indiquer que le signe fait corps avec le nombre.

EXEMPLES :

$$(+4) + (+5) = (+9),$$
$$(+4) + (-5) = (-1),$$
$$(-4) + (+5) = (+1),$$
$$(-4) + (-5) = (-9),$$
$$(+4) + 0 = (+4),$$
$$(-4) + 0 = (-4).$$

Remarque. — Il résulte, immédiatement, de la définition de la somme de deux nombres, que

$$a + b = b + a;$$

car rien dans la définition n'indique quel est celui des deux nombres

(1) L'expression *égaux et de signes contraires* est évidemment défectueuse ; car deux nombres *égaux* ne peuvent avoir des signes contraires. M. Padé propose de substituer à cette expression celle de *symétriques* qui est certainement très bien choisie, mais, la première expression étant complètement entrée dans les usages du langage mathématique, nous avons cru devoir la conserver, quoique vicieuse.

qu'on écrit le premier et une somme arithmétique de deux nombres arithmétiques ne dépend pas de l'ordre de ces nombres.

Ainsi, *ajouter* a à b revient au même qu'*ajouter* b à a, car dans les deux cas, c'est faire la *somme* de a et b.

Définition. — *Étant donnés plusieurs nombres algébriques*, a, b, c, d, *faire la somme* a + b + c + d, *c'est faire la somme de* a *et de* b, *au résultat ajouter* c *et au nouveau résultat ajouter* d. Nous désignerons par $(a+b)$ la somme $a+b$ *effectuée* [1]; on a, alors, d'après notre définition,

$$a+b+c=(a+b)+c.$$

De même, $(a+b+c)$ désignant la somme effectuée, on a :

$$a+b+c+d=(a+b+c)+d.$$

Exemple :

$$(+4)+(-3)=(+1),$$

donc :

$$(+4)+(-3)+(-2)=(+1)+(-2)=(-1);$$

et, par suite :

$$(+4)+(-3)+(-2)+(+5)=(-1)+(+5)=(+4).$$

Lorsque les nombres ne sont pas donnés par des lettres, pour indiquer leur somme, on se contente de les écrire à la suite les uns des autres en supprimant les signes +. Cela simplifie l'écriture sans donner lieu à des ambiguïtés. Ainsi, au lieu de

$$(+4)+(+5)+(-2)+(-3)$$

on écrit, plus simplement,

$$+4+5-2-3;$$

et au lieu de : $(-3)+\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)+(+2)$

on écrit : $-3+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}+2.$

7. Nous appellerons *axe* une droite sur laquelle un sens de parcours a été choisi. Ce sens sera ce que nous appellerons le *sens*

(1) D'une manière générale, lorsqu'on veut indiquer qu'une opération quelconque est *effectuée*, on place le symbole, qui indique l'opération à effectuer, entre parenthèses.

positif ou *sens direct*. Le sens opposé au sens positif est le *sens négatif* ou *sens contraire*.

Étant donné un *axe* (c'est-à-dire une droite sur laquelle on a choisi un sens positif) et un *segment porté par cet axe*, on appelle *mesure algébrique* du segment le nombre algébrique *qui a pour valeur absolue la longueur du segment, et pour signe le signe* (+) *ou* (—) *suivant que le sens du segment est le sens positif ou le sens négatif de l'axe*.

On voit que l'introduction des nombres algébriques nous permet bien de donner une mesure du segment qui fait connaître à la fois *la longueur* et *le sens* du segment. Pour désigner la mesure algébrique d'un segment, nous tracerons au-dessus des deux lettres qui désignent le segment un trait horizontal. Ainsi $\overline{AB}$ désigne la mesure algébrique de *sg* AB.

Remarque. — Il résulte, immédiatement, de la définition que les mesures algébriques de deux segments égaux et de sens contraires sont des nombres égaux et de signes contraires; ainsi $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ sont deux nombres égaux et de signes contraires. Par suite, on a toujours :

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

Théorème. — *La mesure algébrique de la résultante de plusieurs segments est égale à la somme des mesures algébriques de ces segments.*

Pour démontrer la proposition, nous pouvons toujours supposer les segments placés bout à bout puisque, pour former la résultante, on les place toujours ainsi.

1° Prenons le cas de deux segments *sg* AB et *sg* BC dont la résultante est *sg* AC.

Si les deux segments sont de même sens, leurs mesures algébriques $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ sont de même signe. La valeur absolue de la somme $\overline{AB} + \overline{BC}$ est donc égale à la somme AB + BC des valeurs absolues des mesures algébriques des segments; et le signe de cette somme est le signe commun des deux nombres. D'autre part, le point B étant entre A et C, on a :

$$AC = AB + BC.$$

La valeur absolue de la mesure algébrique de la résultante est donc aussi AB + BC; et, comme cette résultante est de même sens que les deux segments, elle a même signe que leurs mesures algébriques. On a donc bien :

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC},$$

puisque les deux membres ont même valeur absolue et même signe.

Si les deux segments sont de sens contraires, puisque la résultante ne change pas quand on change l'ordre des deux segments et que la somme de *deux* nombres algébriques est indépendante de l'ordre de ces deux nombres, nous pouvons toujours supposer que *sg* AB est celui des deux segments qui a la plus grande longueur. Les mesures algébriques des deux segments $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ étant de signes contraires et, puisque AB > BC, la valeur absolue de la somme $\overline{AB} + \overline{BC}$ est AB — BC et son signe celui de $\overline{AB}$. D'autre part, le point C tombe entre A et B et, par suite, on a :

$$AC = AB - BC,$$

la valeur absolue de la mesure algébrique de la résultante est donc aussi AB — BC. D'ailleurs, la résultante étant de même sens que *sg* AB, $\overline{AC}$ est aussi de même signe que $\overline{AB}$. On a donc, encore,

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Dans le cas particulier où les deux segments sont égaux et de sens contraires leur résultante est nulle, mais, alors, leurs mesures algébriques sont égales et de signes contraires et ont aussi une somme nulle.

2° Le théorème étant vrai pour le cas de deux segments, s'étend facilement au cas de plusieurs segments. Soient S_1, S_2, S_3, S_4 quatre segments et s_1, s_2, s_3, s_4 leurs mesures algébriques. Soit R_1 la résultante de S_1 et S_2 et r_1 sa mesure algébrique ; R_2 la résultante de R_1 et de S_3 et r_2 sa mesure algébrique ; R la résultante de R_2 et S_4 et r sa mesure algébrique. R est la résultante des quatre segments. Or, d'après la première partie de la démonstration, on a les égalités

$$r_1 = s_1 + s_2,$$
$$r_2 = r_1 + s_3$$
et
$$r = r_2 + s_4 ;$$

r est donc le nombre obtenu en faisant la somme de s_1 et s_2, en ajoutant s_3 au résultat r_1, et en ajoutant s_4 au nouveau résultat r_2. Donc, *par définition*, on a :

$$r = s_1 + s_2 + s_3 + s_4,$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque. — Ce théorème très important nous montre, comme nous l'avions annoncé plus haut (n° 4), qu'*une seule* et même formule

donne dans tous les cas la longueur et le sens de la résultante de deux ou plusieurs segments.

→ **8. Théorème I.** — *Dans une somme de nombres algébriques on peut intervertir l'ordre des parties sans modifier la valeur de la somme.*

Ce théorème, comme nous l'avons remarqué, découle de la définition même de la somme pour le cas de deux nombres ; il suffit donc de l'établir pour le cas de plus de deux nombres. Soient, par exemple, quatre nombres algébriques a, b, c, d ; je dis que

$$a + b + c + d = c + d + b + a.$$

A cet effet, prenons un *axe*, sur lequel un sens positif est déterminé, et construisons sur cet axe quatre segments, *sg*A, *sg*B, *sg*C et *sg*D ayant, respectivement, pour mesures algébriques, a, b, c et d. Soit *sg*R la résultante de ces quatre segments et r sa mesure algébrique. Prenons d'abord les segments dans l'ordre *sg*A, *sg*B, *sg*C, *sg*D pour former leur résultante *sg*R. On aura, d'après le théorème précédent (nº 7) :

$$(1) \qquad r = a + b + c + d.$$

Changeons l'ordre des segments et prenons-les dans l'ordre *sg*C, *sg*D, *sg*B, *sg*A, leur résultante ne changera pas, comme nous le savons (nº 3), et sera encore *sg*R. En prenant les mesures algébriques, on aura, alors

$$(2) \qquad r = c + d + b + a.$$

Et, par suite, en rapprochant les égalités (1) et (2),

$$a + b + c + d = c + d + b + a.$$

Théorème II. — *Dans une somme de plusieurs nombres algébriques, on peut remplacer plusieurs nombres par leur somme effectuée et, réciproquement, on peut remplacer un nombre par plusieurs nombres dont il est la somme.*

Considérons, en effet, la somme $a + b + c + d + e$ et soit s la somme des trois nombres b, c et d ; je dis que l'on a

$$(1) \qquad a + b + c + d + e = a + s + e.$$

Prenons un *axe* et construisons sur cet axe cinq segments *sg*A, *sg*B, *sg*C, *sg*D et *sg*E ayant, respectivement, pour mesures algébriques, a, b, c, d et e ; soit *sg*R la résultante de ces cinq segments et r sa mesure algébrique, et enfin, soit *sg*S la résultante des trois segments *sg*B, *sg*C, *sg*D. D'après le théorème du nº 7, s sera la

mesure algébrique de *sg*S. Mais, d'après un théorème connu (n° 3), *sg*R sera aussi la résultante des trois segments *sg*A, *sg*S et *sg*E. On aura donc les deux égalités

$$r = a + b + c + d + e,$$
$$r = a + s + e,$$

en appliquant le théorème du n° 7 au *sg*R, considéré comme la résultante soit des cinq premiers segments, soit des trois derniers. De ces deux égalités on conclut l'égalité (1).

Réciproquement, soit $a + s + e$ une somme, et soient b, c, d trois nombres tels que

$$b + c + d = s,$$

je dis que

$$a + s + e = a + b + c + d + e.$$

En effet, considérons de nouveau les segments qui ont pour mesures algébriques a, b, c, d, e et s : *sg*A, *sg*B, *sg*C, *sg*D, *sg*E et *sg*S, soit *sg*R la résultante des trois segments *sg*A, *sg*S, *sg*E et r sa mesure algébrique, on a (n° 7) :

$$r = a + s + e.$$

D'après un théorème précédent (n° 3), on sait qu'on peut remplacer le *sg*S par les trois segments *sg*B, *sg*C, *sg*D dont il est la résultante. Donc, *sg*R, étant la résultante des cinq segments *sg*A, *sg*B, *sg*C, *sg*D et *sg*E, on a aussi

$$r = a + b + c + d + e;$$

d'où

$$a + s + e = a + b + c + d + e.$$

Remarque I. — Il n'est pas nécessaire que les nombres, que l'on remplace par leur somme effectuée, soient *consécutifs;* ils peuvent être distribués d'une façon quelconque, car, avant de les remplacer par leur somme effectuée, on peut toujours supposer qu'on les a amenés, au préalable, à être consécutifs en changeant l'ordre des nombres dans la somme.

Remarque II. — On voit que les sommes de nombres algébriques jouissent des deux propriétés principales des sommes arithmétiques, à savoir qu'on peut intervertir l'ordre des parties et remplacer plusieurs nombres par leur somme effectuée.

Corollaire. — *Pour ajouter une somme, il suffit d'ajouter successivement chacune des parties.*

Ceci résulte immédiatement du théorème précédent, car, si on désigne par $(c + d + e)$ la somme effectuée, on a

$$a + b + (c + d + e) = a + b + c + d + e,$$

et le premier membre exprime qu'on ajoute à $a + b$ la somme *effectuée* $(c + d + e)$, et le second qu'on ajoute successivement chacune des parties.

Application. — Il résulte des deux théorèmes précédents que, pour faire une somme de nombres algébriques, on peut prendre les nombres dans tel ordre que l'on voudra, par exemple, on peut d'abord placer tous les nombres positifs, puis tous les nombres négatifs, faire la somme des nombres positifs et la somme des nombres négatifs, et on est alors ramené à faire la somme d'un nombre positif et d'un nombre négatif. Ainsi, par exemple,

$$(+4) + (-5) + 0 + \left(-\frac{1}{3}\right) + (+2) = (+4) + (+2) + 0$$
$$+ (-5) + \left(-\frac{1}{3}\right) = (+6) + \left(-\frac{16}{3}\right) = \left(+\frac{2}{3}\right).$$

On peut énoncer ceci sous forme de règle :

Règle. — *Pour faire la somme de plusieurs nombres algébriques, on fait, séparément, la somme des nombres positifs et la somme des nombres négatifs, et on ajoute le nombre positif et le nombre négatif ainsi obtenus.*

Exemples :

$$+3 - 5 - 21 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = +3 + \frac{2}{3} - 5 - 21 - \frac{1}{2} = +\frac{11}{3} - \frac{53}{2} = -\frac{137}{6};$$

$$-6 + 4 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + 2 = +4 + \frac{1}{7} + 2 - 6 - \frac{1}{5} = +\frac{43}{7} - \frac{31}{5} = -\frac{2}{35}.$$

Pratiquement, on se dispense d'intervertir l'ordre des termes et on fait, d'une part, la somme des nombres positifs et, d'autre part, la somme des nombres négatifs, opérations qui se font par de simples additions arithmétiques. Ainsi :

$$+3 + 0 - 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{5}{2} = +4 - 4 = 0;$$

$$+2 - 1 + 6 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = +8 - \frac{19}{12} = +\frac{77}{12}.$$

9. Soustraction.

Théorème. — *Étant donnés deux nombres algébriques, il existe toujours un troisième nombre algébrique qui, ajouté à l'un d'eux, reproduit l'autre, et il n'y en a qu'un.*

Soient, en effet, a et b deux nombres algébriques. Il faut démontrer qu'il existe un nombre algébrique x, et un seul, tel que l'on ait

$$x + b = a.$$

Soit b' le nombre égal et de signe contraire à b. Ajoutons b' aux deux membres de l'égalité précédente, il viendra

$$x + b + b' = a + b',$$

ou, en appliquant les théorèmes du n° 8 et remarquant que $b + b' = 0$,

$$x = a + b'.$$

Le nombre cherché ne peut donc être que $a + b'$. Il est aisé de vérifier d'ailleurs qu'il résout la question proposée ; car on a

$$(a + b') + b = a + b' + b = a.$$

La proposition est donc démontrée.

Corollaire. — *Il n'y a qu'un nombre qui ajouté à un autre le reproduise, c'est zéro.*

Car $a + 0 = a$ et d'après le théorème précédent il n'y a *qu'un* nombre satisfaisant à cette condition.

Définition. — *On appelle différence entre* a *et* b *le nombre qu'il faut ajouter à* b *pour reproduire* a. D'après le théorème précédent, nous savons que ce nombre existe et qu'il est unique. L'opération qui consiste à former la différence entre deux nombres est la *soustraction* (*algébrique*). Former la différence entre a et b c'est *soustraire* b de a ou encore *retrancher* b de a. On représente cette différence par le symbole $a - b$.

D'après le théorème précédent, on peut énoncer la règle suivante pour former la différence.

Règle. — *Pour faire la différence* (a — b) *on ajoute à* a *le nombre égal et de signe contraire à* b.

EXEMPLES :

$$(+4) - (+3) = (+4) + (-3) = (+1);$$
$$(-4) - (-3) = (-4) + (+3) = (-1);$$
$$(-2) - 0 = (-2) + 0 = (-2);$$
$$\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(+\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{5}{6}\right).$$

Remarque. — Les nombres $(a - b)$ et $(b - a)$ sont deux nombres égaux et de signes contraires, car

$$a - b = a + b',$$
$$b - a = b + a',$$

en indiquant par un accent le nombre égal et de signe contraire à un nombre donné. Or, a étant égal et de signe contraire à a' et b' à b, $a + b'$ (c'est-à-dire $a - b$) est égal et de signe contraire à $a' + b$ (c'est-à-dire à $b - a$).

10. Somme algébrique. — On appelle *somme algébrique* une suite d'additions ou de soustractions effectuées avec des nombres algébriques. Ainsi, l'expression

$$(+ 4) - (+ 2) + (- 1) - (- 12) - (+ 5),$$

qui indique que de $(+ 4)$ on retranche $(+ 2)$, qu'on ajoute $(- 1)$ au résultat, que du nouveau résultat on retranche $(- 12)$ et enfin que de ce dernier résultat on retranche $(+ 5)$, est une *somme algébrique*.

Toute somme algébrique est identique à une somme, proprement dite, de nombres algébriques. En effet, d'après la définition même de la soustraction, retrancher un nombre c'est ajouter le nombre égal et de signe contraire, on a donc :

$$a - b + c - d - e = a + b' + c + d' + e'$$

en désignant par b', d', e' les nombres respectivement égaux et de signes contraires aux nombres b, d, e.

Ainsi,

$$(+ 4) - (+ 2) + (- 1) - (- 12) - (+ 5)$$
$$= + 4 - 2 - 1 + 12 - 5,$$

c'est donc la *somme* des nombres $+ 4$, $- 2$, $- 1$, $+ 12$, $- 5$.

Chaque fois que, dans la somme algébrique, un nombre est précédé du signe $(+)$, dans la somme, proprement dite, on ajoute ce nombre; chaque fois qu'un nombre est précédé du signe $(-)$, dans la somme, proprement dite, on ajoute le nombre égal et de signe contraire. Ainsi, dans l'expression

$$a - b + c - d - e,$$

les symboles $- b$, $+ c$, $- d$, $- e$ jouent, respectivement, le même rôle que b', c, d', e' dans la somme $a + b' + c + d' + e'$, ceci conduit à la convention suivante:

Convention. — a *désignant un nombre algébrique, le symbole* + a *représente aussi ce nombre et le symbole* — a *représente le nombre égal et de signe contraire à* a.

EXEMPLES :

$$+(+4) = +4;$$
$$-(+3) = -3;$$
$$+(-2) = -2;$$
$$-(-1) = +1.$$

Cette convention peut encore s'énoncer ainsi : *deux signes consécutifs équivalent à un signe unique qui est le signe + ou le signe — suivant que les deux signes sont les mêmes ou sont contraires.* C'est ce qu'on appelle la *règle des signes* qui se résume dans le tableau suivant :

+	+	+
+	—	—
—	+	—
—	—	+

Définition. — On appelle *termes* d'une somme algébrique les nombres qui la composent avec les signes qui les précèdent.

Ainsi, dans la somme algébrique

$$a - b + c - d - e$$

les *termes* sont

$$a, \quad -b, \quad +c, \quad -d, \quad -e.$$

D'après la convention précédente, ces symboles *ont un sens bien défini.*

De la convention précédente et de cette définition résulte la proposition suivante :

Toute somme algébrique est la somme (proprement dite) *de ses termes.* (En prenant comme signification du mot terme celle qui résulte de la définition précédente.) Ainsi :

$$(+3) - (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) - (-2)$$

est la somme des nombres

$$+3, \quad -(-1), \quad +\left(-\frac{1}{3}\right), \quad -(-2)$$

c'est-à-dire des nombres

$$+3,\ +1,\ -\frac{1}{3},\ +2.$$

Cette somme algébrique peut donc s'écrire

$$+3+1-\frac{1}{3}+2.$$

Il résulte de cette proposition que toutes les propositions relatives à la *somme* sont applicables à la *somme algébrique*. Nous pouvons donc énoncer, sans nouvelle démonstration, les propositions suivantes :

Théorème I. — *Dans une somme algébrique, on peut intervertir l'ordre des termes sans modifier la valeur de la somme.*

$$a-b+c-d-e+f=f-b-e-d+a+c.$$

Remarque. — Comme, d'après cette convention, les symboles $-b$, $-d$, $-e$, ont une signification, on peut, en intervertissant l'ordre des termes, placer le premier un terme précédé du signe —. Ainsi,

$$a-b+c-d-e+f=-b+a-d-e+c+f.$$

Lorsqu'on amène le premier un terme précédé du signe + on n'écrit pas ce signe, ce qui est légitime, puisque $+a=a$, $+f=f$, par convention.

Théorème II. — *Dans une somme algébrique, on peut remplacer plusieurs termes par leur somme algébrique effectuée et, réciproquement, on peut remplacer un terme par plusieurs termes dont il est la somme algébrique.*

Ainsi, si

$$-c+d-e=-k,$$

on a : $$a+b-c+d-e-f=a+b-k-f.$$

Exemple : On a

$$-(-1)+(-3)-(+3)=-(+5);$$

donc :

$$(+3)-(+2)-(-1)+(-3)-(+3)+(+7)=(+3)-(+2)-(+5)+(+7).$$

Remarque. — Étant donnée une somme quelconque de nombres positifs et négatifs on peut toujours la considérer comme une *somme*

algébrique de nombres tous positifs, car tout nombre négatif est égal et de signe contraire à un nombre positif.

$$-3+4-5+6-8+1$$

peut s'écrire

$$-(+3)+(+4)-(+5)+(+6)-(+8)+(+1).$$

Théorème III. — *Pour ajouter une somme algébrique, il suffit d'ajouter, successivement, chacun de ses termes.*

Ce théorème, comme nous l'avons vu (n° 8), est un corollaire du théorème précédent. D'ailleurs, étant vrai pour une somme, proprement dite, il est vrai pour une somme algébrique.

Théorème IV. — *Pour retrancher une somme algébrique, il suffit d'ajouter, successivement, chacun de ses termes changés de signe.*

Pour démontrer ce théorème il faut d'abord établir la proposition suivante :

Si, dans une somme algébrique, on change les signes de tous les termes, la nouvelle somme algébrique, ainsi obtenue, est égale et de signe contraire à la première.

En effet, d'après la Règle du n° 8, pour faire une somme algébrique on fait la somme des nombres positifs, soit P la valeur absolue de cette somme, puis la somme des nombres négatifs, soit N la valeur absolue de cette somme.

Si $P > N$, la somme algébrique est le nombre $+(P-N)$.
Si $P < N$, la somme algébrique est le nombre $-(N-P)$
et, si $P = N$, la somme algébrique est *nulle*.

Lorsqu'on aura changé les signes de *tous* les termes, les termes positifs deviendront négatifs et les termes négatifs deviendront positifs. Donc, dans la nouvelle somme algébrique, la somme des termes positifs aura même valeur absolue N que la somme des termes négatifs dans la précédente et la somme des termes négatifs aura même valeur absolue P que la somme des termes positifs dans la précédente. Par suite,

Si $P > N$, la nouvelle somme algébrique a pour valeur $-(P-N)$.
Si $P < N$, la nouvelle somme algébrique a pour valeur $+(N-P)$
et, si $P = N$, la nouvelle somme algébrique est *nulle*.

Dans les trois cas, la nouvelle somme est égale et de signe contraire à la précédente (car le nombre *zéro* peut être considéré comme son égal et de signe contraire à lui-même).

Ceci posé, le théorème énoncé en résulte immédiatement. Car, par définition même de la soustraction, retrancher un nombre c'est

ajouter le nombre égal et de signe contraire. Donc, pour retrancher une somme algébrique, il faut *ajouter* la somme égale et de signe contraire et cette somme est obtenue, comme nous venons de le voir, en changeant les signes de tous les termes de la somme. Ainsi, pour retrancher la somme $c - d + e$, il faudra ajouter la somme $-c + d - e$. Or, d'après le théorème précédent, pour ajouter une somme on ajoute, successivement, chacun de ses termes. Donc, *pour retrancher une somme algébrique il suffit d'ajouter, successivement, tous ses termes changés de signe.*

Ainsi, pour retrancher $c - d + e$ il faut ajouter $-c + d - e$ il faut donc ajouter, successivement, $-c$, $+d$ et $-e$.

$$\begin{aligned}(a - b) - (c - d + e) &= (a - b) + (-c + d - e) \\ &= a - b - c + d - e.\end{aligned}$$

Exemples :

$$(+3 - 2 + 5) + (+15 - 6 - 2) = +3 - 2 + 5 + 15 - 6 - 2;$$
$$\left(+4 - 1 + \frac{1}{2}\right) - \left(-6 + 3 - \frac{1}{3}\right) = +4 - 1 + \frac{1}{2} + 6 - 3 + \frac{1}{3};$$
$$(+5 - 6) - \left(+2 - 3 - 7 + \frac{1}{4}\right) = +5 - 6 - 2 + 3 + 7 - \frac{1}{4};$$
$$(a + b - c) - (-d + e - f + h) = a + b - c + d - e + f - h.$$

Application. — Les deux théorèmes précédents nous permettent de faire les deux opérations inverses *ouvrir une parenthèse* ou *introduire une parenthèse*. Ainsi, par exemple, considérons la différence

$$(a + b) - (c - d + e):$$

elle est égale à la somme algébrique

$$a + b - c + d - e,$$

d'après ce que nous venons de voir. Cette transformation de la première expression dans la seconde est ce qu'on appelle *ouvrir une parenthèse*. Mais, *réciproquement*, étant donnée la seconde expression

$$a + b - c + d - e,$$

on peut la remplacer par l'expression

$$(a + b) - (c - d + e)$$

et *cette transformation* est ce qu'on appelle *introduire des parenthèses*. On peut, ainsi, en introduisant ou ouvrant des parenthèses, transformer une expression dans une autre. Ainsi, par exemple, on peut

mettre toute somme algébrique sous forme d'une différence de deux sommes de termes tous positifs.

On a :

$$a + b - c + d - e = a + b + d - c - e$$
$$= (a + b + d) - (c + e).$$

11. Théorème I. — *La valeur absolue de la somme ou de la différence de deux nombres est inférieure ou au plus égale à la somme des valeurs absolues de ces deux nombres et supérieure ou au moins égale à la différence des valeurs absolues de ces deux nombres.*

En effet, d'après la définition même de l'addition de deux nombres (nº 6), la valeur absolue de la somme de deux nombres est, ou bien égale à la somme des valeurs absolues de ces deux nombres, ou bien égale à la différence de ces valeurs absolues. Dans le premier cas, la valeur absolue de la somme est égale à la somme des valeurs absolues et plus grande que la différence. Dans le second cas, la valeur absolue de la somme est égale à la différence des valeurs absolues et, par suite, plus petite que leur somme. On a donc toujours :

$$|a| - |b| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

Le théorème étant vrai pour la somme, est, évidemment, vrai pour la différence.

Théorème II. — *La valeur absolue d'une somme algébrique est inférieure ou au plus égale à la somme des valeurs absolues de ses termes.*

Soit, en effet, la somme algébrique

$$a - b + c - d,$$

d'après le théorème précédent on a :

$$|a - b| \leqslant |a| + |b| \qquad (1).$$

De même, si nous considérons $a - b + c$ comme la somme de $(a - b)$ et c, on a :

$$|a - b + c| \leqslant |a - b| + |c|;$$

et, par suite, à fortiori, à cause de l'inégalité (1) [1],

$$|a - b + c| \leqslant |a| + |b| + |c| \qquad (2).$$

(1) Nous appliquons ici des propositions connues sur les inégalités de nombres *arithmétiques*. Par exemple,

si $A \leqslant B + C$
et si $D \leqslant A + E,$
on a $D \leqslant B + C + E.$

En considérant $a - b + c - d$ comme la différence entre $(a - b + c)$ et d, on a, d'après le théorème précédent,

$$|a - b + c - d| \leqslant |a - b + c| + |d|,$$

et, par suite, à cause de l'inégalité (2),

$$|a - b + c - d| \leqslant |a| + |b| + |c| + |d|.$$

EXEMPLE :

$$|-3 + 5 - 1 + 8| < 3 + 5 + 1 + 8,$$
$$|-3 + 5 - 1 + 8| < 17.$$

Remarque. — La valeur absolue de la somme n'est *égale* à la somme des valeurs absolues de ses termes que dans le cas particulier où elle est une *somme* de termes *tous de même signe*.

Ainsi :

$$|-2 - 4 - 3 - 1| = 2 + 4 + 3 + 1 = 10;$$
$$|+5 + 7 + 3| = 5 + 7 + 3 = 15.$$

12. Inégalités. — Étant donnés deux nombres algébriques inégaux a et b, la différence $a - b$ n'est pas nulle.

1° Si cette différence est *positive*, a est dit *plus grand* que b et on écrit :

$$a > b.$$

2° Si la différence $a - b$ est *négative*, a est dit *plus petit* que b et on écrit :

$$a < b.$$

Remarque. — Si a est plus grand que b, inversement b est plus petit que a; car, $(a - b)$ et $(b - a)$ étant des nombres égaux et de signes contraires (n° 9), si $(a - b)$ est positif $(b - a)$ est négatif.

De même, si a est plus petit que b, b est plus grand que a. Donc les inégalités

$$b > a \quad \text{et} \quad a < b$$

sont *équivalentes*, c'est-à-dire que l'une entraîne l'autre.

Problème. — *Ranger les nombres algébriques par ordre de grandeur croissante.*

Ceci résulte des propositions suivantes :

1° *De deux nombres positifs le plus grand est celui qui a la plus grande valeur absolue.*

Car, si a et b sont deux nombres positifs et si $|a| > |b|$, la

valeur absolue de $(a - b)$ est $|a| - |b|$ et le signe celui de a, c'est-à-dire le signe $+$.

Ainsi, $$+4 > +3, \qquad +5 > +\frac{1}{2}.$$

2° *De deux nombres négatifs le plus grand est celui qui a la plus petite valeur absolue.*

Car, si a et b sont deux nombres négatifs et si $|a| > |b|$, la valeur absolue de $(a - b)$ sera $|a| - |b|$ et le signe celui de a, c'est-à-dire le signe $-$. Donc,

$$a < b.$$

Ainsi, $$-3 > -4, \qquad -\frac{1}{2} > -5.$$

3° *Tout nombre positif est plus grand que zéro et tout nombre négatif est plus petit que zéro.*

Car la différence $a - 0$ étant égale à a, est du signe de a.

Ainsi, $$+7 > 0, \quad +\frac{1}{3} > 0, \quad -6 < 0, \quad -\frac{2}{5} < 0.$$

Il résulte de là que, *pour écrire qu'un nombre est positif ou négatif, il suffit d'écrire qu'il est plus grand ou plus petit que zéro.*

Ainsi, $a > 0$ signifie *a positif*,
$a < 0$ signifie *a négatif*.

4° *Tout nombre positif est plus grand que tout nombre négatif.*

Car si a est positif et b négatif, la différence $a - b$, étant la *somme* des deux nombres a et $-b$ qui sont tous deux positifs, est positive. Donc $a > b$.

Ainsi, $$+3 > -15, \qquad +\frac{15}{100} > -21.$$

En se servant de ces quatre propositions, il sera facile de ranger des nombres donnés par ordre de grandeur croissante, de façon que tout nombre soit plus petit que ceux écrits à sa droite et plus grand que tous ceux qui sont écrits à sa gauche. Le plus petit de tous les nombres donnés sera le nombre négatif ayant la plus grande valeur absolue. Soient les nombres :

$$+4, -\frac{1}{3}, +5, -6, -12, +\frac{3}{2}, 0, -1;$$

ces nombres, rangés par ordre de grandeur croissante, sont :

$$-12 < -6 < -1 < -\frac{1}{3} < 0 < +\frac{3}{2} < +4 < +5.$$

Théorème I. — *Il n'existe aucun nombre algébrique plus grand que tous les autres, et aucun nombre algébrique plus petit que tous les autres.*

Pour cela, il suffit de prouver qu'étant donné un nombre algébrique quelconque, il y en a au moins un plus grand et au moins un plus petit. Soit, en effet, a un nombre algébrique, on sait qu'on peut toujours trouver un nombre arithmétique N plus grand que la valeur absolue A du nombre algébrique a. Le nombre algébrique $+\mathrm{N}$ est alors, certainement, plus grand que a, et le nombre algébrique $-\mathrm{N}$ est certainement plus petit que a.

Remarque. — En arithmétique, il y a un nombre plus petit que tous les autres, c'est zéro. La suite des nombres arithmétiques n'est, par suite, illimitée que dans un sens. En Algèbre, la suite des nombres algébriques est illimitée dans les deux sens. On peut donner, de ce fait, une image géométrique qui le fait mieux comprendre. Prenons un axe $x'x$ (*fig.* 6), sur lequel le sens positif



Fig. 6.

est de x' vers x, de gauche à droite. Soit O un point fixe de cet axe ; à tout nombre algébrique a, je puis faire correspondre un point A de l'axe et un seul en prenant le point A, tel que

$$\overline{\mathrm{OA}} = a.$$

Lorsque A est à droite de O, $\overline{\mathrm{OA}}$ est positif ; lorsqu'il est à gauche de O, $\overline{\mathrm{OA}}$ est négatif. Lorsque le nombre a grandit, le point A marche dans le sens positif ; lorsqu'au contraire le nombre a diminue, le point A se déplace dans le sens négatif. Or, le point A peut s'éloigner indéfiniment *dans les deux sens*, par conséquent la

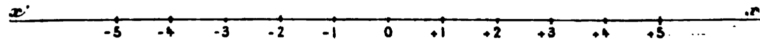


Fig. 7.

suite des nombres est illimitée dans les deux sens. Ainsi, si on ne marque que les points correspondants aux nombres entiers, on obtient (*fig.* 7) une suite de points illimitée dans les deux sens.

Théorème II. — *Étant donnés trois nombres algébriques* a, b, c, *si* a *est plus grand que* b *et* b *plus grand que* c, a *est plus grand que* c.

En effet, puisque, par hypothèse, $a > b$ et $b > c$, c'est que les différences $a - b$ et $b - c$ sont positives.

Leur somme

$$(a - b) + (b - c) = a - c$$

est positive. Donc, $(a - c)$ étant positif, a est plus grand que c.

EXEMPLE :

$$+4 > 0, \quad 0 > -3, \quad \text{donc} \quad +4 > -3.$$

Ainsi, tout nombre positif étant plus grand que zéro et tout nombre négatif plus petit que zéro, on peut en conclure que tout nombre positif est plus grand que tout nombre négatif.

Théorème III. — *Lorsqu'on change les signes des deux membres d'une inégalité, l'inégalité change de sens.*

Je dis que, si $a > b$,

on a : $-a < -b$,

car, si $a - b$ est positif, $-a + b = -a - (-b)$, qui est le nombre égal et de signe contraire, est négatif.

EXEMPLES :

$$+4 > -3,$$

donc : $-4 < +3.$

$$+5 > +\frac{1}{2},$$

donc : $-5 < -\frac{1}{2}.$

13. Théorème I. — *On peut ajouter ou retrancher aux deux membres d'une inégalité un même nombre.*

Il suffit de démontrer la proposition dans le cas où on *ajoute*; car retrancher un nombre, c'est ajouter le nombre égal et de signe contraire.

Soit, alors $a > b$;

je dis que, c étant un nombre algébrique quelconque,

$$a + c > b + c.$$

En effet, on a :

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c$$
$$= a - b + (c - c) = a - b + 0 = a - b.$$

Or, par hypothèse $(a - b)$ est positif; donc il en est de même de $(a + c) - (b + c)$ et on a :

$$a + c > b + c.$$

Exemples :

$$+4 > -3,$$

donc : $+4 - 6 > -3 - 6$ ou $-2 > -9$.

$$-3 < -1,$$

donc : $-3 + 2 < -1 + 2$ ou $-1 < +1$.

Théorème II. — *Étant donnés quatre nombres* a, b, c, d, *si on a les deux inégalités*

$$a > b,$$
$$c > d,$$

elles entraînent l'inégalité

$$a + c > b + d.$$

En effet, d'après l'hypothèse, $(a - b)$ et $(c - d)$ sont deux nombres positifs, donc leur somme est positive. Or, cette somme s'écrit :

$$(a - b) + (c - d) = a - b + c - d = a + c - b - d$$
$$= (a + c) - (b + d).$$

La différence $(a + c) - (b + d)$ étant positive, on en conclut que

$$a + c > b + d.$$

Remarque. — Cette proposition s'énonce encore brièvement ainsi : *on peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens.*

Théorème III. — *Étant donnés quatre nombres* a, b, c, d, *si on a les deux inégalités de sens contraires*

$$a > b,$$
$$c < d,$$

elles entraînent l'inégalité

$$a - c > b - d.$$

En effet, d'après l'hypothèse, les deux différences $(a - b)$ et $(d - c)$ sont positives. Leur somme est donc positive. Or, cette somme s'écrit, en faisant des transformations connues (n° 10),

$$(a - b) + (d - c) = a - b + d - c = a - c - b + d$$
$$= (a - c) - (b - d).$$

La différence $(a - c) - (b - d)$ est donc positive ; et par suite, on a :

$$a - c > b - d.$$

Remarque. — Cette proposition s'énonce quelquefois, plus brièvement, ainsi : *on peut retrancher membre à membre deux inégalités de sens contraires et l'inégalité finale est du sens de la première.*

EXEMPLES :

$$+4 > -2,$$
$$-1 > -6;$$

donc, en ajoutant :

$$+4 - 1 > -2 - 6 \quad \text{ou} \quad +3 > -8.$$

De même :

$$+4 > -2,$$
$$-6 < -1;$$

et, en retranchant la seconde de la première :

$$+4 + 6 > -2 + 1 \quad \text{ou} \quad +10 > -1,$$

en retranchant la première de la seconde :

$$-6 - 4 < -1 + 2 \quad \text{ou} \quad -10 < +1.$$

Théorème IV. — *On peut ajouter membres à membres un nombre quelconque d'inégalités de même sens.*

Je dis que si

$$a > b,$$
$$c > d,$$
$$e > f,$$
$$g > h,$$

on a $$a + c + e + g > b + d + f + h.$$

Car, d'après l'hypothèse, les nombres $(a - b)$, $(c - d)$, $(e - f)$, $(g - h)$ sont tous positifs. Leur somme est donc aussi positive. Or cette somme s'écrit :

$$(a - b) + (c - d) + (e - f) + (g - h) = a - b + c - d + e$$
$$- f + g - h = a + c + e + g - b - d - f - h =$$
$$(a + c + e + g) - (b + d + f + h).$$

La différence $(a+c+e+g)-(b+d+f+h)$ est donc positive et, par suite, on a

$$a+c+e+g > b+d+f+h.$$

Exemple : On a

$$\begin{aligned} +3 &> 0, \\ -2 &> -1, \\ +7 &> -15, \\ +3 &> +1, \end{aligned}$$

donc, en ajoutant :

$$+3-2+7+3 > 0-1-15+1$$

ou

$$+11 > -15.$$

14. Multiplication. — On appelle *produit* de deux nombres algébriques un troisième nombre ayant pour valeur absolue le produit des valeurs absolues des deux nombres et ayant le signe (+) ou le signe (—), suivant que les deux nombres sont de même signe ou de signes contraires. Lorsque l'un des deux nombres est zéro, le produit est *zéro*.

L'opération qui consiste à former le produit de deux nombres a et b est ce qu'on appelle la *multiplication*. *Multiplier* a par b ou b par a, c'est faire le *produit* de ces deux nombres. a et b sont appelés les *facteurs* du produit. Pour indiquer le *produit* de a par b, on écrit $(a \times b)$ ou, simplement, (ab). Quand il n'est pas nécessaire d'indiquer expressément que le produit est *effectué*, on supprime la parenthèse et on écrit $a \times b$ ou ab.

Remarque. — Le symbole ab indique le produit de a par b, et le symbole ba indique le produit de b par a. Il résulte de notre définition que ces deux produits sont égaux ; car rien, dans la définition, ne distingue celui des deux *facteurs* qui est le premier, puisque le produit *arithmétique* des valeurs absolues ne dépend pas de l'ordre des facteurs. Ainsi, l'on a

$$ab = ba.$$

Exemples :

$$\begin{aligned} (+4) \times (+3) &= (+12); \\ (+2) \times (-1) &= (-2); \\ (-1) \times \left(+\tfrac{1}{2}\right) &= \left(-\tfrac{1}{2}\right); \\ (-3) \times (-4) &= (+12); \\ (+2) \times 0 &= 0. \end{aligned}$$

Remarque. — Le signe du produit de deux facteurs s'obtient encore par la *règle des signes* que nous avons déjà donnée plus haut (n° 10) et qui peut se résumer dans le tableau suivant :

Signes des facteurs :	+	+	−	−
	+	−	+	−
Signe du produit :	+	−	−	+

15. Définition. — Étant donnés plusieurs nombres algébriques a, b, c, d, on désigne par le symbole $a \times b \times c \times d$, ou encore, plus simplement, par $abcd$ le nombre obtenu en multipliant a par b, le résultat par c et, enfin, le nouveau résultat par d. Ainsi, en désignant toujours, au moyen d'une parenthèse, une opération effectuée, on a, *par définition*, les égalités suivantes :

$$abc = (ab)\,c$$

et

$$abcd = (abc)\,d.$$

Remarque. — Il résulte immédiatement de cette définition que, si *l'un* des *facteurs* du *produit* de *plusieurs* facteurs $abcd$ est *nul*, le produit est *nul*. Ainsi,

$$(+4)\times(-3)\times 0\times(+7)=(-12)\times 0\times(+7)=0\times(+7)=0.$$

Exemples : On a

$$(+4)\times(-3) = (-12),$$

donc :

$$(+4)\times(-3)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = (-12)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = (+6)$$

et :

$$(+4)\times(-3)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(+7) = (+6)\times(+7) = (+42).$$

Théorème I. — *La valeur absolue d'un produit de plusieurs facteurs est égale au produit des valeurs absolues de ces facteurs.*

Cette proposition est la définition même de la valeur absolue du produit dans le cas de *deux* facteurs (n° 14). Elle s'étend, immédiatement, au cas de plusieurs facteurs. On a, en effet,

$$|ab| = |a| \times |b| \qquad (1).$$

Or, puisque, par définition, abc est le produit de ab par c, on a :

$$|abc| = |ab| \times |c|,$$

et, en vertu de l'égalité (1),

$$|abc| = |a| \times |b| \times |c| \qquad (2).$$

De même, puisque $abcd$ est le produit de abc par d, on a :

$$|abcd| = |abc| \times |d| = |a| \times |b| \times |c| \times |d|,$$

en tenant compte de l'égalité (2).

Théorème II. — *Le signe du produit de plusieurs facteurs est le signe + ou le signe —, suivant que le nombre des facteurs négatifs est pair (ou nul) ou impair.*

Soit le produit $abcde$. Je remarque que, comme

$$(+1) \times a = a,$$

ce produit peut s'écrire :

$$(+1)\,abcde.$$

Or, par définition, ce produit est obtenu en multipliant $+1$ par a, le résultat par b, puis par c, d et e. Chaque fois qu'on multiplie par un nombre positif, le produit ne change pas de signe, et chaque fois qu'on multiplie par un nombre négatif, le produit change de signe. Donc, le produit aura changé autant de fois de signe qu'il y a de facteurs négatifs. Si le nombre des facteurs négatifs a,b,c,d,e est pair ou nul, le produit aura changé un nombre pair de fois de signe ou n'aura pas changé de signe ; il sera finalement du signe de $+1$, c'est-à-dire du signe $+$. Si le nombre des facteurs a,b,c,d,e qui sont négatifs est impair, le produit, dans les multiplications successives, aura changé un nombre impair fois de signe ; et, par suite, le produit $(+1)\,abcde$ ou $abcde$ sera de signe contraire à $+1$, c'est-à-dire du signe —.

Des deux théorèmes précédents, on déduit la règle suivante pour former le produit de plusieurs facteurs.

Règle. — *Le produit de plusieurs facteurs est le nombre ayant pour valeur absolue le produit des valeurs absolues des facteurs et le signe + ou —, suivant que le nombre des facteurs négatifs est pair (ou nul) ou impair. Si l'un des facteurs du produit est zéro, le produit est zéro.*

EXEMPLES :

$$(-4)(+1)(-3)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{1}{3}\right)(-2) = +\left(4 \times 1 \times 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 2\right) = +4;$$

$$(-2)(-1)(+3)\left(-\frac{1}{5}\right)(+20) = -\left(2 \times 1 \times 3 \times \frac{1}{5} \times 20\right) = -24;$$

$$(+3) \times 0 \times (+1)(-2) = 0.$$

Théorème III. — *Un produit de plusieurs facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs.*

Ce théorème résulte immédiatement de la *règle* précédente ; car, quel que soit l'ordre dans lequel on prend les facteurs, la valeur absolue du produit est le produit des valeurs absolues des facteurs, et ce produit, qui est un produit de nombres *arithmétiques*, est indépendant de l'ordre des facteurs. Quant au signe du produit, il ne dépend pas non plus de l'ordre des facteurs, mais seulement du *nombre* des facteurs *négatifs*.

Remarque. — Toutes les propriétés du produit de plusieurs facteurs qui découlent du théorème précédent se démontreront comme en arithmétique [1]; on peut donc énoncer, sans démonstration nouvelle, les deux théorèmes suivants :

Théorème IV. — *Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut remplacer plusieurs facteurs par leur produit effectué et, réciproquement, on peut remplacer un facteur par plusieurs autres dont il est le produit.*

Théorème V. — *Pour multiplier un nombre par un produit de facteurs, il suffit de multiplier successivement par chacun des facteurs.*

16. Division. — Étant donné un nombre algébrique a, *autre que zéro*, on appelle *inverse* de ce nombre, et on le représente par le symbole $\frac{1}{a}$, le nombre ayant pour valeur absolue l'inverse de la valeur absolue de ce nombre et ayant même signe.

EXEMPLES :

L'inverse de $+2$ est $+\frac{1}{2}$, l'inverse de -3 est $-\frac{1}{3}$. On a donc, par définition :

$$\frac{1}{+2} = +\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

Remarque. — $+1$ et -1 sont les deux seuls nombres qui sont égaux à leurs inverses, car 1 est le seul nombre arithmétique égal à son inverse.

(1) Voir dans les *Leçons d'arithmétique* de M. Tannery, les nos 78 à 81.

Théorème I. — *Le produit d'un nombre par son inverse est égal à* $+1$.

Car la valeur absolue du produit $a \times \frac{1}{a}$ est le produit des valeurs absolues, qui est 1, et, a et $\frac{1}{a}$ étant de même signe, le produit a le signe $+$.

Théorème II. — *Étant donnés deux nombres algébriques* a *et* b, b *étant différent de zéro, il existe toujours un troisième nombre* c *tel que le produit* bc *soit égal à* a, *et un seul.*

D'abord, il est facile de voir que, si le nombre c existe, il est unique et que ce nombre est nécessairement égal à $a \times \frac{1}{b}$. En effet, si le nombre c existe, on a :

$$cb = a,$$

par suite,

$$(cb) \times \frac{1}{b} = a \times \frac{1}{b},$$

ou

$$c \times \left(b\frac{1}{b}\right) = c\,(+1) = c = a \times \frac{1}{b}.$$

Le seul nombre qui puisse répondre à la question est donc $a \times \frac{1}{b}$. D'ailleurs, il est facile de vérifier que ce nombre y répond ; car on a :

$$\left(a \times \frac{1}{b}\right) \times b = a \times \frac{1}{b} \times b = a \times \left(\frac{1}{b} \times b\right) = a \times (+1) = a.$$

Corollaire I. — *Il n'existe qu'un seul nombre dont le produit par* a *soit égal à* a ; *c'est* $+1$.

Corollaire II. — *Il existe un nombre et un seul dont le produit par* a *est le nombre égal et de signe contraire* — a, *c'est* -1.

Définition. — Étant donnés deux nombres a et b, le premier a appelé *dividende* et le second b, *différent de zéro*, appelé *diviseur*, on appelle *quotient* du dividende a par le diviseur b le nombre c dont le produit par le diviseur b est égal au dividende a.

Le théorème précédent nous apprend que le nombre c existe, qu'il est *unique* et *qu'on l'obtient en multipliant le dividende par l'inverse du diviseur*. On représente le quotient de a par b par la notation $\frac{a}{b}$. On a donc, par définition,

$$\frac{a}{b} = a\frac{1}{b}.$$

Le symbole $\frac{a}{b}$ est ce qu'on appelle une *fraction algébrique*, *a* (le dividende) est appelé le *numérateur* de la fraction, et *b* (le diviseur) est appelé le *dénominateur* de la fraction.

EXEMPLES :

$$\frac{(-2)}{(+3)} = (-2) \times \left(+\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3};$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(+\frac{3}{4}\right)} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(+\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3};$$

$$\frac{(-2)}{\left(-\frac{1}{5}\right)} = (-2) \times (-5) = +10.$$

Remarque. — Puisque le quotient de *a* par *b* s'obtient en multipliant *a* par l'inverse de *b*, la valeur absolue du quotient est le produit de la valeur absolue de *a* par l'inverse de la valeur absolue de *b*; ou, en d'autres termes, c'est *le quotient des valeurs absolues de a et b*. Le signe s'obtient en observant la règle des signes dans le produit de *a* par $\frac{1}{b}$ et, comme $\frac{1}{b}$ est de même signe que *b*, *le signe se déduit des signes de a et b par la règle des signes* (nos 10 et 14). On peut conclure de là la règle suivante pour former le quotient :

Règle. — *Le quotient de deux nombres a pour valeur absolue le quotient des valeurs absolues de ces deux nombres et pour signe le signe + ou le signe —, suivant que les deux nombres sont de même signe ou de signes contraires.*

En d'autres termes, *le signe du quotient se déduit des signes du numérateur et du dénominateur par la règle des signes.*

EXEMPLES :

$$\frac{(-2)}{(+3)} = -\frac{2}{3};$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(+\frac{3}{4}\right)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3};$$

$$\frac{(-8)}{(-2)} = +4.$$

Remarque. — Nous n'avons défini le quotient de deux nombres que dans le cas où le dénominateur est *différent de zéro*, il est aisé de se rendre compte que cette définition devient caduque dans le cas où le diviseur est zéro. En effet, d'après notre définition, le quotient de a par *zéro* serait un nombre q tel que le produit de q par 0 soit égal à a. Or, par définition, le produit de tout nombre par 0 est 0 ; par conséquent, *si* a *est différent de zéro, il n'existe aucun nombre qui, multiplié par zéro, donne pour produit* a ; *et si* a *est égal à zéro, n'importe quel nombre multiplié par zéro donne pour produit* a. Donc, quand a est différent de zéro, il y a *impossibilité* de satisfaire à la définition ; et quand a est égal à zéro, il y a *indétermination*.

L'opération de la division par zéro est impossible ou indéterminée. C'est une opération que *nous ne ferons jamais*. Il est entendu dorénavant que chaque fois que nous écrirons une fraction $\frac{a}{b}$, *b sera différent de zéro*. Une fraction de dénominateur *zéro n'a pas de sens*.

17. Jusqu'ici nous avons considéré les deux classes de nombres algébriques, nombres positifs et négatifs, comme distinctes des nombres arithmétiques. Il est facile, maintenant que nous avons complètement défini le calcul des nombres algébriques, de faire disparaître cette distinction.

Si on passe en revue toutes les règles de calcul des nombres algébriques, on constatera ce fait important, c'est que :

Toute opération effectuée uniquement sur des nombres positifs donne comme résultat un nombre positif dont la valeur absolue est le nombre arithmétique obtenu en faisant la même opération arithmétique sur les valeurs absolues (pourvu, toutefois, que cette opération arithmétique soit possible).

Ainsi :

$$\underbrace{+4+3+6}_{\text{Nombres algébriques.}} = +\underbrace{(4+3+6)}_{\text{Nombres arithmétiques.}};$$

$$\underbrace{(+5)-(+4)+(+3)-(+1)}_{\text{Nombres algébriques.}} = +\underbrace{(5-4+3-1)}_{\text{Nombres arithmétiques.}};$$

$$\underbrace{(+3)\times(+2)\times(+1)}_{\text{Nombres algébriques.}} = +\underbrace{(3\times 2\times 1)}_{\text{Nombres arithmétiques.}};$$

$$\underbrace{\frac{(+3)}{(+4)}\times(+6)-\left(+\frac{2}{3}\right)}_{\text{Nombres algébriques}} = +\underbrace{\left(\frac{3}{4}\times 6-\frac{2}{3}\right)}_{\text{Nomb. arith.}}.$$

Le calcul des nombres positifs entre eux est donc identique au calcul des nombres arithmétiques.

Cette identité entre le calcul des nombres positifs et le calcul de leurs valeurs absolues nous conduit nécessairement à la convention suivante, qui simplifie ce qui précède sans introduire de contradiction.

Convention. — *Tout nombre positif est égal à sa valeur absolue.*

Ainsi, *l'ensemble des nombres positifs est identique à l'ensemble des nombres arithmétiques.*

Par convention,

$$+7 = 7,$$
$$+5 = 5,$$
$$+\frac{2}{100} = \frac{2}{100}.$$

Grâce à cette convention, l'ensemble des nombres algébriques nous apparaît comme une généralisation de l'ensemble des nombres arithmétiques, puisque ces derniers sont contenus dans les premiers.

Dorénavant, à moins qu'il y ait nécessité, nous supprimerons toujours le signe $+$ des nombres positifs. Ainsi, dans une somme algébrique, si le premier nombre est un nombre positif, nous supprimerons le signe $+$; au lieu de

$$+4 - 3 - 2 + 1$$

et

$$+15 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 - 7,$$

nous écrirons

$$4 - 3 - 2 + 1$$

et

$$15 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 - 7.$$

De cette nouvelle écriture il résulte que certaines expressions auront à la fois un sens algébrique et un sens arithmétique, mais les deux façons d'envisager l'expression donneront toujours le même résultat; car si l'expression a un sens arithmétique, c'est qu'on peut la considérer comme une expression ne contenant que des opérations (possibles en arithmétique) sur des nombres positifs, opérations qui conduisent aux mêmes résultats que les opérations sur les nombres arithmétiques.

Ainsi, l'expression

$$4 - 3$$

est la somme algébrique des deux nombres + 4 et — 3, mais c'est aussi la différence des deux nombres + 4 et + 3, elle est donc identique à la différence arithmétique de 4 et 3.

De même, l'expression

$$15 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 - 7$$

peut être considérée comme une expression arithmétique, ou comme la somme algébrique de $+15$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $+4$ et -7. Dans les deux cas, le résultat de l'expression effectuée est le même : $\frac{67}{6}$ ou $+\frac{67}{6}$.

Au fond, nous ne faisons qu'étendre aux signes qui distinguent les deux classes de nombres une convention faite déjà plus haut (n°10).

+ a *est égal à* a *et* — a *est le nombre égal et le signe contraire à* a.

Ainsi, 5 est un nombre *arithmétique ou positif*, + 5 est égal à ce nombre et — 5 est le nombre *négatif* égal et de signe contraire.

Cette convention nous conduit, en outre, à une conclusion très importante, à savoir que, grâce à elle et à l'introduction des nombres négatifs, *toutes les soustractions deviennent possibles*. En arithmétique, on ne peut retrancher un nombre d'un autre que si ce nombre n'est pas plus grand que cet autre. Retrancher 5 de 3 est une opération qui n'a pas de sens en arithmétique. L'introduction des nombres négatifs donne un sens à cette opération et on a :

$$3 - 5 = -2.$$

De même, certaines restrictions fort gênantes dans les énoncés de l'arithmétique disparaissent. Ainsi, par exemple, si on considère l'expression

$$5 - 3 + 6 - 4 + 1,$$

on apprend en arithmétique qu'on peut y intervertir l'ordre des termes, mais *à condition que les opérations à effectuer soient possibles* (arithmétiquement). On peut écrire cette somme

$$5 + 6 - 3 - 4 + 1$$

ou encore

$$6 - 4 + 1 + 5 - 3,$$

mais on n'aurait pas pu l'écrire

$$5 - 3 - 4 + 6 + 1$$

parce que les opérations indiquées n'ont aucune signification arithmétique puisqu'elles indiquent que, de 5, il faut retrancher 3, ce qui donne 2; et que, du résultat 2, il faut retrancher 4; ce qui n'est pas possible en arithmétique. Grâce à l'introduction des nombres négatifs et à la convention qui identifie les nombres positifs aux nombres arithmétiques, ces restrictions disparaissent et, comme nous l'avons vu, on peut, dans tous les cas, intervertir l'ordre des termes d'une somme algébrique d'une façon *quelconque*. Ainsi, dans l'exemple précédent, la somme

$$5 - 3 - 4 + 6 + 1$$

a un sens et cette somme effectuée est égale à la somme effectuée

$$5 - 3 + 6 - 4 + 1.$$

18. Fractions. — Les fractions algébriques jouissent des mêmes propriétés et sont soumises aux mêmes règles de calcul que les fractions arithmétiques *généralisées*. Comme les démonstrations ne reposent que sur les propriétés générales de la multiplication, qui appartiennent, comme nous l'avons vu, aux nombres algébriques, elles sont identiques à celles de l'arithmétique ([1]). Nous pourrons donc énoncer ces propositions sans faire de nouvelles démonstrations.

D'abord, tout nombre *peut être considéré comme une fraction de dénominateur* 1, car on a :

$$\frac{a}{1} = a.$$

Si dans une fraction le dénominateur est égal au numérateur, la fraction est égale à 1 :

$$\frac{a}{a} = 1.$$

Théorème I. — *On peut multiplier ou diviser les deux termes d'une fraction algébrique par un même nombre, autre que zéro, sans changer la valeur de la fraction.* Ainsi :

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{a}{b}.$$

([1]) Voir Tannery (*loc. cit.*), nos 207 à 211.

Corollaire. — *On peut changer les signes des deux termes d'une fraction sans changer sa valeur.* Car changer les signes des deux termes c'est les multiplier par (— 1). Ainsi,

$$\frac{-\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{1}{2}}{-3};\quad \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{1}{7}}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{7}}.$$

Application I. — Le théorème précédent peut servir à *simplifier* une fraction algébrique. Ainsi,

$$-\frac{4}{2}=\frac{-2}{1}=-2,\quad \frac{3\sqrt{3}}{-4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3}\sqrt{2}}{-8}=-\frac{3\sqrt{6}}{8},$$

$$\frac{abc}{ad}=\frac{bc}{d},\quad \frac{\frac{4\,ab}{c}}{ad}=\frac{4\,ab}{adc}=\frac{4\,b}{dc}.$$

Application II. — *Étant données plusieurs fractions ayant des dénominateurs différents, on peut former des fractions qui leur sont, respectivement, égales et ayant toutes même dénominateur en multipliant les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs des autres.* On a :

$$\frac{a}{b}=\frac{ab'b''}{bb'b''};\quad \frac{a'}{b'}=\frac{a'bb''}{bb'b''};\quad \frac{a''}{b''}=\frac{a''bb'}{bb'b''}.$$

On réduit ainsi les fractions au même dénominateur.

Théorème II. — *Le produit de deux fractions est une fraction ayant pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs des deux fractions.*

$$\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}=\frac{aa'}{bb'}.$$

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{a}{b}\times\frac{c}{1}=\frac{ac}{b}.$$

Théorème III. — *Pour diviser un nombre par une fraction, on le*

multiplie par cette fraction renversée :

$$\frac{c}{\left(\frac{a}{b}\right)} = c.\frac{b}{a} = \frac{cb}{a},$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a'}{b'}\right)} = \frac{a}{b}.\frac{b'}{a'} = \frac{ab'}{ba'}.$$

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{a},$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{1}\right)} = \frac{a}{b}.\frac{1}{c} = \frac{a}{bc}.$$

19. Puissances. — On appelle *puissance* $m^{\text{ième}}$ d'un nombre a, et on représente par le symbole a^m, m étant un nombre *arithmétique entier*, le produit de m nombres égaux à a. Le nombre m, qui indique de combien de facteurs égaux est formé le produit, est ce qu'on appelle *l'exposant de la puissance*. Ainsi, par définition,

$$aa = a^2, \quad aaa = a^3;$$

a^2 s'énonce *a puissance deux* ou, plus brièvement, *a deux*; a^3 s'énonce *a puissance trois* ou *a trois*; d'une manière générale, a^m s'énonce *a puissance m* (1).

(1) Nous ne définissons que les puissances *entières* des nombres algébriques. Il n'y a pas lieu, comme en arithmétique [voir dans les *Leçons d'arithmétique* de M. Tannery, les nos 450 à 456 ou l'*Appendice III* de ce volume], de définir des exposants fractionnaires, car on ne peut pas définir *dans tous les cas* une racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre algébrique.

Il n'existe aucun nombre positif ou négatif dont la puissance $m^{\text{ième}}$ soit égale à un nombre négatif donné, lorsque m est *pair*. Car toute puissance paire d'un nombre algébrique est un nombre *positif*. On ne peut donc pas parler de la racine $m^{\text{ième}}$ (m pair) d'un nombre négatif.

On peut remarquer que lorsque m est *impair* il existe toujours un nombre x tel que

$$x^m = -A$$

A étant un nombre arithmétique. Ce nombre est

$$x = -\sqrt[m]{A}.$$

Il est facile de voir, d'ailleurs, que c'est le seul. On peut donc dire que tout nombre négatif a une racine d'indice impair (Voir, plus loin, n° 102).

De cette définition résultent, immédiatement, les remarques suivantes :

1° *Toute puissance d'un nombre positif est positive*, car un produit de nombres positifs est un nombre positif.

2° *Une puissance d'un nombre négatif est positive ou négative suivant que l'exposant est pair ou impair;* car un produit de nombres négatifs est positif ou négatif suivant que le nombre des facteurs est pair ou impair (n° 15). Ainsi,

$$(-1)^m = +1 \quad m \text{ pair};$$
$$(-1)^m = -1 \quad m \text{ impair}.$$

EXEMPLES :

$$(-2)^2 = +2^2 = 4;$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}.$$

Les démonstrations des propriétés élémentaires des puissances entières, ne reposant que sur les propriétés de la multiplication, sont identiques aux démonstrations analogues en arithmétique[1].

Nous énoncerons donc sans démonstration les propositions suivantes :

Théorème I. — *Pour élever un produit de facteurs à une puissance (entière), il suffit d'élever chacun des facteurs à cette puissance.*

$$(abc)^m = a^m b^m c^m.$$

Théorème II. — *Pour élever une fraction à une puissance, il suffit d'élever chacun des termes de cette fraction à cette puissance.*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Théorème III. — *Le produit de plusieurs puissances d'un même nombre est une puissance de ce nombre ayant pour exposant la somme des exposants des facteurs.*

$$a^m\, a^p\, a^q = a^{m+p+q}.$$

Corollaire. — *Pour élever une puissance d'un nombre à une autre puissance, il suffit de multiplier l'exposant de cette puissance par le*

(1) Voir J. Tannery (*loc. cit.*), n° 81.

nouvel exposant.

$$(a^m)^p = a^{mp}.$$

Ainsi,

$$[(-2)^2]^3 = (-2)^6, \quad \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^4\right]^3 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{12}.$$

Pour terminer, nous donnerons la démonstration de la proposition suivante :

Théorème IV. — *Le quotient de deux puissances d'un même nombre :*

1° *Si l'exposant du numérateur est plus grand que l'exposant du dénominateur, est une puissance de ce nombre ayant pour exposant l'excès de l'exposant du numérateur sur l'exposant du dénominateur.*

2° *Si les exposants du numérateur et du dénominateur sont égaux, est égal à* $+1$.

3° *Si l'exposant du numérateur est plus petit que l'exposant du dénominateur, est l'inverse d'une puissance de ce nombre ayant pour exposant l'excès de l'exposant du dénominateur sur l'exposant du numérateur.*

Soit $\dfrac{a^m}{a^p}$ le quotient de deux puissances de a.

1° Si l'on a $\quad m > p, \quad$ soit $\quad m = p + q$

alors, $\quad a^m = a^{p+q} = a^p . a^q$

et on voit que a^q est le quotient de a^m par a^p, donc :

$$\frac{a^m}{a^p} = a^q = a^{m-p}$$

2° Si l'on a $\quad m = p, \quad a^m = a^p \quad$ et $\quad \dfrac{a^m}{a^p} = +1,$

car $+1$ (Corollaire I, n° 16) est le seul nombre dont le produit par a^p est égal à a^p.

3° Si l'on a $\quad m < p, \quad$ soit $\quad m = p - q \quad$ ou $\quad p = m + q,$

on a : $$\frac{a^m}{a^p} = \frac{a^m}{a^{m+q}} = \frac{a^m}{a^m\, a^q} = \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p-m}},$$

en divisant les deux termes de la fraction par a^m.

Exemples :

$$(-3)^4 \times (-3)^6 = (-3)^{10};$$

$$\frac{(-2)^5}{(-2)^2} = (-2)^3, \quad \frac{(-2)^4}{(-2)^4} = 1;$$

$$\frac{(-2)^2}{(-2)^5} = \frac{1}{(-2)^3}.$$

20. Théorème I. — *Pour faire le produit d'une somme algébrique par un nombre on multiplie chacun des termes de la somme par ce nombre et on fait la somme des résultats obtenus.*

Remarquons, d'abord, que, comme toute somme algébrique peut être considérée comme la somme proprement dite de ses *termes* (nº 10), il nous suffira de démontrer le théorème pour une somme de nombres algébriques.

1° *Cas d'une somme de deux nombres.*

Je dis que

$$(b + c) \times a = a \times (b + c) = ab + ac.$$

Pour cela, nous nous appuierons sur une proposition connue d'arithmétique [1]; « pour multiplier une somme ou une différence par un nombre, il suffit de faire la somme ou la différence des produits des deux parties par ce nombre ». Soient A, B et C les valeurs absolues de a, b et c.

Supposons, d'abord, b et c de même signe, ce signe est alors aussi celui de $(b + c)$ et, par suite, $a(b + c)$, ab, ac sont de même signe. Donc $a(b + c)$ et $ab + ac$ sont de même signe. Il reste à prouver qu'ils ont même valeur absolue.

Or, b et c étant de même signe, on a :

$$|b + c| = |b| + |c| = B + C \qquad (\text{nº } 11),$$
$$|a(b + c)| = A \times (B + C).$$

De même :

$$|ab + ac| = |ab| + |ac| = A \times B + A \times C.$$

Or, en arithmétique, on a :

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C,$$

donc,

$$|a(b + c)| = |ab + ac|.$$

(1) Voir, à ce sujet, dans les excellentes *Leçons d'arithmétique* de M. Tannery, les nºˢ 74, 76 et 199.

Supposons, en second lieu, b et c de signes contraires, et supposons, par exemple, $B > C$. Alors, $b + c$ est du signe de b et $a(b + c)$ est du signe de ab. D'ailleurs, on aura, aussi, $A \times B > A \times C$ et $ab + ac$ sera du signe de ab. Donc $a(b + c)$ et $ab + ac$ sont de même signe. Ils ont aussi même valeur absolue, car

$$|a(b+c)| = |a| \times |b+c| = A \times (B - C)$$

et $$|ab + ac| = |ab| - |ac| = A \times B - A \times C.$$

Comme on a :

$$A \times (B - C) = A \times B - A \times C,$$

on a donc :

$$|a(b+c)| = |ab + ac|.$$

Le théorème est vrai dans le cas où la somme a deux termes.

2° *Cas d'une somme quelconque.*

Soit à multiplier la somme

$$(a + b + c + d) \quad \text{par} \quad m$$

on a, d'après ce qui précède,

$$(a + b)m = am + bm \qquad (1);$$

or, si on considère la somme $a + b + c$ comme la somme de $(a + b)$ et de c, on a :

$$(a + b + c)m = (a + b)m + cm$$

et, à cause de l'égalité (1),

$$(a + b + c)m = am + bm + cm \qquad (2).$$

De même, en considérant la somme $a + b + c + d$ comme la somme des deux nombres $(a + b + c)$ et d, on a, d'après ce qui précède,

$$(a + b + c + d)m = (a + b + c)m + dm$$

et, en tenant compte de l'égalité (2),

$$(a + b + c + d)m = am + bm + cm + dm.$$

Le théorème est donc général.

Exemples :

$$(4 - 5 + 2 - 3) \times 3 = 4 \times 3 - 5 \times 3 + 2 \times 3 - 3 \times 3;$$

$$\left(-2 + 3 - 7 + \frac{1}{3}\right) \times (-4) = +2 \times 4 - 3 \times 4 + 7 \times 4 - \frac{1}{3} \times 4;$$

$$(-6 + 5 - 2 + 4) \times \left(-\frac{1}{7}\right) = +\frac{6}{7} - \frac{5}{7} + \frac{2}{7} - \frac{4}{7}.$$

Corollaire. — *Pour diviser une somme par un nombre (autre que zéro), il suffit de diviser chacun des termes de la somme par ce nombre.* Car diviser par un nombre c'est multiplier par son inverse. Ainsi,

$$\frac{a+b+c}{m} = (a+b+c)\frac{1}{m} = a\frac{1}{m} + b\frac{1}{m} + c\frac{1}{m}$$
$$= \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}.$$

Application I. — *Pour faire la somme de plusieurs fractions algébriques, on les réduit au même dénominateur et on forme la fraction ayant pour numérateur la somme des numérateurs et pour dénominateur le dénominateur commun.*

Soient

$$\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}$$

trois fractions ayant même dénominateur d, ce qu'on peut toujours supposer (n° 18). D'après le corollaire précédent, on a l'égalité

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}.$$

Exemples :

$$-\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{9}{12} + \frac{6}{12} - \frac{4}{12} = \frac{-9+6-4}{12} = \frac{-7}{12};$$
$$-\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{15} - \frac{7}{6} = \frac{-6}{30} + \frac{20}{30} + \frac{2}{30} + \frac{-35}{30}$$
$$= \frac{-6+20+2-35}{30} = \frac{-19}{30}.$$

Application II. — Lorsque, dans une somme, il y a plusieurs termes qui sont des produits ayant un facteur commun, on peut les remplacer par un seul terme de même forme : c'est ce qu'on appelle *mettre en facteur*. Par exemple, si dans la somme figurent les termes am, bm, cm, on peut écrire :

$$am + bm + cm = (a+b+c)m :$$

on a mis m *en facteur*. Si une même lettre est répétée plusieurs fois on peut réunir tous les termes égaux à cette lettre. Ainsi, la somme

$$a + b + a + c + b + a$$

peut s'écrire

$$a + a + a + b + b + c$$

ou encore :

$$a \times 1 + a \times 1 + a \times 1 + b \times 1 + b \times 1 + c$$

et enfin, en mettant a et b en facteur,

$$a(1 + 1 + 1) + b(1 + 1) + c = a \times 3 + b \times 2 + c;$$

ce qui s'écrit :

$$3a + 2b + c.$$

Plus généralement, considérons la somme

$$3a - 2b + 6a + 5b - 7a - 8b;$$

on peut l'écrire :

$$\begin{aligned} 3a + 6a - 7a - 2b + 5b - 8b &= (3 + 6 - 7)a + (-2 + 5 - 8)b \\ &= 2a - 5b. \end{aligned}$$

En d'autres termes, *on fait la somme algébrique des termes de même forme*. C'est ce qu'on appelle *réduire les termes semblables* [1].

Théorème II. — *Pour faire le produit de deux sommes algébriques, il suffit de faire la somme des produits que l'on obtient en multipliant, de toutes les manières possibles, un terme de l'une des sommes par un terme de l'autre.*

Ce théorème n'est autre chose qu'une double application du théorème précédent. Soit, en effet, à faire le produit des deux sommes $(a + b + c)$ et $(d + e)$; on a, d'après le théorème précédent, en considérant la somme $(d + e)$ effectuée comme *un* nombre :

$$(a + b + c)(d + e) = a(d + e) + b(d + e) + c(d + e).$$

Or, d'après le théorème précédent,

$$\begin{aligned} a(d + e) &= ad + ae, \\ b(d + e) &= bd + be, \\ c(d + e) &= cd + ce. \end{aligned}$$

Donc,

$$(a + b + c)(d + e) = ad + ae + bd + be + cd + ce;$$

et, dans le second membre de cette égalité, figure la somme de tous

(1) Nous reviendrons plus tard sur ce sujet à propos de la réduction des *polynômes entiers* (Voir le n° 33).

les produits obtenus en multipliant, successivement, tous les termes de $(d+e)$ par les termes de $(a+b+c)$.

EXEMPLES :

$$(4-3+2)(5-6-1)=4\times 5-4\times 6-4\times 1-3\times 5+3\times 6+3\times 1 +2\times 5-2\times 6-2\times 1$$
$$=20-24-4-15+18+3+10-12-2.$$

$$(-2+1-15)(6-5)=-2\times 6+1\times 6-15\times 6+2\times 5-1\times 5+15\times 5$$
$$=-12+6-90+10-5+75.$$

$$(a-b+c)(a-d+b)=aa-ad+ab-ba+bd-bb+ca-cd+cb$$
$$=a^2-ad+bd-b^2+ca-cd+cb,$$

car :
$$ab-ba=ab-ab=0.$$

$$(a+b)(a+b)=aa+ab+ba+bb=a^2+2ab+b^2.$$
$$(a+b)(a-b)=aa-ab+ba-bb=a^2-b^2.$$
$$(a-b)(a-b)=aa-ab-ba+bb=a^2-2ab+b^2.$$

21. Théorème I. — *Lorsque plusieurs fractions sont égales entre elles, la fraction ayant pour numérateur la somme des numérateurs et pour dénominateur la somme des dénominateurs est aussi égale à toutes ces fractions.*

Soient

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}$$

trois fractions égales; soit q leur valeur commune.

Par définition du quotient, on a :

$$a=bq,\quad a'=b'q,\quad a''=b''q;$$

donc :

$$a+a'+a''=bq+b'q+b''q=(b+b'+b'')q.$$

Ceci nous prouve que q est le quotient de $a+a'+a''$ par $b+b'+b''$, c'est-à-dire que

$$\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}=q=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}.$$

EXEMPLES :

$$\frac{-1}{2}=\frac{2}{-4}=\frac{-6}{12}=\frac{-1+2-6}{2-4+12}=\frac{-5}{10}.$$
$$\frac{3}{2}=\frac{-6}{-4}=\frac{21}{14}=\frac{3-6+21}{2-4+14}=\frac{18}{12}.$$

Remarque I. — Ce raisonnement suppose *essentiellement* que $b + b' + b''$ est différent de zéro, c'est-à-dire que la somme des dénominateurs *n'est pas égale à zéro.* Si ceci avait lieu, l'égalité

$$a + a' + a'' = (b + b' + b'')q$$

prouverait que la somme $a + a' + a''$ des numérateurs est *aussi nulle.*

Donc, *si plusieurs fractions sont égales et si la somme des dénominateurs est nulle, la somme des numérateurs est aussi nulle.*

Remarque II. — Avant de faire la somme des numérateurs et des dénominateurs des fractions, on peut multiplier les deux termes de chacune d'elles par un même nombre, puisque (n° 18) cela ne change pas la valeur de la fraction.

Ainsi, on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{ma + pa' + qa''}{mb + pb' + qb''}$$

m, p, q étant trois nombres quelconques dont *un au moins* est différent de zéro.

En particulier, on peut multiplier les deux termes d'une fraction par -1, ce qui revient à les changer de signe. Ainsi, au lieu de faire la somme proprement dite des termes, on peut faire une somme algébrique.

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a - a' + a''}{b - b' + b''} = \frac{-a + a' - a''}{-b + b' - b''}.$$

Exemples :

$$\frac{-4}{3} = \frac{-8}{6} = \frac{-2}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{-4 - (-8) - 2}{3 - 6 + \frac{3}{2}} = \frac{-4 + 8 - 2}{3 - 6 + \frac{3}{2}}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d} = \frac{a - c}{b - d}.$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)}{\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{-2 \times 4 + 6 - \frac{2}{5} \times 3}{-3 \times 4 + 9 - \frac{3}{5} \times 3} = \frac{-8 + 6 - \frac{6}{5}}{-12 + 9 - \frac{9}{5}}.$$

Nous venons d'étendre aux fractions algébriques égales une propriété bien connue des rapports arithmétiques égaux [1]. Les

[1] Voir *Leçons d'arithmétique*, par M. Tannery, n° 212.

propriétés ordinaires des proportions s'étendent de même aux fractions algébriques égales. Nous énoncerons ces propositions sans démonstration, car les démonstrations sont identiques à celles qu'on fait en arithmétique [1].

Étant données deux fractions égales

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

cette égalité est ce qu'on appelle une *proportion* où a et d sont les *extrêmes* et c et b les *moyens*.

1° *Le produit des moyens est égal au produit des extrêmes :*

$$ad = bc.$$

2° *On peut intervertir l'ordre des moyens, ainsi que l'ordre des extrêmes :*

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d},$$

$$\frac{d}{b}=\frac{c}{a},$$

et, par suite,

$$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

3° *On peut ajouter ou retrancher les numérateurs aux dénominateurs ou les dénominateurs aux numérateurs :*

$$\frac{a \pm b}{b}=\frac{c \pm d}{d},$$

$$\frac{a}{b \pm a}=\frac{c}{d \pm c};$$

par exemple,

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

22. Théorème I. — *Lorsqu'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre,*

1° *Si ce nombre est positif, l'inégalité subsiste ;*

2° *Si ce nombre est négatif, l'inégalité change de sens.*

Soit, en effet, l'inégalité

$$a > b.$$

Ceci veut dire que la différence $(a - b)$ est positive.

(1) Voir Tannery (*loc. cit.*), nos 213 à 220.

Soit c un troisième nombre, le produit

$$(a - b)c = ac - bc$$

sera positif ou négatif suivant que c sera lui-même positif ou négatif.

Donc :

si $c > 0$, on a $ac - bc > 0$ et $ac > bc$;

si $c < 0$, on a $ac - bc < 0$ et $ac < bc$.

(Il est clair que si $c = 0$, en multipliant par c, les deux membres deviennent égaux et égaux à zéro).

Corollaire. — *Lorsqu'on divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre, l'inégalité ne change pas de sens ou change de sens suivant que ce nombre est positif ou négatif.*

Car diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse, qui est de même signe que lui.

Exemples : On a :

$$-4 > -6,$$

multiplions par $+3$:

$$-12 > -18;$$

multiplions par -3 :

$$+12 < +18;$$

divisons par $+2$:

$$-2 > -3;$$

divisons par -2 :

$$+2 < +3.$$

Théorème II. — *Étant données deux inégalités de même sens, si le premier membre de l'une et le second membre de l'autre sont de même signe et si on les multiplie membre à membre :*

1° *Si le signe commun est le signe $+$, on obtient une inégalité de même sens ;*

2° *Si le signe commun est le signe $-$, on obtient une inégalité de sens contraire.*

Soient

$$a > b,$$
$$c > d,$$

deux inégalités de même sens et supposons a et d de même signe.

1° Si a et d sont positifs, on a :

$$ac > ad$$

et

$$ad > bd,$$

en multipliant les deux membres de la seconde inégalité par a, et ceux de la première par d. De là on tire

$$ac > bd.$$

2° Si a et d sont négatifs, les mêmes multiplications renversent les sens des inégalités (*Th. I*) et on a :

$$ac < ad,$$
$$ad < bd,$$

d'où

$$ac < bd.$$

Corollaire. — *Lorsque les deux membres d'une inégalité sont de même signe :*

1° *Si le signe commun est le signe* (+), *on obtient, en élevant les deux membres au carré, une inégalité de même sens ;*

2° *Si le signe commun est le signe* (—), *on obtient, en élevant les deux membres au carré, une inégalité de sens contraire.*

Car élever au carré les deux membres de l'inégalité

$$a > b$$

c'est faire le produit, membre à membre, des deux inégalités

$$a > b,$$
$$a > b,$$

et, alors, il suffit d'appliquer le théorème précédent.

Exemples :

$$4 > -3,$$
$$5 > +2;$$

donc

$$20 > -6.$$

De même,

$$-2 > -5,$$
$$4 > -1$$

et, en multipliant membre à membre et renversant le sens :

$$-8 < +5.$$

Remarque. — Il faut remarquer qu'il n'y a que dans les cas du théorème précédent qu'on peut dire d'avance le sens de l'inégalité obtenue en multipliant deux inégalités de même sens membre à membre. Dans les cas où le premier membre de chacune des inégalités est de signe contraire au second membre de l'autre, on ne peut rien affirmer, *a priori*.

Soit, par exemple,

$$4 > 3,$$
$$-2 > -3;$$

on a, en multipliant :

$$-8 > -9.$$

Soit encore :

$$2 > 1,$$
$$-1 > -2;$$

le produit membre à membre donne :

$$-2 = -2.$$

Enfin, soit :

$$5 > 2,$$
$$-1 > -2;$$

le produit membre à membre donne :

$$-5 < -4.$$

Ainsi, tous les cas possibles pourront se présenter.

Les produits membres à membres sont dans le même sens d'inégalité, en sens contraires ou égaux, suivant les cas.

Théorème III — *Si on a l'inégalité*

$$a > b;$$

1° *Si* a *et* b *sont de même signe, on a* :

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b};$$

2° *Si* a *et* b *sont de signes contraires, on a* :

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

En effet, 1° Si a et b sont de même signe, le produit ab est positif et, de l'inégalité

$$a > b,$$

on conclut

$$\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$$

ou

$$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

2° Si a et b sont de signes contraires, le produit ab est négatif, et on a, en divisant l'inégalité

$$a > b$$

par ab,
$$\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$$

ou
$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Exemples :

$$-2 > -3, \quad -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3};$$
$$2 > -5, \quad \frac{1}{2} > -\frac{1}{5};$$
$$-3 < 1, \quad -\frac{1}{3} < 1.$$

Remarque. — En combinant ce théorème avec le précédent, on pourra en conclure des cas où on pourra affirmer ce qui arrive lorsqu'on divise des inégalités de sens contraires membre à membre.

Si
$$a > b,$$
$$c < d,$$

et si c et d *sont de même signe et non nuls* ;

1° Si a et d *sont positifs*, on a :

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d};$$

2° Si a et d *sont négatifs*, on a :

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$$

Car, c et d étant de même signe, on a :

$$\frac{1}{c} > \frac{1}{d};$$

en multipliant membre à membre

$$a > b \quad \text{et} \quad \frac{1}{c} > \frac{1}{d},$$

on arrive aux résultats annoncés.

Dans d'autres cas, on ne pourrait encore rien affirmer.

Théorème IV. — *Étant données plusieurs fractions, ayant des dénominateurs tous de même signe, la fraction qui a pour numérateur la somme des numérateurs et pour dénominateur la somme des dénominateurs est comprise entre la plus grande et la plus petite de ces fractions.*

Soient $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}$ des fractions. b, b', b'' et b''' étant de même signe, on a :

$$q < \frac{a + a' + a'' + a'''}{b + b' + b'' + b'''} < p$$

p désignant la plus grande de ces fractions et q la plus petite.

En effet, on a, par hypothèse,

$$q \leqslant \frac{a}{b} \leqslant p, \quad q \leqslant \frac{a'}{b'} \leqslant p, \quad q \leqslant \frac{a''}{b''} \leqslant p, \quad q \leqslant \frac{a'''}{b'''} \leqslant p.$$

Supposons d'abord b, b', b'' et b''' positifs. On a, alors,

$$\begin{aligned} bq &\leqslant a \leqslant bp, \\ b'q &\leqslant a' \leqslant b'p, \\ b''q &\leqslant a'' \leqslant b''p, \\ b'''q &\leqslant a''' \leqslant b'''p. \end{aligned}$$

D'où, en ajoutant ces inégalités membre à membre (n° 13),

$$bq + b'q + b''q + b'''q \leqslant a + a' + a'' + a''' \leqslant bp + b'p + b''p + b'''p$$

ou

$$(b + b' + b'' + b''')q \leqslant a + a' + a'' + a''' \leqslant (b + b' + b'' + b''')p.$$

Or, $b + b' + b'' + b'''$ étant positif, on a, en divisant les trois membres par ce nombre,

$$q \leqslant \frac{a + a' + a'' + a'''}{b + b' + b'' + b'''} \leqslant p.$$

Supposons, en second lieu, b, b', b'' et b''' négatifs. On a alors,

$$\begin{aligned} bq &\geqslant a \geqslant bp, \\ b'q &\geqslant a' \geqslant b'p, \\ b''q &\geqslant a'' \geqslant b''p, \\ b'''q &\geqslant a''' \geqslant b'''p, \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant,

$$(b + b' + b'' + b''')\,q \geqslant a + a' + a'' + a''' \geqslant (b + b' + b'' + b''')\,p.$$

Or, comme $b + b' + b'' + b'''$ est *négatif*, on en conclut, encore :

$$q \leqslant \frac{a + a' + a'' + a'''}{b + b' + b'' + b'''} \leqslant p.$$

Le théorème est donc vrai dans tous les cas où b, b', b'' et b''' sont de même signe.

Exemples : Soient les fractions :

$$\frac{-1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{-5}{6},\ \frac{3}{4},\ \frac{-4}{25};$$

on a :

$$\frac{-5}{6} < \frac{-1 + 1 - 5 + 3 - 4}{2 + 3 + 6 + 4 + 25} < \frac{3}{4}.$$

De même, soient les fractions :

$$\frac{1}{-3},\ \frac{-3}{-7},\ \frac{4}{-5},\ \frac{-6}{-15},\ \frac{-1}{-8};$$

on a :

$$\frac{4}{-5} < \frac{1 - 3 + 4 - 6 - 1}{-3 - 7 - 5 - 15 - 8} < \frac{-3}{-7}.$$

EXERCICES

1. Ranger les nombres

$$-1,\quad +4,\quad -\frac{3}{2},\quad -\frac{1}{6},\quad +20,\quad -7,\quad -\sqrt{2},\quad +\sqrt{3}$$

par ordre de grandeur croissante.

2. Effectuer les produits

$$\left(-4+5-\frac{3}{2}+1\right)\left(3-6+2-\frac{1}{2}\right),$$
$$\left(7-3+\frac{25}{3}-8\right)\left(1-3+9-\frac{1}{5}\right),$$

$$(a+b+c)\,(a+b-c),$$
$$(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c),$$
$$(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(b+c-a),$$
$$(a+b)^3 = (a+b)\,(a+b)\,(a+b)$$

par la règle du produit de deux sommes (n° 20, *Th.* II).

3. Effectuer les opérations numériques suivantes :

$$\frac{\left(1-3+\frac{1}{2}-5\right)(5-7+1)}{\left(3-2+\frac{1}{3}\right)},$$

$$\frac{(3+5-6+7)\left(\frac{1}{2}-8-\frac{1}{3}\right)-(4-5+1)(-3+2)}{25-6+3-2}.$$

4. a et b étant deux nombres quelconques, leur demi-somme

$$m=\frac{a+b}{2}$$

est ce qu'on appelle leur *moyenne arithmétique*.

La quantité h telle que l'on ait

$$\frac{2}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

c'est-à-dire, telle que son inverse soit la moyenne arithmétique des inverses des deux nombres a et b, est ce qu'on appelle la *moyenne harmonique* des nombres a et b.

Enfin, lorsque les deux nombres a et b sont positifs, on appelle *moyenne géométrique* de ces deux nombres, la racine carrée arithmétique de leur produit :

$$g=\sqrt{ab}.$$

Ceci posé, on propose de montrer que, a et b étant *positifs*,

1° Si $$a=b,$$
l'on a : $$m=g=h=a=b;$$
2° Si $$a\neq b,$$
l'on a : $$m>g>h.$$

5. On peut définir les nombres négatifs de la façon suivante, due à M. Weierstrass (¹).

Soient A et B deux nombres arithmétiques. On appelle nombre algébrique l'ensemble de ces deux nombres pris dans un certain ordre : par exemple, A le premier, B le second. Représentons le nombre algébrique ainsi défini par le symbole

$$(A, B).$$

Cette nouvelle classe de nombres sera parfaitement définie si on définit l'égalité, l'addition et le produit de deux de ces nombres.

1° On aura, par définition,

$$(A, B)=(A', B')$$

si $$A+B'=A'+B.$$

On remarquera que ceci entraîne

$$(1, 1)=(0, 0)$$

(¹) Voir, à la fin de ce volume, la théorie analogue des nombres imaginaires dans l'*Appendice* I.

et qu'il y a une infinité de couples de nombres arithmétiques définissant le *même* nombre algébrique.

2° Par définition on aura, aussi,

$$(A, B) + (A', B') = (A + A', B + B')$$

et

$$(A, B) \times (A', B') = (AA' + BB', AB' + BA').$$

De ces définitions résulteront les définitions de la différence et du quotient de deux nombres algébriques. On vérifiera que les opérations ainsi définies jouissent des mêmes propriétés que les opérations arithmétiques. On verra, ensuite, que, sans introduire de contradiction, on pourra faire la convention

$$(A, 0) = A.$$

Tout nombre algébrique (A, B) s'écrira, alors,

$$(A, B) = (A, 0) + (0, B) = A + (0, B).$$

Les seuls nombres nouveaux à introduire seront les nombres de la forme

$$(0, A)$$

et, par la nouvelle convention de désigner le nombre (0, A) par le symbole — A, on sera ramené à la notation ordinaire des nombres négatifs.

CHAPITRE II

APPLICATIONS DES NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS : SEGMENTS, MOUVEMENT UNIFORME, EXPOSANTS NÉGATIFS

23. Segments. — Nous avons vu (n° 7) ce qu'il faut entendre par *mesure algébrique* d'un segment porté par un *axe* (sur lequel un sens positif a été choisi). Nous avons, en outre, démontré le théorème suivant : « *La mesure algébrique de la résultante de plusieurs segments est la somme des mesures algébriques de ces segments* ». Ce théorème va nous conduire au théorème fondamental de la théorie des segments, théorème connu sous le nom de théorème de *Chasles*, mais qu'il serait plus exact d'appeler théorème de *Moebius*.

Théorème (de *Chasles* ou de *Moebius*). — *Étant donnés plusieurs points sur un axe, la somme des mesures algébriques des segments parcourus par un mobile qui, en partant d'un de ces points, a passé successivement par tous les autres (dans un ordre quelconque) et est revenu au point de départ, est nulle :*

En d'autres termes,

Soient A, B, C, D, E *cinq points situés sur un axe, on a, entre les mesures algébriques des segments suivants, déterminés par ces points, la relation*

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA} = 0.$$

Car le segment *sg*AE est la résultante dès segments *sg*AB, *sg*BC, *sg*CD et *sg*DE. On a donc, en vertu du théorème que nous venons de rappeler,

$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}.$$

Ajoutons aux deux membres de cette égalité $\overline{EA}$, et en remarquant que

$$\overline{EA} + \overline{AE} = 0 \qquad \text{(n° 7, } \textit{Remarque}\text{)},$$

il vient :

$$0 = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}.$$

Remarque. — Ce théorème très important s'applique fréquemment pour trois points. Soient O, A, B trois points, on a la relation

$$\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BO} = 0,$$

d'où on peut tirer

$$\overline{AB} = -\overline{BO} - \overline{OA}.$$

Or, en remarquant que

$$-\overline{BO} = \overline{OB},$$

ceci s'écrit :

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}, \qquad (1)$$

qui est une forme très usitée de la relation.

Définition. — Étant donné un *axe x'x* (*fig.* 8) sur lequel le sens positif est celui de x' vers x, nous avons déjà vu qu'on peut fixer la

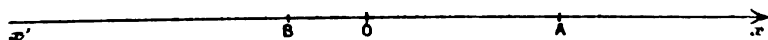


Fig. 8.

position d'un point quelconque A de cet axe de la façon suivante (n° 12, *Remarque*) : Soit O un point fixe de cet axe appelé *origine des abcisses*, le point A sera parfaitement déterminé si on connaît la

mesure algébrique $\overline{OA}$ du segment *sg*OA. Car, à tout point A, correspond un nombre tel que $\overline{OA}$ et, réciproquement, étant donné un nombre a, il existe un point A et un seul tel que $\overline{OA} = a$. Ce point est obtenu en portant, à partir du point O, une longueur OA égale à la valeur absolue de a dans le sens $x'x$ ou dans le sens contraire suivant que a est positif ou négatif. Le nombre $\overline{OA}$ qui définit ainsi la position du point A est ce qu'on appelle l'*abcisse* du point A.

La formule de Chasles relative à trois points, mise sous la forme (1), donne immédiatement la valeur de $\overline{AB}$ connaissant les abcisses des deux points A et B. Puisqu'on a :

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}, \tag{1}$$

soit a l'abcisse de A et b l'abcisse de B, on a

$$\overline{AB} = b - a.$$

En d'autres termes, « *la mesure algébrique d'un segment est égale à l'excès de l'abcisse de l'extrémité sur l'abcisse de l'origine.* »

Cette relation importante, qui est vraie *quelles que soient les positions relatives* des points O, A et B, aura de nombreuses applications dans la suite (¹).

24. Mouvement uniforme. — On dit qu'un mobile, qui se déplace sur un axe, est animé d'un *mouvement uniforme* lorsque les longueurs parcourues par le mobile dans des intervalles de temps égaux sont égales, quelle que soit la valeur commune de ces intervalles de temps.

On appelle *vitesse* v du mobile le *segment* parcouru pendant l'unité de temps. v est, alors, un nombre positif ou négatif suivant que le mobile se meut dans le sens positif ou dans le sens négatif de l'axe.

Le temps, comme nous l'avons déjà dit (nº 4), peut être compté dans deux sens différents suivant qu'il est futur ou passé. Nous considérerons un *intervalle* de temps t comme positif ou comme négatif suivant qu'il est compté vers l'avenir ou vers le passé. En réalité, le temps ne *s'écoule* que dans un sens, vers l'avenir, et on ne peut pas *remonter* le cours du temps. Mais, ce qui n'est pas possible dans la réalité, est possible par la pensée et on peut toujours imaginer

(1) Dorénavant, pour abréger le langage, nous supprimerons le mot *mesure algébrique* du segment et nous dirons simplement *le segment* en sous-entendant qu'il s'agit du nombre qui est la mesure algébrique de ce segment. Ainsi, nous dirons « le segment $\overline{AB}$ » au lieu de dire « la mesure algébrique $\overline{AB}$ du segment *sg*AB ».

une suite ininterrompue d'instants remontant dans le passé. Ainsi, lorsque nous parlerons d'un intervalle de temps t négatif, nous imaginerons qu'on remonte, par la pensée, vers le passé, tous les instants qui constituent cet intervalle.

Le problème le plus simple du mouvement uniforme est le suivant : « *Quel est le chemin parcouru par un mobile, qui se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme, pendant un intervalle de temps* t, *avec une vitesse* v ? »

Soit e le *segment* parcouru par le mobile, on a la relation

$$e = vt \tag{1}$$

qui est ce qu'on appelle la *formule du mouvement uniforme.* Pour démontrer cette formule, nous remarquerons, d'abord, qu'elle est vraie en valeur absolue. Car, soient E, V, T les valeurs absolues de e, v, t, d'après les principes des règles de trois, puisque dans l'unité de temps le mobile parcourut le chemin V, dans le temps T il parcourra le chemin $V \times T$. On a donc

$$E = V \times T$$

et la relation est vraie en valeur absolue. Il reste à montrer qu'elle est vraie en signe.

Supposons, d'abord, que le mobile se déplace dans le sens positif : v sera positif et vt sera positif ou négatif suivant que t sera positif ou négatif. Or, si t est positif, le temps s'écoule vers l'avenir et le mobile marche comme dans la réalité et va dans le sens positif, donc e est positif. Si t est négatif, il faut imaginer que, par la pensée, on suive les diverses positions du mobile pour une suite d'instants remontant dans le passé. Comme, en réalité, le mobile va dans le sens positif, un mobile remontant en sens inverse les positions par lesquelles le mobile a passé irait dans le sens négatif; donc e est négatif. Ainsi, dans ce cas, e et vt sont de même signe.

Supposons, en second lieu, que le mobile se déplace dans le sens négatif : v sera négatif et vt sera négatif ou positif suivant que t sera positif ou négatif. Or, si t est positif, le temps étant compté vers l'avenir, le mobile se déplace *réellement* et va, d'après l'hypothèse, dans le sens négatif, donc e est négatif. Si t est négatif, il faut, comme précédemment, imaginer, par la pensée, que l'on suive une suite de positions occupées par le mobile dans une suite d'instants remontant vers le passé. Le mobile remontera ainsi, dans la pensée, une suite de positions occupées et, puisqu'en réalité il marche dans le sens négatif, cette suite inverse de positions sera dirigée dans le sens

positif; donc e est positif. Dans ce second cas, e est encore du signe de vt et la formule (1) est exacte.

On appelle, d'une manière générale, *formule* une égalité qui indique à quels calculs il faut soumettre certaines *données* d'un problème pour obtenir le *résultat*. Une *formule* renferme en elle une *solution générale* de toutes les questions de même nature. Tandis, qu'en arithmétique, nous sommes forcés de faire pour chaque problème un raisonnement spécial nous conduisant au résultat, l'introduction des nombres algébriques nous permettra souvent, en algèbre, de représenter les données par des lettres et de trouver une *formule* telle qu'il n'y ait plus qu'à substituer dans cette formule les valeurs numériques des données aux lettres pour avoir le résultat. Dans le cas présent, la formule du mouvement uniforme

$$e = vt$$

exprime tout simplement ce fait qu'*on obtient le segment parcouru par un mobile, d'un mouvement uniforme, pendant un intervalle de temps donné, en faisant le produit de la vitesse par cet intervalle de temps.*

Ainsi, un courrier a marché pendant quatre heures $\frac{1}{4}$ à la vitesse de 12 kilomètres à l'heure, on a :

$$t = 4,25, \ v = 12, \qquad \text{donc} \qquad e = 12 \times 4,25.$$

Il a donc parcouru $12 \times 4,25 = 51$ *kilomètres*.

Si le même courrier marche, ensuite, en sens inverse, à 13 kilomètres à l'heure, pendant 3 heures, on a :

$$t = 3, \ v = -13, \qquad \text{donc} \qquad e = (-13) \times 3 = -39,$$

ce qui indique qu'il a parcouru, *en sens inverse* (à cause du signe —), 39 *kilomètres*.

De la formule fondamentale (1), on peut tirer deux autres formules qui ne sont que des formes différentes de cette même formule et qui donnent la solution générale de deux autres problèmes sur le mouvement uniforme.

De la formule (1) on tire, d'abord,

$$t = \frac{e}{v} \qquad (2).$$

Cette formule (2) exprime ce fait que « *le temps qu'il faut à un*

mobile pour parcourir un segment donné e, *d'un mouvement uniforme, à la vitesse* v, *est égal au quotient de* e *par* v ».

Cette formule nous permet de résoudre les problèmes du type suivant : « Quel temps faut-il à un courrier pour faire un trajet de 45 kilomètres à la vitesse de 12 kilomètres à l'heure? »

Ici : $e = 45$, $v = 12$; donc $t = \frac{45}{12} = \frac{15}{4} = 3{,}75$.

Il faudra donc au courrier 3 heures $\frac{3}{4}$.

Enfin, de la formule (1), on tire :

$$v = \frac{e}{t} \qquad (3).$$

Ce qui exprime que « *la vitesse avec laquelle un mobile doit parcourir un segment* e, *d'un mouvement uniforme, pour que le temps nécessaire à ce parcours soit* t, *est égale au quotient de* e *par* t ».

Nous pourrons, par cette formule (3), résoudre tous les problèmes du même genre que celui-ci : « Quelle doit être la vitesse d'un bicycliste pour qu'il puisse parcourir 200 kilomètres en 6 heures? » Ici, $e = 200$ (en prenant pour sens positif le sens de la marche du bicycliste) et $t = 6$, donc $v = \frac{200}{6} = 33{,}333$. Cette vitesse doit donc être de 33 *kilomètres* 333 *mètres* à l'heure.

Les trois formules (1), (2) et (3) qui, au fond, ne forment qu'une seule et même formule, nous permettent ainsi de résoudre, sans raisonnement nouveau, par une simple application numérique qui se fait d'une façon presque mécanique, tous les problèmes élémentaires que l'on peut poser sur le mouvement uniforme.

25. Le Temps. — Pour définir un instant, nous choisissons, comme nous l'avons déjà expliqué (n° 4), un instant initial que nous appelons *origine des temps*.

Tout autre instant sera parfaitement déterminé, par rapport à celui-ci, si l'on donne l'intervalle de temps t qui le sépare de l'origine des temps, cet intervalle étant compté positivement dans l'avenir et négativement dans le passé. Lorsque nous dirons *l'instant* t ou encore *le temps* t, nous désignerons, par là, l'instant qui est séparé de l'origine des temps de l'intervalle t.

Dans la chronologie de l'histoire, on prend comme origine des temps la date supposée de la naissance de Jésus-Christ et comme unité de temps l'*année*.

Un fait historique est alors précisé par sa *date*, c'est-à-dire par le nombre d'années qui le sépare de l'origine des temps. Avec notre convention, pour distinguer les faits passés avant ou après Jésus-Christ, on fera précéder les dates du signe $-$ ou $+$. Ainsi, on dira : Charlemagne fut couronné en l'an $+ 800$, l'Amérique fut découverte par Christophe Colomb en l'an $+ 1492$, la bataille de Marathon eut lieu en l'an $- 490$.

Théorème. — *Étant donnés deux instants* t *et* t', *l'intervalle de temps depuis l'instant* t' *jusqu'à l'instant* t *est égal à* $t - t'$. (*En convenant, comme toujours, de regarder un intervalle de temps comme positif ou négatif suivant qu'il est dirigé vers l'avenir ou vers le passé.*)

Pour démontrer cette propositition, imaginons un mobile se déplaçant dans le sens positif sur un axe $x'x$ avec une vitesse égale à $+ 1$. Dans ce cas particulier, la formule $e = vt$, puisque $v = 1$, donne $e = t$, ce qui prouve que les segments parcourus par ce mobile ont même mesure algébrique que les intervalles de temps employés à les parcourir. Cela étant, soit ω la position du mobile à l'origine des temps, α sa position au temps t et β sa position au temps t'. Le segment $\overline{\omega\alpha}$ a été parcouru dans le temps t, donc $\overline{\omega\alpha} = t$, de même $\overline{\omega\beta} = t'$. Dans l'intervalle de temps depuis l'instant t' jusqu'à l'instant t, le mobile a été de β en α et a donc parcouru le segment $\beta\alpha$, par suite, l'intervalle de *temps* de t' jusqu'en t a même mesure que $\beta\alpha$.

Or, d'après le théorème de Chasles (n° 23)

$$\overline{\beta\alpha} = \overline{\omega\alpha} - \overline{\omega\beta} = t - t'.$$

Donc cet intervalle de temps est égal à $t - t'$.

Exemples. — En reprenant les exemples tirés de la chronologie de l'histoire, on peut faire aisément des calculs d'intervalles de temps avec la convention que nous avons admise.

Alexandre le Grand est né en l'an $- 356$ et mort en l'an $- 323$, il a donc vécu

$$(- 323) - (- 356) = 356 - 323 = 33 \textit{ ans}.$$

L'empereur romain Auguste naquit en l'an $- 63$ et mourut en l'an $+ 14$, il a donc vécu

$$(+ 14) - (- 63) = 14 + 63 = 77 \textit{ ans}.$$

Formule générale du mouvement uniforme. — La formule $e = vt$ que nous avons établie, nous donne le segment parcouru par le mobile dans un intervalle de temps donné. Par conséquent, si on connaît la position du mobile au commencement de l'intervalle de temps (c'est-à-dire l'origine du segment e), la formule nous permettra de connaître la position finale du mobile à la fin de l'intervalle de temps t (c'est-à-dire l'extrémité du segment). Cette formule ne fournit donc pas la position du mobile à chaque instant, mais la distance qu'il a parcourue dans un temps donné en partant d'un point *qui n'est pas fixé*. De cette formule on peut en tirer facilement une autre qui nous donnera à chaque instant *la position* du mobile.

Considérons un mobile se mouvant sur un axe. Nous compterons le temps à partir d'une origine arbitraire, mais fixée une fois pour toutes, comme nous venons de l'expliquer.

Pour fixer la position du mobile sur l'axe, nous choisissons sur cet axe un point fixe O *comme origine des abcisses* et nous prendrons *l'abcisse* (n° 23) du mobile à chaque instant. Le problème le plus général du mouvement uniforme est alors le suivant :

« *Un mobile parcourt un axe, d'un mouvement uniforme, avec une vitesse* v. *Au temps* t_0 *il était en un point d'abcisse* x_0. *Quelle sera l'abcisse* x *de sa position au temps* t ? »

Soit M la position du mobile au temps t, M_0 sa position au temps t_0. Dans l'intervalle de temps de t_0 à t, qui est égal, comme nous venons de le voir, à $t - t_0$, le mobile aura parcouru le segment $\overline{M_0M}$. On aura donc, en appliquant la formule du mouvement uniforme,

$$\overline{M_0M} = v(t - t_0).$$

Or, x_0 et x étant les abcisses des points M_0 et M, on a (n° 23) :

$$\overline{M_0M} = x - x_0.$$

Donc :

$$x - x_0 = v(t - t_0),$$

ou, en ajoutant x_0 aux deux membres de cette égalité,

$$x = x_0 + v(t - t_0). \qquad (4)$$

C'est la *formule générale du mouvement uniforme. Pour chaque instant* t, *elle donne la valeur de l'abcisse* x *du mobile.* Cette formule nous permettra donc de connaître, à chaque instant, la position du mobile.

EXEMPLE I. — *Un train part de Paris à midi 45 minutes et marche avec la vitesse de 58 kilomètres à l'heure.*

Prenons pour origine du temps midi du jour du départ et pour origine des abcisses Paris. On a : $x_0 = 0$, $t_0 = 0{,}^h75$ (l'unité de temps étant l'heure), $v = +58$ (l'unité de longueur étant le kilomètre). On a donc, pour ce train :

$$x = 58\ (t - 0{,}75).$$

Cette formule nous permet de connaître la position du train à chaque instant. Ainsi,

à $2^h 30^m$: $t = 2{,}5$, $x = 58\ (2{,}5 - 0{,}75) = 101{,}5$;

à $3^h 15^m$: $t = 3{,}25$, $x = 58\ (3{,}25 - 0\ 75) = 145$;

à 4^h : $t = 4$, $x = 58\ (4 - 0{,}75) = 188{,}5$.

Donc, à $2^h\ 30^m$, le train était à 101 kilomètres 500 mètres de Paris; à $3^h\ 15^m$, à 145 kilomètres et, à 4^h, à 188 kilomètres 500 mètres.

EXEMPLE II. — *Un bicycliste, faisant la route de Strasbourg à Bordeaux par Paris, marchant à la vitesse de 23 kilomètres à l'heure, a passé à Poitiers* (338 *kilomètres de Paris*) *le* 15 *juillet* 1894, *à* $2^h\ 30^m$ *de l'après-midi.*

Prenons pour origine des abcisses Paris et pour sens positif des abcisses le sens de marche du bicycliste. Prenons pour origine des temps minuit dans la nuit du 14 au 15 juillet. L'unité de temps est l'heure et l'unité de longueur le kilomètre.

On a, alors : $v = 23$, $x_0 = 328$, $t_0 = 14{,}5$;

donc, la formule de marche du bicycliste est :

$$x = 328 + 23\ (t - 14{,}5).$$

Le 15 juillet, à 4^h du soir, $t = 16$, donc :

$$x = 328 + 23\ (16 - 14{,}5) = 328 + 23 \times 1{,}5 = 362{,}5;$$

le bicycliste était à 362 kilomètres 500 mètres *après* Paris.

Le 15 juillet, à midi, $t = 12$, donc :

$$x = 328 + 23\ (12 - 14{,}5) = 328 -, 34 \times 2{,}5 = 260{,}5;$$

il se trouvait à 260 kilomètres 500 mètres *après* Paris.

A minuit, dans la nuit du 14 au 15 juillet, $t = 0$, donc :

$$x = 328 + 23\ (-14{,}5) = 328 - 23 \times 14{,}5 = -5{,}5;$$

il se trouvait à 5 kilomètres 500 mètres *avant* Paris, puisque l'abcisse trouvée est précédée du signe —.

A 10 heures du soir, le 14 juillet, $t = -2$, donc :

$$x = 328 + 23\ (-2 - 14{,}5) = 328 - 23 \times 16{,}5 = -51{,}5;$$

le bicycliste était à 51 kilomètres 500 mètres *avant* Paris.

On peut calculer, de la sorte, toutes les positions du bicycliste.

— De la formule (4) on pourrait tirer deux autres formules, de même que, de la formule (1) du n° 24, nous avons tiré les formules (2) et (3).

On a, en effet, $x - x_0 = v(t - t_0)$;

on en conclut, par la définition même du quotient, que :

$$t - t_0 = \frac{x - x_0}{v},$$

d'où, en ajoutant t_0 aux deux membres de cette égalité,

$$t = t_0 + \left(\frac{x - x_0}{v}\right) \qquad (5).$$

Cette formule (5) fournit *l'instant* t *auquel le mobile a passé au point d'abcisse* x.

Ainsi, en reprenant l'*Exemple II* précédent, on a :

$$t = 14{,}5 + \left(\frac{x - 328}{23}\right)$$

et cette nouvelle forme de la formule va nous permettre *de déterminer les heures auxquelles le bicycliste a passé en des points déterminés.*

A Strasbourg, 453 kilomètres avant Paris, $x = -453$, donc :

$$t = 14{,}5 + \left(\frac{-453 - 328}{23}\right) = 14{,}5 - \frac{781}{23} = -19{,}45;$$

le bicycliste est donc parti de Strasbourg 19,45 heures avant minuit du 14 juillet, c'est-à-dire à 6 heures 33 minutes du matin, le 14 juillet.

A Paris, $x = 0$, donc :

$$t = 14{,}5 + \left(\frac{-328}{23}\right) = 14{,}5 - \frac{328}{23} = 0{,}24;$$

il a passé à Paris le 15 juillet à minuit, 14 minutes, 24 secondes.

A Bordeaux, 575 kilomètres après Paris, $x = 575$, donc :

$$t = 14{,}5 + \left(\frac{575 - 328}{23}\right) = 14{,}5 + \frac{247}{23} = 25{,}23;$$

il est donc arrivé à Bordeaux 25,23 heures après minuit du 14 au 15 juillet, c'est-à-dire qu'il est arrivé le 16 juillet à 1 heure, 13 minutes, 48 secondes du matin.

— Enfin, l'égalité

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

prouve aussi que :

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} \qquad (6);$$

formule qui *donne la vitesse que doit avoir un mobile pour passer au temps* t_0 *au point d'abcisse* x_0 *et au temps* t *au point d'abcisse* x.

Exemple. — *Un train allant de Paris à Marseille a passé à* $2^h\,44^m$ *à Dijon et à* $5^h\,41^m$ *à Lyon. La distance de Paris à Dijon est de* 315 *kilomètres et de Paris à Lyon de* 507 *kilomètres. Quelle était la vitesse du train?*

Prenons Paris pour origine des abcisses et midi pour origine du temps.

A Dijon, $x_0 = 315,\quad t_0 = 2,73;$

à Lyon, $x = 507,\quad t = 5,68;$

donc la vitesse v est donnée par la formule :

$$v = \frac{507 - 315}{5,68 - 2,73} = \frac{192}{2,95} = 65,08.$$

La vitesse du train était donc de 65 kilomètres, 80 mètres, à l'heure.

26. Doit et Avoir. — Comme nouvelle application, nous montrerons comment l'usage des nombres positifs et négatifs peut simplifier l'évaluation du *bilan* d'un commerçant.

Supposons qu'on considère comme *positives* toutes les sommes *perçues* ou *à percevoir* et qu'on considère comme *négatives* les sommes que le commerçant *a payées* ou qu'il *devra payer*. Nous allons établir, qu'avec cette convention, le *bilan* du commerçant est la *somme algébrique* de toutes les sommes perçues ou payées.

Considérons, d'abord, deux opérations consécutives et le résultat de ces deux opérations : 1° Si les deux opérations sont deux *encaissements*, le commerçant aura *reçu* une somme d'argent égale à la somme des deux encaissements. Le résultat sera donc bien le nombre positif qui est la somme des deux nombres positifs représentant les sommes encaissées.

2° Si les deux opérations sont deux *paiements*, le commerçant aura, en tout, fait un paiement égal à la somme des deux paiements partiels. Son bilan, au bout des deux opérations, est donc le nombre négatif qui est la somme des deux nombres négatifs représentant les paiements.

3° Si l'une des opérations est une recette et l'autre un paiement. Si la recette est égale au paiement, le bilan est *nul* et, effectivement, la somme du nombre positif représentant la recette et du nombre

négatif représentant le paiement est 0. Si la recette surpasse le paiement, le bilan sera un encaissement égal à l'excès de la recette sur le paiement. Ce sera donc un nombre positif égal à la différence des valeurs absolues des deux nombres représentant la recette et le paiement. C'est donc bien la somme algébrique de ces deux nombres. Enfin, si le paiement dépasse la recette, le bilan des deux opérations sera un débours égal à l'excès du paiement sur la recette. Le bilan sera un nombre négatif ayant pour valeur absolue l'excès de la valeur absolue du nombre négatif qui représente le paiement sur la valeur absolue du nombre positif qui représente la recette. Ce nombre négatif est bien la somme algébrique de ce nombre positif et du nombre négatif.

Donc, dans tous les cas, si on désigne par a et b le nombre de francs positifs ou négatifs, reçus ou payés à chaque opération, le bilan de deux opérations successives est $a + b$.

Le bilan de trois opérations a, b, c sera $(a + b) + c$ ou $a + b + c$ et ainsi de suite.

D'une manière générale, si un commerçant a payé ou reçu successivement a, b, c, d, e francs (négatifs ou positifs), le bilan de ces cinq opérations sera $a + b + c + d + e$.

Exemple. — Un commerçant pourrait donc établir son compte de la façon suivante :

Reçu de X	+ 415f,50
Payé à la maison de produits chimiques	— 792f,15
Acheté, en timbres-poste	— 25f,00
Reçu le paiement de la facture n° 137	+ 1375f,65
Contributions et patente	— 531f,15
Payé : mémoire d'architecte	— 841f,75
Bilan	+ 1791f,15
	— 2190f,05
Soit	— 398f,90

Le commerçant a donc, *en tout*, *payé* 398f,90 puisque le total est un nombre de francs *négatif*.

Pour faire la somme algébrique nous avons, en suivant la règle établie (n° 8), fait la somme des nombres positifs, la somme des nombres négatifs, puis ajouté ces deux sommes.

Dans la pratique, on ne dispose pas l'opération comme nous l'avons fait, mais on s'arrange de façon à faciliter les deux additions partielles des nombres positifs et négatifs. On inscrit sur une page les recettes et sur la page, en regard, les dépenses. On additionne séparément les dépenses et les recettes et on fait la différence entre les deux sommes qu'on inscrit du

côté des recettes (nombres positifs) ou du côté des dépenses (nombres négatifs), suivant que les recettes surpassent les dépenses ou réciproquement. — C'est ce qu'on appelle faire *la balance*. On voit donc, qu'au fond, un commerçant qui fait la *balance* de son *Livre*, ne fait autre chose qu'une somme algébrique d'après la règle du n° 8; mais, au lieu de distinguer les recettes et les dépenses par les signes + ou —, il les distingue par les pages sur lesquelles il les inscrit : *page de droite* ou *page de gauche*.

27. Exposants négatifs. — Nous avons vu (n° 19) que, lorsque $m > p$, on a l'égalité

$$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}.$$

Cette règle ne s'applique que pour $m > p$. Pour $m < p$ elle n'aurait plus aucun sens, car $m - p$ serait négatif ou du moins elle n'aura un sens que si nous *convenons* de lui en donner un. Si donc, *par convention*, on admet que a^{m-p} représentent $\frac{a^m}{a^p}$ lorsque $m - p < 0$ on arrive à la conclusion que l'on doit avoir

$$a^{m-p} = \frac{1}{a^{p-m}};$$

car nous avons vu (n° 19) que, lorsque $m < p$,

$$\frac{a^m}{a^p} = \frac{1}{a^{p-m}}.$$

L'extension de la règle du quotient de deux puissances nous conduit ainsi à la conception de puissances négatives et à la définition suivante :

Définition. — *m étant un nombre arithmétique tel que a^m ait un sens, on désigne par a^{-m} l'inverse de a^m.*

La puissance zéro d'un nombre quelconque, autre que zéro, est 1.

Donc, par définition,

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \qquad a^0 = 1.$$

Lorsque a est un nombre *positif*, a^m est défini, en arithmétique, m étant un nombre *quelconque entier* ou *fractionnaire* (même incommensurable), a^{-m} est alors défini pour m entier ou fractionnaire.

Ainsi,
$$5^{-3} = \frac{1}{5^3}, \quad 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2},$$
$$3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}, \quad 3^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}.$$

Lorsque a est un nombre négatif, a^m n'est défini que pour m *entier* et, par suite, a^{-m} n'est aussi défini que pour m *entier*.

Ainsi,
$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3}, \quad (-4)^{-7} = \frac{1}{(-4)^7}, \quad (-3)^0 = 1.$$

— Les puissances négatives jouissent des mêmes propriétés que les puissances positives, c'est ce que nous allons montrer.

Théorème I. — m *désignant un nombre positif ou négatif, on a l'égalité :*

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Lorsque m est *positif*, cette égalité *résulte de la définition* même des exposants négatifs. Il n'y a donc lieu de la démontrer que dans le cas où m est négatif. Soit m' la valeur absolue de m ($m = -m'$),

on a :
$$a^{-m} = a^{m'};$$

d'autre part, on a aussi :
$$\frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^{-m'}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)} = 1 \times a^{m'} = a^{m'}.$$

Donc,
$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Théorème II. — *Le produit de deux puissances (positives ou négatives) d'un même nombre est une puissance de ce nombre ayant pour exposant la somme algébrique des exposants des deux facteurs.*

Je dis que
$$a^m . a^p = a^{m+p}.$$

Le théorème est vrai, comme nous le savons (n° 19), lorsque m et p sont positifs, il faut donc le démontrer lorsque l'un au moins de ces deux nombres est négatif.

2° Soit $m < 0$ et $p > 0$, $m = -m'$,

on a $$(a^m)^p = (a^{-m'})^p = \left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^p = \frac{1}{(a^{m'})^p} = \frac{1}{a^{m'p}} = a^{-m'p}.$$

Donc $$(a^m)^p = a^{(-m')p} = a^{mp}.$$

3° Soit $m < 0$ et $p < 0$, $m = -m'$, $p = -p'$, on a

$$(a^m)^p = (a^{-m'})^{-p'} = \left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{-p'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{p'}} = \frac{1}{\frac{1}{(a^{m'})^{p'}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{m'p'}}} = a^{m'p'}.$$

Donc :

$$(a^m)^p = a^{m'p'} = a^{(-m')(-p')} = a^{mp}.$$

4° Enfin, il reste à examiner les deux cas où l'un des deux exposants est *nul.*

Si l'un des deux est nul, le produit mp est nul et on a :

$$a^{mp} = a^0 = 1.$$

D'autre part, si $m = 0$,

$$(a^m)^p = (a^0)^p = (1)^p = 1.$$

Et si $p = 0$,

$$(a^m)^p = (a^m)^0 = 1.$$

Donc, dans les deux cas,

$$(a^m)^p = a^{mp},$$

puisque les deux membres sont égaux à 1.

Exemples :

$$(6^3)^{-2} = 6^{-6}, \quad \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2},$$

$$\left[(-5)^{-4}\right]^{-3} = (-5)^{12}, \quad \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^0 = \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 1.$$

EXERCICES

6. Étant donnés quatre points quelconques A, B, C, D, sur un *axe*, on a la relation segmentaire suivante

$$\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AC} \times \overline{DB} + \overline{AD} \times \overline{BC} = 0.$$

(Chasles.)

7. Étant donnés quatre points A, B, C, D, sur un axe, si on désigne par la notation

$$(AB,\ CD)$$

le quotient

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}},$$

montrer que :

1° Si on permute deux lettres d'un même groupe, le nouveau rapport est l'inverse du précédent :

$$(BA,\ CD) = \frac{1}{(AB,\ CD)}$$

ou

$$(AB,\ DC) = \frac{1}{(AB,\ CD)}.$$

2° Si on permute les deux groupes AB et CD le quotient ne change pas :

$$(CD,\ AB) = (AB,\ CD).$$

3° Si on pose

$$(AB,\ CD) = \rho,$$

on a :

$$(AC,\ DB) = \frac{1}{1-\rho}$$

et

$$(AD,\ BC) = \frac{\rho - 1}{\rho}.$$

De ce qui précède, on conclut que, si on considère les 24 quotients (AB, CD), (BA, CD), (BC, AD), etc..., obtenus en écrivant les lettres A, B, C, D dans tous les ordres possibles, ces 24 quotients sont égaux quatre par quatre. Il n'y en a donc que six différents. Si on désigne par ρ l'un de ces quotients, les valeurs des six quotients différents sont :

$$\rho, \quad \frac{1}{1-\rho}, \quad \frac{\rho-1}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho}, \quad 1-\rho, \quad \frac{\rho}{\rho-1}.$$

Pour que, parmi ces six quotients, en général différents, il y en ait deux égaux, il faut et il suffit que l'un au moins de ces quotients soit égal à (-1) ou à $(+1)$.

8. La distance de la terre au soleil est d'environ 38196000 lieues. On sait que la lumière met $8^m 13^s$ pour venir du soleil. Quelle est, en lieues, la vitesse de la lumière ?

9. Une personne dispose de a heures pour faire une promenade. Jusqu'à quelle distance pourra-t-elle se rendre sachant que sa voiture fera b kilomètres à l'heure à l'aller et c kilomètres à l'heure au retour, sans arrêt ?

(Todhunter).

10. Deux courriers M et N parcourent la ligne OB. Au départ, ils sont situés, respectivement, en A et B tels que

$$\overline{OA} = a, \quad \overline{OB} = b$$

(on prendra comme sens positif le sens de O vers B).

Les vitesses des deux courriers sont v et u.

Trouver des formules pour exprimer, au temps t, la distance

$$x = \overline{MN}$$

des deux courriers et l'abcisse y du milieu de la droite qui les joint (O étant l'origine des abcisses).

(J. BERTRAND).

11. On pose

$$x + x^{-1} = a;$$

montrer que l'on a :

$$x^2 + x^{-2} = a^2 - 2,$$
$$x^3 + x^{-3} = a^3 - 3a$$

et, d'une façon générale, si on désigne $x^n + x^{-n}$ par S_n, on a :

$$S_n = a\,S_{n-1} - S_{n-2}.$$

12. Montrer que, si à tout nombre entier, positif ou négatif, x, on fait correspondre un nombre y tel que, pour

$$x = 1, \quad \text{on ait :} \quad y = a$$

et que, si y' et y'' sont les valeurs de y qui correspondent aux valeurs x' et x'' de x, $y'y''$ soit la valeur de y qui correspond à la valeur $x' + x''$ de x (et cela quels que soient les nombres entiers x' et x''), on a, pour toute valeur entière de x,

$$y = a^x.$$

Pour démontrer cette proposition on fera, successivement,

$$x' = 1, \quad x'' = 1,$$
$$x' = 2, \quad x'' = 1,$$
$$x' = 3, \quad x'' = 1,$$

etc....

En faisant $x' = 1$, $x'' = 0$, on en conclura que la valeur de y qui correspond à la valeur 0, de x, est 1. Puis on fera, successivement,

$$x' = 1, \quad x'' = -1,$$
$$x' = 1, \quad x'' = -2,$$

etc....

CHAPITRE III

CLASSIFICATION DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES NOTION DE FONCTION

28. En algèbre, on fait usage de *lettres* pour désigner des nombres, usage que nous avons fait dans les chapitres précédents. On emploie de préférence de petites lettres en réservant les lettres majuscules pour désigner des nombres arithmétiques [1].

L'emploi des lettres donne au raisonnement une très grande généralité et de la simplicité. On arrive à des *formules*, comme nous en avons trouvé à propos du mouvement uniforme (n° 24), qui donnent la solution générale de tous les problèmes dont l'énoncé ne diffère que par les valeurs numériques des données.

Les lettres, représentant, comme nous venons de le dire, des *nombres connus* ou *à connaître*, *toutes les règles de calcul que nous avons établies pour les nombres algébriques et pour les opérations sur ces nombres, peuvent s'appliquer à ces lettres qui ne sont que des symboles représentant ces nombres.*

29. On appelle *expression algébrique* un ensemble de lettres et de nombres réunis par quelques-uns des signes des opérations. En d'autres termes, c'est l'*indication* d'un certain nombre d'opérations à effectuer sur des lettres et des nombres. Ainsi,

$$3a^4bc + \frac{a^3d}{b+c}, \quad \frac{2ad - ba(c+d)}{4a - 5b}$$

sont des *expressions algébriques.*

Une expression est *rationnelle* lorsqu'elle ne contient l'indication d'aucune extraction de racine *portant sur une partie littérale.* Dans le cas contraire elle est dite *irrationnelle.* Ainsi, dans une expression rationnelle peuvent figurer des extractions de racines de *nombres.*

(1) L'usage exclusif des lettres, pour désigner des nombres, remonte à *Viète* (1540-1603), géomètre français, qui, le premier, publia un petit traité ayant pour titre *Ad logisticen speciosam notæ priores*, dans lequel il désigna tous les nombres par des lettres. Avant Viète, les mathématiciens ne faisaient leurs opérations que sur des nombres; l'inconnue seule et ses puissances étaient représentées par des abréviations ou des signes. Ainsi l'inconnue à la première puissance était souvent représentée par le signe (1), à la deuxième puissance par (2), etc...

Les expressions :

$$\frac{3a^2bc}{d} + \frac{a-b}{cd}, \quad \frac{\sqrt[3]{2}\,ab}{3c} + \frac{2c - \sqrt[2]{3}\,d}{4}$$

sont *rationnelles*, car *aucune lettre* ne figure sous un radical. Au contraire, les expressions :

$$\sqrt[2]{a^2 - b^2}, \quad \frac{4x + \sqrt[3]{x^3 + y^3}}{\sqrt[2]{x^2 - y^2}}.$$

sont *irrationnelles*.

Comme on n'a défini ce qu'il faut entendre par racine $m^{ième}$ d'un nombre que pour les nombres arithmétiques ou positifs, nous supposerons, essentiellement, que dans toute expression irrationnelle on n'attribue aux lettres qui figurent sous les radicaux que des valeurs numériques telles que les quantités placées sous les radicaux soient *positives*.

Lorsqu'une expression *rationnelle* ne contient aucune lettre au dénominateur, elle est dite *entière*. Dans le cas contraire, elle est *fractionnaire*.

Les expressions

$$3a^3b + 4a^2b^2, \quad \frac{2}{5}xy^3 + \sqrt{3}\,x^4 - x\,(x^3 - y^3)$$

sont *entières*. Au contraire, les expressions

$$\frac{a+b}{a-b}, \quad \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

sont *fractionnaires*.

On appelle *valeur numérique* d'une expression algébrique le nombre que l'on obtient quand on remplace les lettres par les nombres qu'elles représentent et qu'on effectue les opérations indiquées par les signes. (Il est bien entendu qu'on suppose toujours que ces lettres ne représentent que des nombres tels que les opérations soient possibles, c'est-à-dire que les dénominateurs soient différents de zéro et que les quantités sous les radicaux soient positives.)

Par exemple, soit l'expression

$$4ab - \frac{a^3}{a-b},$$

sa *valeur numérique*, pour

$$a = 4,\ b = 3,$$

est

$$4 \times 4 \times 3 - \frac{4^3}{4-3} = -16.$$

On dit que deux expressions algébriques sont *équivalentes* lorsqu'elles ont même valeur numérique, quels que soient les nombres que représentent les lettres qu'elles contiennent.

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} a + b & \text{et} & b + a, \\ a + (b - c) & \text{et} & a + b - c, \\ a - (b - c) & \text{et} & a - b + c, \\ \dfrac{a^3 b}{a^2} & \text{et} & ab, \end{array}$$

sont des expressions, équivalentes car, quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c, elles ont deux à deux même valeur numérique.

L'égalité de deux expressions équivalentes est ce qu'on appelle une *identité*. Pour distinguer les identités des autres égalités, nous emploierons le signe $\equiv$ (avec trois barres) au lieu de $=$.

Nous écrirons :

$$\begin{array}{rcl} a + b & \equiv & b + a, \\ a + (b - c) & \equiv & a + b - c, \\ a - (b - c) & \equiv & a - b + c, \\ \dfrac{a^3 b}{a^2} & \equiv & ab. \end{array}$$

30. Toute quantité qui dépend d'une autre est dite *fonction* de cette autre. Par exemple, considérons l'expression algébrique

$$2x - 3.$$

Sa valeur numérique dépend de la valeur numérique de la lettre x. Pour $x = 1$, l'expression a la valeur -1; pour $x = 2$, elle a la valeur $+1$; pour $x = 3$, la valeur 3, etc... La valeur numérique de l'expression algébrique est donc une *fonction* de la valeur de la lettre x. Plus brièvement, on dit que l'expression algébrique est *une fonction de x*.

Toute lettre, telle que la lettre x dans l'exemple précédent, dont la valeur n'est pas fixée, c'est-à-dire dont la valeur numérique est

susceptible de varier, est ce qu'on appelle une *lettre variable* ou plus simplement *une variable*.

Par opposition, on appelle *lettre constante*, ou simplement *constante*, une lettre dont la valeur est fixée.

Généralement, on désigne les *constantes* par les *premières* lettres de l'alphabet, a, b, c... α, β, γ... (*lettres connues*), et les *variables* par les *dernières* lettres de l'alphabet x, y, z, t... ξ, ζ, τ... (*lettres inconnues ou non fixées*).

Toute expression algébrique qui contient une ou plusieurs variables est une *fonction* de cette ou de ces variables.

Pour désigner une fonction de la lettre x on emploie le symbole abrégé $f(x)$, ce qui se lit *fonction de x* ou, plus brièvement, *f de x*. Lorsqu'on a plusieurs fonctions différentes à désigner, pour ne pas les confondre, on affecte la lettre f d'indices. Ainsi, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ désignent trois fonctions différentes de x, et on lit ceci : *f indice* 1 *de x*, *f indice* 2 *de x*, *f indice* 3 *de x*. Ou bien encore, pour distinguer des fonctions différentes, on remplace la lettre f par des lettres analogues. Ainsi, on emploiera les symboles $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, etc...

Pour désigner la valeur numérique que prend une fonction pour une valeur donnée de la variable, on remplace, dans le symbole qui désigne la fonction, la lettre qui désigne la variable par cette valeur. Ainsi, $f(1)$, $f(-3)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$ désignent les valeurs numériques de la fonction $f(x)$ pour $x = 1$, $x = -3$, $x = \frac{3}{2}$.

Par exemple, considérons l'expression algébrique

$$y^2 - 3y + 5$$

qui est une fonction de la variable y que nous désignerons par $f(y)$; on aura

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 3 + 5 = 3, \\ f(-3) &= (-3)^2 - 3(-3) + 5 = 23, \\ f(0) &= 0 - 0 + 5 = 5. \end{aligned}$$

Des exemples de fonctions sont très fréquents et leur considération dans l'algèbre et dans ses applications est de la plus grande utilité.

La quantité d'huile que consomme une lampe, en brûlant, est fonction du temps pendant lequel cette lampe a brûlé. Si, par exemple, la lampe brûle 5 centimètres cubes d'huile en une heure, elle brûlera pendant t heures ou fractions d'heures $5t$ centimètres

cubes. L'expression $5t$, qui est une fonction de la variable t, représente donc la quantité d'huile consommée pendant le temps t. Si on désigne par q cette quantité d'huile, exprimée en centimètres cubes, on a la *formule :*

$$q = 5t.$$

D'une manière générale, toute formule exprime une certaine quantité en fonction d'une autre. La formule du mouvement uniforme (n° 25) en est un exemple. Un mobile se meut, d'un mouvement uniforme, avec une vitesse *connue* v, sur un axe. *On sait* qu'au temps t_0 son abcisse était x_0 ; son abcisse x au temps t est, alors, donnée par la formule :

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

qui montre que l'abcisse x du mobile est une fonction du temps t. Dans cette formule, les trois nombres t_0, x_0 et v, qui sont trois *données*, sont trois *constantes*, t est la *variable* et x est la *fonction*.

En Physique, toute loi, régissant un phénomène, exprime une certaine quantité en fonction d'une autre ou de plusieurs autres.

Par exemple, on sait que la longueur d'une barre de fer dépend de la température de cette barre. La longueur de la barre est donc une fonction de la température. La loi de la dilatation nous apprend que, si a est la longueur de la barre à la température 0 et k un certain nombre, appelé *coefficient de dilatation*, qui dépend de la matière dont est formée la barre, la longueur l de la barre, à la température t, sera donnée par la formule :

$$l = a(1 + kt).$$

L'expression $a(1 + kt)$, où a et k sont des *constantes* et t la *variable*, est donc la *fonction* de t qui représente la longueur de la barre.

31. D'après sa définition même, la valeur d'une fonction varie, en général, lorsque la valeur de la variable varie.

On dit que deux quantités qui varient simultanément *varient dans le même sens* si elles croissent ou décroissent simultanément. On dit, au contraire, qu'elles *varient en sens contraire* lorsque l'une croît quand l'autre décroît. Ainsi, en arithmétique, deux quantités directement proportionnelles varient dans le même sens. Le poids d'une marchandise et son prix varient dans le même sens. Deux quantités inversement proportionnelles varient en sens contraire. Le temps nécessaire pour faucher un pré et le nombre des faucheurs varient en sens inverse. Car, lorsque le nombre des fau-

cheurs augmente, le temps diminue et, lorsque le nombre des faucheurs diminue, le temps augmente.

On dit qu'une fonction est *croissante* lorsqu'elle varie dans le même sens que la variable. Par suite, lorsqu'une fonction est croissante, sa valeur croît ou décroît suivant que la valeur de la variable croît ou décroît. Par exemple, le prix d'une marchandise est fonction de son poids. Le poids et le prix varient dans le même sens; le prix est donc une fonction croissante du poids.

On dit qu'une fonction est *décroissante* lorsqu'elle varie en sens contraire de la variable. Il suit de là que, lorsqu'une fonction est décroissante, sa valeur augmente lorsque la valeur de la variable diminue ou diminue quand la valeur de la variable augmente. Ainsi, la quantité d'huile qui reste dans une lampe est une fonction décroissante du temps pendant lequel cette lampe a brûlé; car, plus la lampe a brûlé longtemps moins il reste d'huile.

Voici d'autres exemples :

La longueur d'une barre de fer est, comme nous l'avons vu, une fonction de sa température. Or, lorsque la température de la barre s'élève, la barre s'allonge et, lorsque la température baisse, la barre raccourcit. La longueur de la barre est donc une fonction *croissante* de la température.

Lorsqu'on comprime une masse de gaz, le volume de la masse de gaz diminue et sa pression augmente. Au contraire, lorsque la pression du gaz diminue, le volume du gaz augmente. Le volume d'une masse de gaz est donc fonction de sa pression. La loi de *Mariotte* nous apprend que, si p est la pression du gaz et v son volume, le produit pv (à température constante) reste constant. c désignant donc un certain nombre fixe, une *constante*, on a l'égalité

$$pv = c$$

ou

$$v = \frac{c}{p}.$$

Le volume du gaz est donc une fonction *décroissante* de sa pression représentée par l'expression $\frac{c}{p}$. Cette expression montre bien que la fonction est décroissante, car on sait, en arithmétique, que, lorsque le dénominateur p d'une fraction $\frac{c}{p}$ diminue, la fraction augmente, et réciproquement.

32. On appelle *monôme* une expression algébrique qui ne contient ni le signe + ni le signe —.

Ainsi,

$$4a^3b\sqrt{b^3c}, \quad \frac{2}{3}a\sqrt[3]{3b^2}$$

sont des *monômes irrationnels* ;

$$\frac{5a^2bc}{3d}, \quad \sqrt{3}.\frac{4ab}{c^3}$$

sont des *monômes rationnels* mais *fractionnaires* ;

enfin,

$$\frac{4}{3}ab^3, \quad \frac{3}{5}a^2bacb, \quad 6xyx^2$$

sont des *monômes entiers*.

Des définitions mêmes d'une expression entière et d'un monôme, il résulte qu'un *monôme entier* est une expression qui s'obtient, *uniquement*, *par la multiplication* de nombres et de lettres. Ainsi,

$$\frac{5}{3}xy4xxy, \quad x2abx, \quad aaabcc$$

sont des monômes entiers. Puisque, dans un produit de facteurs, on peut intervertir l'ordre des facteurs et remplacer plusieurs facteurs par leur produit effectué (n° 15), on peut toujours écrire les premiers les facteurs numériques puis réunir ensemble les facteurs égaux et les remplacer par une puissance. Ainsi, on a :

$$\frac{5}{3}xy\,4\,xxy = \frac{5}{3}\times 4\,xxxyy = \frac{20}{3}x^3y^2;$$
$$x\,2\,abx = 2\,abxx = 2\,abx^2.$$

On peut donc toujours écrire un monôme entier de façon qu'il soit le produit d'un nombre par des puissances entières de certaines lettres.

Le nombre, qui se trouve en avant du monôme, est ce qu'on appelle le *coefficient* du monôme.

Le coefficient de $\frac{20}{3}x^3y^2$ est $\frac{20}{3}$; le coefficient de $2abx^2$ est 2 ; le coefficient de a^3bc^2 est 1, car, lorsqu'il n'y a pas de nombre, on peut toujours supposer qu'il y ait, en avant, le facteur 1, puisque :

$$a^3bc^2 = 1 \times a^3bc^2.$$

On appelle *degré* d'un monôme entier la somme des exposants des

lettres qui le composent (toute lettre qui n'a pas d'exposant est considérée comme ayant l'exposant 1).

Le degré de $\frac{20}{3}x^3y^2$ est $3+2=5$; le degré de $2abx^2$ est $1+1+2=4$.

33. On appelle *polynôme* une somme algébrique de monômes. Les monômes, avec les signes qui les précèdent, sont les *termes* du polynôme. Un terme d'un polynôme peut être complètement numérique, c'est-à-dire ne pas contenir de lettres; un tel terme peut être considéré comme un monôme contenant des lettres à l'exposant zéro et, par suite, comme un *monôme de degré zéro.*

Ainsi,

$$\frac{4\,ab}{c} + 2\,a^3 - \frac{3}{2}\frac{a^2c}{b} + 15$$

est un polynôme dont les termes sont

$$\frac{4\,ab}{c},\quad 2\,a^3,\quad -\frac{3}{2}\frac{a^2c}{b} \text{ et } 15.$$

Un polynôme peut être *irrationnel* ou *rationnel*, *fractionnaire* ou *entier.*

Un polynôme qui n'a que *deux* termes est appelé un *binôme*; s'il a *trois* termes, on le nomme *trinôme.*

Un polynôme *entier* est une somme algébrique de monômes entiers. Le *degré* d'un polynôme entier est le degré du monôme de degré le plus élevé qui y figure.

Ainsi,

$$4x^3 - 5x^2 + \frac{2}{3}x + 1$$

est un *polynôme* de degré 3.

$$x^2 - 4,$$

est un *binôme* du second degré.

$$x^3 + px + q,$$

est un *trinôme* du troisième degré.

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

est un *polynôme* du quatrième degré. Dans ce polynôme, tous les monômes sont du même degré qui est, alors, le degré du monôme de degré le plus élevé.

Un polynôme entier est dit *homogène* lorsque tous ses termes sont de même degré. Le degré commun de tous les termes est ce qu'on appelle le *degré d'homogénéité* ou, plus brièvement, le *degré* du polynôme.

Le polynôme précédent

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

est *homogène* et de *degré* 4.

De même, le polynôme

$$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$$

est homogène et de degré 3.

On appelle *termes semblables*, dans un polynôme entier, des termes qui ont même partie littérale et qui ne diffèrent que par les coefficients. Dans le polynôme entier

$$4ax^3 - 2a^3x + \frac{3}{2}ax^3 - x^4 - 5ax^3 + a^2x^2$$

$$4ax^3, \quad +\frac{3}{2}ax^3, \quad -5ax^3$$

sont des termes semblables.

Un polynôme étant une *somme algébrique*, on peut lui appliquer toutes les transformations permises pour une somme algébrique (n° 10). On peut *réunir* tous les termes semblables et les *remplacer par leur somme effectuée*. Or, pour faire la somme des termes semblables on peut mettre en facteur, comme nous l'avons expliqué au n° 20 (*App. II*), la partie littérale commune et faire la somme algébrique des coefficients.

On a, par exemple :

$$4ax^3 + \frac{3}{2}ax^3 - 5ax^3 = \left(4 + \frac{3}{2} - 5\right)ax^3 = \frac{1}{2}ax^3.$$

De même, le polynôme

$$5a^3b + a^4 - 3a^3b + 2a^4 - 5a^2b^2 + a^3b - 2a^2b^2$$

peut s'écrire, en intervertissant l'ordre des termes (n° 10),

$$(a^4 + 2a^4) + (5a^3b - 3a^3b + a^3b) + (-5a^2b^2 - 2a^2b^2)$$

ou :

$$(1 + 2)a^4 + (5 - 3 + 1)a^3b + (-5 - 2)a^2b^2,$$

et enfin :

$$3a^4 + 3a^3b - 7a^2b^2.$$

De là on conclut la règle suivante pour faire ce qu'on appelle la *réduction des termes semblables.*

Règle. — *Lorsque, dans un polynôme entier, il y a plusieurs termes semblables, on peut remplacer tous ces termes par un seul qui leur est semblable et qui a pour coefficient la somme algébrique des coefficients de ces termes.*

On appelle *polynôme réduit* un polynôme dans lequel la réduction des termes semblables a été effectuée ou, en d'autres termes, un polynôme dans lequel il n'y a pas de termes semblables.

Exemples :

Réduire les polynômes suivants :

1° $4a^3b - b^4 + 2a^3b + 2b^4 - 4a^2b^2 + 3a^2b^2$
$\equiv (2b^4 - b^4) + (4a^3b + 2a^3b) + (-4a^2b^2 + 3a^2b^2)$
$\equiv b^4 + 6a^3b - a^2b^2$

2° $4x^3 - x^5 + 2x^3 - x^2 + 5 - 3x^2 - 5x^3 + 15 + 4x^2$
$\equiv (4x^3 + 2x^3 - 5x^3) - x^5 + (-x^2 - 3x^2 + 4x^2) + (5 + 15)$
$\equiv x^3 - x^5 + 20.$

Dans la pratique, on néglige d'écrire le polynôme intermédiaire, obtenu en intervertissant l'ordre des termes; on effectue, successivement, mentalement, la réduction de tous les termes semblables et on écrit seulement le terme réduit.

Ainsi,

$$a^3 - 2a^2b + a^2b - 2a^3 + 3ab^2 + b^3 + 5ab^2$$
$$\equiv -a^3 - a^2b + 8ab^2 + b^3$$

Pour faciliter la réduction, il est bon de barrer, dans le polynôme donné, les termes qu'on vient de réduire.

34. On peut, comme nous l'avons déjà dit, appliquer à un polynôme toutes les transformations permises pour une somme algébrique (n° 10). En particulier, on peut écrire les termes du polynome dans tel ordre que l'on voudra. Il y a souvent avantage à employer un ordre plutôt qu'un autre pour ranger les termes d'un polynôme.

Lorsque les termes d'un polynôme entier, réduit, ne contiennent qu'une seule lettre, on dit que le polynôme est *ordonné suivant les puissances croissantes* si les termes sont rangés de telle façon que les exposants de la lettre aillent en croissant, quand on lit

le polynôme de gauche à droite. Les polynômes

$$4 + x + x^3 - 5x^4,$$
$$3a - a^3 + a^5 + 6a^6,$$

sont ordonnés suivant les puissances croissantes.

On dit, au contraire, que le polynôme est *ordonné suivant les puissances décroissantes* si les exposants de la lettre vont en décroissant, quand on lit le polynôme de gauche à droite. (Tout terme qui ne contient pas la lettre peut être considéré comme la contenant à l'exposant zéro, puisque $x^0 = a^0 = 1$.)

Les polynômes

$$-5x^4 + x^3 + x + 4,$$
$$6a^6 + a^5 - a^3 + 3a,$$

sont ordonnés suivant les puissances décroissantes.

Lorsque les termes d'un polynôme entier, *réduit*, contiennent plus d'une lettre, on dit que le polynôme est *ordonné suivant les puissances croissantes ou décroissantes d'une certaine lettre*, si les termes sont rangés de telle façon que les exposants de *cette* lettre dans ces termes aillent en croissant ou en décroissant quand on lit le polynôme de gauche à droite. Tout terme qui ne contient pas la *lettre ordonnatrice* est censé la contenir à l'exposant *zéro*.

Le polynôme entier réduit

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

est ordonné suivant les puissances croissantes de la lettre b et suivant les puissances décroissantes de la lettre a.

Lorsqu'un polynôme entier contient une *variable*, c'est-à-dire est une *fonction* d'une variable, on *l'ordonne*, en général, suivant les puissances de cette variable. Ainsi, les polynômes

$$ax^2 + bx + c$$
$$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$$

sont ordonnés suivant les puissances décroissantes de la variable x.

Lorsqu'un polynôme réduit contient plus d'une lettre, il peut arriver qu'il existe plusieurs termes *non semblables* et contenant la même puissance de la lettre ordonnatrice. Dans ce cas, on réunit tous les termes qui contiennent une même puissance de la lettre ordonnatrice et on met, dans ces termes, la puissance commune *en facteur* (n° 20, *App. II*). Dans la parenthèse figure alors un polynôme entier que l'on ordonne aussi. Tous les termes qui contiennent

une même puissance de la lettre ordonnatrice forment, ainsi réunis, ce qu'on appelle *un seul terme* du polynôme et le *coefficient* de ce terme est le polynôme entre parenthèses. Par exemple, soit à ordonner le polynôme réduit :

$$ax^3 + a^2x^2 - 2abx^2 + bx^3 + x^4 + b^2x^2 + a^3x - a^4 - b^3x + b^4;$$

nous l'écrirons :

$$x^4 + (a+b)x^3 + (a^2 - 2ab + b^2)x^2 + (a^3 - b^3)x - a^4 + b^4,$$

et il est ordonné suivant les puissances décroissantes de la lettre x. $(a+b)x^3$ est ce qu'on appelle le *terme en* x^3 et $(a+b)$ le *coefficient* de ce terme, par une extension des mots *terme* et *coefficient*. De même, $(a^2 - 2ab + b^2)x^2$ est le *terme en* x^2 et $(a^2 - 2ab + b^2)$ son *coefficient*. $(a^3 - b^3)x$ est le terme en x, et enfin $(-a^4 + b^4)$ est le terme de degré zéro en x ou ce qu'on appelle le *terme constant* (puisqu'il ne contient pas la variable x). Pour simplifier l'écriture et pour éviter que le polynôme tienne plus d'une ligne, on écrit souvent le polynôme, coefficient d'une puissance de la lettre ordonnatrice, en écrivant ses termes les uns *au-dessous* des autres. On borde le coefficient, ainsi écrit, d'un trait vertical à droite, à côté duquel on écrit la puissance de la lettre ordonnatrice. Ainsi, on écrira le polynôme précédent comme il suit :

$$x^4 \begin{array}{r} +a \\ +b \\ \end{array}\Bigg| \; x^3 \begin{array}{r} +a^2 \\ -2ab \\ +b^2 \end{array}\Bigg| \; x^2 \begin{array}{r} +a^3 \\ -b^3 \\ \end{array}\Bigg| \; x \begin{array}{r} -a^4 \\ +b^4 \\ \end{array}\Bigg| .$$

EXEMPLES :

Soit à ordonner le polynôme en y,

$$y^5 - a^3y^2 + a^4y - 3ab^2y^2 + 3a^2by^2 + a^5 + ay^4 - b^5 - by^4 + a^2y^3 + b^3y^2 + 2aby^3 + b^2y^3 + b^4y - 5a^3b^2 + 5a^2b^3.$$

Ce polynôme s'écrit, en l'ordonnant suivant les puissances décroissantes de y,

$$y^5 + (a - b)y^4 + (a^2 + 2ab + b^2)y^3 - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)y^2 + (a^4 + b^4)y + (a^5 - 5a^3b^2 + 5a^2b^3 - b^5),$$

ou, encore,

$$y^5 \begin{array}{r} +a \\ -b \\ \\ \end{array}\Bigg| \; y^4 \begin{array}{r} +a^2 \\ +2ab \\ +b^2 \\ \end{array}\Bigg| \; y^3 \begin{array}{r} -a^3 \\ +3a^2b \\ -3ab^2 \\ +b^3 \end{array}\Bigg| \; y^2 \begin{array}{r} +a^4 \\ +b^4 \\ \\ \end{array}\Bigg| \; y \begin{array}{r} +a^5 \\ -5a^3b^2 \\ +5a^2b^3 \\ -b^5 \end{array}\Bigg| .$$

Soit à ordonner, suivant les puissances croissantes de z, le polynôme, en z :

$$pz^3 - q^2z^2 + 4pqz^2 - 5z^4 + 3p^4 - 6p^3z + 7p^2z^2 - qz^3 + 4pq^3 - 3p^2qz - 8q^4 + q^3z.$$

Il s'écrit :

$$3p^4 + 4pq^3 - 8q^4 + (-6p^3 - 3p^2q + q^3)z + (7p^2 + 4pq - q^2)z^2 + (p - q)z^3 - 5z^4,$$

ou, encore,

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} 3p^4 & -6p^3 & z + 7p^2 & z^2 + p & z^3 - 5z^4 \\ +4pq^3 & -3p^2q & +4pq & -q & \\ -8q^4 & +q^3 & -q^2 & & \end{array}$$

On dit qu'un polynôme est *entier, par rapport à une certaine lettre*, lorsqu'il ne contient pas cette lettre en dénominateur. Tout polynôme entier, par rapport à x ou *entier en x*, peut être ordonné par rapport à la lettre x. Les coefficients des diverses puissances de x ne sont pas, nécessairement, entiers par rapport aux autres lettres. Ainsi, le polynôme :

$$x^3 - \frac{b^2 - a^2}{a}x^2 + \frac{(a+b)^3}{a-b}x + \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{b}$$

est un polynôme *entier en x*.

Le *degré* d'un polynôme entier en x est l'exposant de la plus haute puissance de x qui y figure.

On dit qu'un polynôme ordonné est *complet* lorsqu'il contient la lettre ordonnatrice à tous les degrés à partir du degré le plus élevé (y compris le degré zéro).

Les polynômes *en x*,

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 3x + 1,$$
$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

sont *complets*. — Au contraire, les polynômes

$$x^3 - a^3,$$
$$x^4 + 1,$$
$$x^5 - 5x^2 + 6x - 3,$$
$$x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x$$

sont *incomplets* (En particulier, dans le dernier, le terme qui manque est le *terme constant* de degré zéro).

Un polynôme complet, entier en x, *de degré m* (c'est-à-dire où la plus haute puissance de x est x^m) a $(m + 1)$ termes. Car il a des termes en x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, ... x^2, x, ce qui fait m termes, plus le terme constant, soit $(m + 1)$ termes.

EXERCICES

13. Réduire et ordonner, par rapport aux puissances décroissantes de x, les polynômes suivants :

$$x^4 - x^3 + x^2 - 4x^4 + 5x + 3x^2 - 2 + 2x \ ;$$
$$ax^3 + 3a^2x^2 - 5ax^3 + x^4 + ax^3 + a^2x^2 - 3a^3x + a^4 \ ;$$
$$x^4y^4 - x^3y^5 + 2x^4y^4 - x^6y^2 + x^3y^5 - y^8 + 2x^6y^2 \ .$$

14. Réduire et ordonner, par rapport aux puissances croissantes de a, les polynômes suivants :

$$a^4 - 3a^3b - b^4 - a^3b + 2b^4 - a^2b^2 + 2ab^3 + 4a^3b \ ;$$
$$a^2 + 1 - 2a + 5 - 3a + a^2 \ ;$$
$$a^3b + a^3c - 2a^2b^2 - 2a^2bc - a^2c^2 - 2a^2bc - a^2c^2 \ ;$$
$$a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + 2ac + c^2 + a^2 + 2ad + d^2 \ .$$

CHAPITRE IV

ADDITION ET SOUSTRACTION DES MONOMES ET POLYNOMES

35. Pour faire la somme ou la différence de deux *monômes*, il suffit *d'indiquer* l'opération en séparant les deux monômes par le signe + ou le signe —.

D'une manière générale, pour faire une somme algébrique de monômes, il suffit de les écrire les uns à la suite des autres, précédés des signes convenables. On obtient ainsi un *polynôme* et, si dans ce polynôme il y a des *termes semblables*, on en fera la *réduction* (n° 33).

Pour ajouter un monôme à un polynôme, il suffit d'écrire ce monôme, précédé du signe +, à la suite du polynôme.

Pour retrancher un monôme d'un polynôme, il suffit d'écrire ce monôme, précédé du signe —, à la suite du polynôme.

On fera les réductions, s'il y a lieu.

36. Pour ajouter un polynôme, il suffit d'ajouter successivement chacun de ses termes, d'après un théorème connu (n° 10, *Th.* III). Donc, pour faire la somme de deux polynômes, il suffit d'écrire tous les termes de l'un des polynômes à la suite de l'autre. Ainsi, on a :

$$(x^4 - x^2 + x + 1) + (x^3 + x^2 - 2x + 3) \equiv$$
$$x^4 - x^2 + x + 1 + x^3 + x^2 - 2x + 3 ;$$

on fait, ensuite, la réduction des termes semblables s'il y a lieu.

Dans l'exemple précédent, la somme, toutes réductions faites, est

$$x^4 + x^3 - x + 4.$$

D'une manière générale, *pour faire la somme de plusieurs polynômes, il suffit d'écrire tous les termes de ces polynômes à la suite les uns des autres. On pourra, ensuite, faire la réduction des termes semblables.*

Dans la pratique, on dispose l'opération de façon que la réduction des termes semblables soit facile.

Les polynômes à ajouter étant réduits, on les ordonne tous, dans le même sens, par rapport à une même lettre. Puis, on les écrit les uns au-dessous des autres de façon que les termes semblables soient tous dans une même colonne verticale, et on fait l'addition en faisant la somme des termes de chaque colonne verticale.

Lorsque les polynômes sur lesquels on opère ne sont pas *complets*, on a soin d'espacer les termes de façon à marquer la place des termes qui manquent dans un polynôme et qui peuvent exister dans un autre. Ainsi, soit à faire la somme des polynômes :

$$\begin{aligned}
&x^4 + 2x^2y^2 - 3x^3y + y^4,\\
&x^4 - y^4,\\
&6x^3y - 5xy^3,\\
&4x^2y^2 + 2y^4.
\end{aligned}$$

Nous disposerons l'opération de la façon suivante, en laissant dans le premier polynôme la place du terme en x qui manque, dans le second polynôme les trois places des termes en x^3, x^2 et x qui manquent, etc.

$$\begin{array}{rrrrr}
x^4 & -\ 3\,x^3y & +\ 2\,x^2y^2 & & +\ y^4\\
x^4 & & & & -\ y^4\\
 & 6\,x^3y & & -\ 5\,xy^3 & \\
 & & 4\,x^2y^2 & & +\ 2\,y^4\\
\hline
2\,x^4 & +\ 3\,x^3y & +\ 6\,x^2y^2 & -\ 5\,xy^4 & +\ 2\,y^4
\end{array}$$

37. *Pour retrancher un polynôme, il suffit*, d'après le Théorème IV du n° 10, *d'ajouter le polynôme obtenu en changeant les signes de tous ses termes.*

Pour faire la différence entre les deux polynômes

$$P \equiv y^2 - 3\,y + 1$$

et

$$Q \equiv y^3 + 6\,y + 7,$$

il suffit d'*ajouter* au polynôme P le polynôme

$$-\mathrm{Q} \equiv -y^3 - 6\,y - 7.$$

En disposant l'opération de cette addition comme d'ordinaire on a :

$$\begin{array}{rl} \mathrm{P} \equiv & \quad y^2 - 3y + 1 \\ -\mathrm{Q} \equiv & -y^3 \qquad\quad - 6y - 7 \\ \hline \mathrm{P}-\mathrm{Q} \equiv & -y^3 + y^2 - 9y - 6 \end{array}$$

EXERCICES

15. Effectuer les sommes $\mathrm{P}+\mathrm{Q}+\mathrm{R}$, $\mathrm{P}+\mathrm{Q}-\mathrm{R}$, $\mathrm{P}-\mathrm{Q}+\mathrm{R}$. $-\mathrm{P}+\mathrm{Q}+\mathrm{R}$.

1° lorsque

$$\mathrm{P} \equiv x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$
$$\mathrm{Q} \equiv x^2 + 2x + 1,$$
$$\mathrm{R} \equiv x + 1.$$

2° lorsque

$$\mathrm{P} \equiv a^5 + 3a^4b - 2a^3b^2 + 6ab^4,$$
$$\mathrm{Q} \equiv 2a^5 - a^3b^2 + b^5,$$
$$\mathrm{R} \equiv 2a^4b - 6ab^4 + 3b^5.$$

3° lorsque

$$\mathrm{P} \equiv ax^2 + 5x^3 - 2ax^2 + 3a^2x - a^3 - x^3,$$
$$\mathrm{Q} \equiv a^3 + x^3 - 3a^2x + 2a^3 - a^2x,$$
$$\mathrm{R} \equiv -2a^3 + x^3 + a^2x - 6x^3 + ax^2.$$

On pourra vérifier l'exactitude des opérations en calculant, d'une part, les valeurs numériques des polynômes P, Q et R et, d'autre part, les valeurs numériques des résultats effectués pour

$$x = 1, \quad a = 2, \quad b = 3.$$

CHAPITRE V

MULTIPLICATION DES MONOMES ET POLYNOMES

38. Pour faire le produit de deux monômes, il suffit (n° 15, *Th. V*) de multiplier, successivement, l'un des monômes par tous les facteurs qui composent l'autre. D'ailleurs, comme on peut intervertir l'ordre des facteurs (n° 15, *Th. III*), on peut prendre les facteurs des deux monômes dans un ordre quelconque. Donc, *le produit de deux monômes est le monôme obtenu en faisant le produit des facteurs de ces deux monômes dans un ordre quelconque.*

Le produit de deux monômes entiers est un monôme entier ayant

pour coefficient le produit des coefficients des deux monômes et pour partie littérale le produit de puissances des lettres qui figurent dans ces monômes, chaque lettre étant affectée d'un exposant égal à la somme des exposants qu'elle a dans les deux monômes.

(Lorsqu'une lettre ne figure pas dans un monôme, il faut la considérer comme y figurant à l'exposant *zéro*).

Soit à faire le produit des deux monômes entiers

$$4\,x^3y^2z \quad \text{et} \quad 3\,x\,y\,t^2.$$

Ce produit est :

$$4\,x^3y^2z\;3\,x\,y\,t^2,$$

ou, en intervertissant l'ordre des facteurs de façon à amener les facteurs numériques en avant et à réunir les puissances des mêmes lettres,

$$4 \times 3\;.\;x^3x\,y^2y\,z\,t^2,$$

et, en remplaçant des produits par ces produits effectués (n° 15, *Th. IV*),

$$12\,x^4\,y^3\,zt^2.$$

Au fond, nous n'avons fait que les transformations nécessaires pour amener le monôme à sa forme habituelle (Voir n° 32).

Exemples :

$$\left(\frac{3}{2}\,a^3bc\right) \times (15\;ac^2d) = \frac{45}{2}\,a^4bc^3d;$$
$$\left(\frac{1}{5}\,ax^3y\right) \times (20\,bxy^2) = 4abx^4y^3.$$

Théorème. — *Le degré du produit de deux monômes entiers est la somme des degrés de ces deux monômes.*

Car le degré du produit est la somme des exposants des lettres qui y figurent. Or, ces lettres sont toutes les lettres figurant dans les deux facteurs; donc, la somme des exposants se compose, d'une part, de la somme des exposants des lettres qui figurent dans le premier facteur, ce qui est son degré, et, d'autre part, de la somme des exposants des lettres du second facteur, qui est aussi son degré. Le degré du produit est donc la somme des degrés des facteurs.

Le degré de $\frac{3}{2}\,a^3bc$ est 5; le degré de $15ac^2d$ est 4; le degré du produit $\frac{45}{2}\,a^4bc^3d$ est $9 = 5 + 4$.

39. *Pour faire le produit d'un polynôme par un monôme*, d'après la règle pour faire le produit d'une somme algébrique par un nombre (n° 20, *Th. I*), *on fait la somme des produits obtenus en multipliant, successivement, chacun des termes du polynôme par le monôme.* Ce produit est donc un polynôme.

Le produit d'un polynôme entier par un monôme entier est un polynôme entier. Car, comme le produit de deux monômes entiers est un monôme entier, ce produit est une somme algébrique de monômes entiers et, par suite, un polynôme entier.

Exemples :

$$(x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + a^3) \times ax^2 = ax^5 - 3a^2x^4 + 3a^3x^3 + a^4x^2;$$
$$(a^4b - 5a^3b^2 + 6a^2b^3) \times 4a^2b^3 = 4a^6b^4 - 20a^5b^5 + 24a^4b^6.$$

40. Pour faire le produit de deux polynômes, il suffit d'appliquer la règle par laquelle on obtient le produit de deux sommes algébriques (n° 20, *Th. II*) et, par suite, *on obtient le produit de deux polynômes en faisant la somme algébrique de tous les produits obtenus en multipliant, de toutes les façons possibles, un terme de l'un des polynômes par un terme de l'autre.*

Pratiquement, pour ne pas faire d'oubli, on multiplie, successivement, l'un des polynômes (*multiplicande*) par tous les termes du second polynôme (*multiplicateur*) et on fait la somme des produits partiels ainsi obtenus. On dispose, alors, en général, l'opération de la façon suivante : *on ordonne les deux polynômes, dans le même sens, par rapport à la même lettre. On écrit le multiplicateur au-dessous du multiplicande et on multiplie, successivement, le multiplicande par tous les termes du multiplicateur. On écrit les produits partiels, ainsi obtenus, les uns au-dessous des autres de façon à disposer leur addition, comme il a été dit au n° 36, et on effectue cette addition.*

Le multiplicande étant ordonné, les produits partiels seront tous ordonnés.

Exemple I. — Soit à faire le produit des deux polynômes

$$4x - x^2 + 2x^3 - 3 \quad \text{et} \quad x^2 + 15 - x.$$

Disposition de l'opération :

Multiplicande		$2x^3 - x^2 + 4x - 3$
Multiplicateur		$x^2 - x + 15$
Produits partiels	*par* x^2	$2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3x^2$
	par $-x$	$-2x^4 + x^3 - 4x^2 + 3x$
	par $+15$	$+30x^3 - 15x^2 + 60x - 45$
Produit		$2x^5 - 3x^4 + 35x^3 - 22x^2 + 63x - 45$

Exemple II. — Soit à faire le produit des deux polynômes

$$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \quad \text{et} \quad a^2 + 2ab + b^2.$$

Disposition de l'opération :

Multiplicande......		$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
Multiplicateur......		$a^2 + 2ab + b^2$
Produits partiels	*par* a^2.....	$a^6 - 4a^5b + 6a^4b^2 - 4a^3b^3 + a^2b^4$
	par $2ab$....	$+ 2a^5b - 8a^4b^2 + 12a^3b^3 - 8a^2b^4 + 2ab^5$
	par b^2.....	$+ a^4b^2 - 4a^3b^3 + 6a^2b^4 - 4ab^5 + b^6$
Produit..........		$a^6 - 2a^5b - a^4b^2 + 4a^3b^3 - a^2b^4 - 2ab^5 + b^6$

Exemple III.

Voici l'opération du produit de deux polynômes dans lesquels les coefficients de la lettre ordonnatrice sont eux-mêmes des polynômes :

Multiplicande	a $-b$	$x^3 + a^2$ $-2ab$ $+b^2$	$x^2 + a^3$ $-b^3$	$x + a^4$ $-4a^2b^2$ $+b^4$
Multiplicateur	a $+b$	$x^2 - 2a^2$ $+b^2$	$x + a^3$ $-3a^2b$	

Produits partiels par :						
ax^2.	a^2 $-ab$	$x^5 + a^3$ $-2a^2b$ $+ab^2$	$x^4 + a^4$ $-ab^3$	$x^3 + a^5$ $-4a^3b^2$ $+ab^4$	x^2	x
bx^2.	$+ab$ $-b^2$	$+a^2b$ $-2ab^2$ $+b^3$	$+a^3b$ $-b^4$	$+a^4b$ $-4a^2b^3$ $+b^5$		
$-2a^2x$.		$-2a^3$ $+2a^2b$	$-2a^4$ $+4a^3b$ $-2a^2b^2$	$-2a^5$ $+2a^2b^3$	$-2a^6$ $+8a^4b^2$ $-2a^2b^4$	
b^2x.		$+ab^2$ $-b^3$	$+a^2b^2$ $-2ab^3$ $+b^4$	$+a^3b^2$ $-b^5$	$+a^4b^2$ $-4a^2b^4$ $+b^6$	
a^3.			$+a^4$ $-a^3b$	$+a^5$ $-2a^4b$ $+a^3b^2$	$+a^6$ $-a^3b^3$	$+a^7$ $-4a^5b^2$ $+a^3b^4$
$-3a^2b$.			$-3a^3b$ $+3a^2b^2$	$-3a^4b$ $+6a^3b^2$ $-3a^2b^3$	$-3a^5b$ $+3a^2b^4$	$-3a^6b$ $+12a^4b^3$ $-3a^2b^5$
Produit total réduit.	a^2 $-b^2$	$x^5 - a^3$ $+a^2b$	$x^4 + a^3b$ $+2a^2b^2$ $-3ab^3$	$x^3 - 4a^4b$ $+4a^3b^2$ $-5a^2b^3$ $+ab^4$	$x^2 - a^6$ $-3a^5b$ $+9a^4b^2$ $-a^3b^3$ $-3a^2b^4$ $+b^6$	$x + a^7$ $-3a^6b$ $-4a^5b^2$ $+12a^4b^3$ $+a^3b^4$ $-3a^2b^5$

Dans chaque tranche horizontale de produits partiels se trouve le produit du multiplicande par un terme du multiplicateur. Ensuite, pour effectuer l'addition de ces six produits partiels, on a fait, dans chaque colonne verticale, l'addition, c'est-à-dire la réduction des polynômes coefficients qui ont été ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la lettre a.

41. Théorème I. — *Le produit de deux polynômes entiers homogènes est un polynôme entier homogène dont le degré d'homogénéité est égal à la somme des degrés d'homogénéité des deux facteurs.*

Soient A et B deux polynômes entiers homogènes de degrés p et q. Cela veut dire que les monômes qui composent A sont *tous* de degré p, et que *tous* les monômes qui composent B sont de degré q. Un terme quelconque du produit, étant le produit d'un terme de A par un terme de B, est le produit d'un monôme de degré p par un monôme de degré q, c'est donc un monôme de degré $p+q$ (*Th.* du n° 38). Tous les termes du produit étant de degré $p+q$, le produit est *homogène* et de degré $p+q$.

Dans l'*Exemple II* (n° 40), le multiplicande est homogène et de degré 4; le multiplicateur est aussi homogène et de degré 2. Le produit est homogène et de degré $4+2=6$.

Théorème II. — *Le terme de degré le plus élevé, par rapport à la lettre ordonnatrice, dans un produit de deux polynômes entiers réduits, s'obtient, sans réduction, en faisant le produit des termes des deux facteurs qui sont de degré le plus élevé, par rapport à la lettre ordonnatrice.*

De même, *le terme de degré le moins élevé du produit s'obtient en faisant le produit des deux termes de degré le moins élevé, des deux facteurs.*

Considérons deux polynômes entiers ordonnés par rapport à la lettre x. Soit Ax^α un terme du multiplicande et Bx^β un terme du multiplicateur. (A et B sont ou des nombres ou des expressions contenant des lettres autres que la lettre x). Le produit

$$Ax^\alpha \times Bx^\beta = ABx^{\alpha+\beta}$$

est un terme du produit de degré $\alpha+\beta$. Or, α est au plus égal au degré p du multiplicande et β est au plus égal au degré q du multiplicateur, le degré $\alpha+\beta$ d'un terme du produit est donc au plus égal à $p+q$ et il n'aura sa plus grande valeur $p+q$ que *dans le seul cas* où $\alpha=p$ et $\beta=q$, c'est-à-dire dans le seul cas où les exposants α et β ont leur plus grande valeur. Le terme de degré



le plus élevé du produit s'obtient donc, *sans réduction avec aucun autre*, en faisant le produit des termes de degré le plus élevé des deux facteurs.

On verrait, de même, que l'exposant $\alpha + \beta$ n'atteint sa plus petite valeur que dans le *seul* cas où α et β ont, chacun, leur plus petite valeur. On obtient donc le terme de plus faible degré du produit en faisant le produit des deux termes de plus faible degré des deux facteurs, et ce terme ne se réduit avec aucun autre.

Dans l'*Exemple I* (n° 40), le terme $2x^5$ de degré le plus élevé dans le produit provient de la multiplication des deux termes $2x^3$ et x^2 de degré le plus élevé dans les deux facteurs; et le terme de plus bas degré (degré zéro) -45 est le produit de -3 par $+15$. Dans l'*Exemple III*, le terme de degré le plus élevé $(a^2 - b^2)x^5$ est le produit des deux termes $(a - b)x^3$ et $(a + b)x^2$ de degré le plus élevé des deux facteurs; et le terme de degré le moins élevé $(a^7 - 3a^6b - 4a^5b^2 + 12a^4b^3 + a^3b^4 - 3a^2b^5)$ est égal au produit de $(a^4 - 4a^2b^2 + b^4)$ par $(a^3 - 3a^2b)$.

Corollaire I. — *Un produit de deux polynômes entiers a toujours au moins deux termes, et, par suite, ne saurait être un monôme.* Car il y a, comme nous venons de le voir, deux termes qui ne se réduisent avec aucun autre; ce sont, le terme obtenu en faisant le produit des termes de degré le plus élevé des deux facteurs et le terme obtenu en faisant le produit des termes de degré le moins élevé.

Remarque. — Il peut, d'ailleurs, arriver que le produit se réduise à ces deux termes dont l'existence est certaine. Ainsi, on a :

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ x - 1 \\ \hline x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x \quad \\ - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 \\ \hline x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad - 1 \end{array}$$

Corollaire II. — *Le degré (par rapport à la lettre ordonnatrice) du produit de deux polynômes entiers est la somme des degrés de ces deux polynômes.*

Car, comme nous venons de le voir, si Ax^p et Bx^q sont les deux termes de degré le plus élevé des deux polynômes, le terme de degré le plus élevé du produit est ABx^{p+q}. Les deux polynômes étant donc, par rapport à la lettre x, respectivement, de degrés p et q, le produit est de degré $p + q$ [1].

[1] Nous rappelons que le *degré* d'un polynôme, *entier en* x, est l'exposant de la plus haute puissance de x qui y figure.

42. Application I. — Carré d'une somme. — *Le carré d'une somme (ou d'un polynôme) est égal à la somme des carrés de ses termes augmentée de la somme des doubles produits de tous ses termes pris deux à deux de toutes les façons possibles.*

1° *Cas du binôme.* Dans le cas où la somme a deux ou trois termes, il est facile de *vérifier* la proposition. On a, en effet,

$$\begin{array}{l} a + b \\ \underline{a + b} \\ a^2 + ab \\ \underline{\quad + ab + b^2} \\ a^2 + 2ab + b^2. \end{array}$$

2° *Cas général.* Pour faire le carré $(a + b + c + d)^2$ d'une somme quelconque il faut faire le produit

$$(a + b + c + d)(a + b + c + d).$$

Les termes de ce produit développé sont de deux sortes. Ceux qu'on obtient en prenant dans chacun des facteurs la même lettre, ce qui donne les carrés a^2, b^2, etc., de ces lettres ; ceux qu'on obtient en prenant dans chacun des facteurs une lettre différente, ce qui donne des produits de la forme ab, bc, etc. Mais chacun de ces produits peut être obtenu deux fois ; ainsi le produit ab peut être obtenu en prenant a dans le premier facteur et b dans le second ou en prenant b dans le premier et a dans le second. Le carré se compose de la somme des carrés $a^2 + b^2 + \ldots$ augmenté des doubles produits $2ab + 2bc + \ldots$.

Remarque. — Pratiquement, pour former le carré d'une somme ou d'un polynôme, on peut procéder de la façon suivante : on écrit, d'abord, la somme des carrés de tous les termes ; on fait les doubles produits du premier terme par tous ceux qui sont à sa droite ; puis les doubles produits du second terme par ceux qui sont à sa droite, et ainsi de suite ; enfin, on arrive à écrire le double produit de l'avant-dernier terme par le dernier.

Lorsque le polynôme est ordonné, il y a souvent avantage à écrire d'abord le carré du premier terme, puis immédiatement la somme des doubles produits de ce terme par les suivants ; on écrit, ensuite, le carré du second terme et la somme des doubles produits de ce second terme par les suivants, et ainsi de suite. On écrit, en dernier lieu, le carré du dernier terme. Le carré se trouve, de cette façon, en général, ordonné.

Corollaire. — *Le carré d'une différence est égal à la somme des carrés des deux parties diminuée du double produit de ces deux parties.*

En effet, la différence $a - b$ peut être considérée comme la somme de a et de $-b$, par suite,

$$(a - b)^2 \equiv a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2.$$

Exemples :

$$\begin{aligned}
(x + y - z)^2 &\equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz;\\
(a + b)^4 &\equiv \left[(a + b)^2\right]^2 \equiv \left(a^2 + 2ab + b^2\right)^2\\
&\equiv a^4 + 4a^3b + 2a^2b^2 + 4a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\\
&\equiv a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.
\end{aligned}$$

En remplaçant b par $-b$, on en conclut :

$$(a - b)^4 \equiv a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

En élevant encore une fois au carré, on a :

$$\begin{aligned}
(a + b)^8 \equiv (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)^2\\
\equiv a^8 + 16a^6b^2 + 36a^4b^4 + 16a^2b^6 + b^8 \quad &\ldots \textit{Somme des carrés}\\
+ 8a^7b + 12a^6b^2 + 8a^5b^3 + 2a^4b^4 \quad &\ldots \textit{1}^{er}\textit{ terme par les suivants}\\
+ 48a^5b^3 + 32a^4b^4 + 8a^3b^5 \quad &\ldots\ldots \textit{2}^{e}\textit{ terme par les suivants}\\
+ 48a^3b^5 + 12a^2b^6 \quad &\ldots\ldots \textit{3}^{e}\textit{ terme par les suivants}\\
+ 8ab^7 \quad &\ldots\ldots \textit{4}^{e}\textit{ terme par le dernier}
\end{aligned}$$

(Doubles produits du)

$$\equiv a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

Application II. — Produit d'une somme de deux nombres par leur différence. — *Le produit d'une somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence des carrés de ces deux nombres.*

Car on a :

$$\begin{array}{r}
a + b\\
a - b\\
\hline
a^2 + ab\\
- ab - b^2\\
\hline
a^2 \qquad - b^2.
\end{array}$$

Donc, $$(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2.$$

Remarque. — Cette proposition sert surtout à transformer une différence de carrés en produit. Ainsi, on a :

$$\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 \equiv \left(\frac{x + y + x - y}{2}\right)\left(\frac{x + y - x + y}{2}\right) \equiv xy.$$

EXEMPLE :

Soit à transformer le produit

$$P \equiv (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c).$$

Le produit des deux premiers facteurs est :

$$(b + c)^2 - a^2$$

et celui des deux derniers :

$$[a - (b - c)][a + (b - c)] \equiv a^2 - (b - c)^2.$$

Donc,

$$\begin{aligned} P &\equiv [(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2] \\ &\equiv (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(a^2 - b^2 + 2bc - c^2) \\ &\equiv [2bc + (b^2 + c^2 - a^2)][2bc - (b^2 + c^2 - a^2)] \\ &\equiv 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\ &\equiv 4b^2c^2 - (b^4 + c^4 + a^4 + 2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2) \\ &\equiv 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4. \end{aligned}$$

Application III. — Identité de Lagrange. — *L'identité de Lagrange est la suivante :*

$$(a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) - (a\alpha + b\beta)^2 \equiv (a\beta - b\alpha)^2.$$

Pour *vérifier* une identité, il suffit de prouver que les deux membres sont des expressions équivalentes et, pour cela, que l'on peut passer de l'une à l'autre par des transformations permises ou, encore, qu'elles sont équivalentes à une même expression. Dans le cas présent, on a :

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) &\equiv a^2\alpha^2 + a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 + b^2\beta^2, \\ (a\alpha + b\beta)^2 &\equiv a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + 2a\alpha b\beta. \end{aligned}$$

Donc :

$$(a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) - (a\alpha + b\beta)^2 \equiv a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - 2a\alpha b\beta$$

et le second membre est précisément le développement du carré de $(a\beta - b\alpha)$.

On a, de même, l'*Identité de Lagrange* plus générale suivante :

$$\begin{aligned} &(a^2 + b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 \\ &\equiv (a\beta - b\alpha)^2 + (a\gamma - c\alpha)^2 + (b\gamma - c\beta)^2 \end{aligned}$$

que l'on vérifie en développant les deux membres qui sont tous deux équivalents à l'expression

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 + a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2 + b^2\gamma^2 + c^2\beta^2 - 2ab\alpha\beta - 2ac\alpha\gamma - 2bc\beta\gamma.$$

Dans cette identité figurent deux groupes, de trois lettres chacun, a, b, c et α, β, γ. On aurait une identité analogue avec deux groupes, de quatre lettres chacun, a, b, c, d et α, β, γ, δ. Plus généralement, avec deux groupes ayant, chacun, le même nombre de lettres (Voir l'exercice 18).

EXERCICES

16. Effectuer les produits suivants :

$$(1+x^2+x\sqrt{2})(1+x^2-x\sqrt{2}) \;;$$
$$(1+x^2)(1+x^2+x\sqrt{3})(1+x^2-x\sqrt{3}) \;;$$
$$(x^4-ax^3+bx^2-cx+d)(x^4+ax^3-bx^2+cx-d) \;;$$
$$(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2 \;.$$

17. Développer et simplifier les expressions suivantes :

$$(x+y+z)^2-(x+y-z)^2+(x-y+z)^2-(y+z-x)^2 \;;$$
$$(a+b)(b+c)-(c+d)(d+a)-(a+c)(b-d) \;.$$

18. Vérifier les identités suivantes :

$$4\left[(ac'-ca')^2-(bc'-cb')(ab'-ba')\right]\equiv(2ac'+2ca'-bb')^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c') \;;$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)-(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)^2\equiv$$
$$(a\beta-b\alpha+c\delta-d\gamma)^2+(a\gamma-c\alpha+d\beta-b\delta)^2+(a\delta-d\alpha+b\gamma-c\beta)^2 \;;$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)-(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)^2\equiv$$
$$(a\beta-b\alpha)^2+(c\delta-d\gamma)^2+(a\gamma-c\alpha)^2+(d\beta-b\delta)^2+(a\delta-d\alpha)^2+(b\gamma-c\beta)^2$$

(LAGRANGE).

$$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)\equiv3(y+z)(z+x)(x+y) \;;$$
$$(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2-(x^2+y^2+z^2)\equiv(x+y+z)^2 \;;$$
$$(x+y)(x+z)-x^2\equiv(y+z)(y+x)-y^2\equiv(z+x)(z+y)-z^2 \;;$$
$$4(ax+by+cz)^3-3(ax+by+cz)(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$-2(b-c)(c-a)(a-b)(y-z)(z-x)(x-y)-54abcxyz\equiv0$$

(CAYLEY).

19. Si on pose :

$$\begin{aligned} a+b+c+d&=A,\\ a+b-c-d&=B,\\ a-b+c-d&=C,\\ a-b-c+d&=D \end{aligned}$$

et si l'on a, en même temps,

$$ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2),$$

on propose de vérifier l'égalité

$$AB(A^2+B^2)=CD(C^2+D^2)$$

(J. BERTRAND).

20. Si on pose :

$$\begin{aligned} x+y+z&=\mathrm{P},\\ yz+zx+xy&=\mathrm{Q},\\ xyz&=\mathrm{R}, \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned} \mathrm{A}&=x(nyz+\mathrm{Q})-\omega^2(mx+\mathrm{P}),\\ \mathrm{B}&=y(nzx+\mathrm{Q})-\omega^2(my+\mathrm{P}),\\ \mathrm{C}&=z(nxy+\mathrm{Q})-\omega^2(mz+\mathrm{P}),\\ \mathrm{D}&=-mn\mathrm{R}+\mathrm{PQ}\ , \end{aligned}$$

prouver que l'on a les identités :

$$\begin{aligned} (mz+\mathrm{P})\,\mathrm{B}-(my+\mathrm{P})\,\mathrm{C}&\equiv(y-z)\,\mathrm{D},\\ (mx+\mathrm{P})\,\mathrm{C}-(mz+\mathrm{P})\,\mathrm{A}&\equiv(z-x)\,\mathrm{D},\\ (my+\mathrm{P})\,\mathrm{A}-(mx+\mathrm{P})\,\mathrm{B}&\equiv(x-y)\,\mathrm{D},\\ \mathrm{A}(y-z)+\mathrm{B}(z-x)+\mathrm{C}(x-y)&\equiv 0 \end{aligned}$$

(CAYLEY).

21. Démontrer que l'on a l'identité

$$x^3+y^3\equiv z^3+u^3$$

lorsqu'on prend, soit :

$$\begin{aligned} x&=\ (f^2+3g^2)^2-(ff'+3gg'+3fg'-3f'g)(f'^2+3g'^2),\\ y&=-(f^2+3g^2)^2+(ff'+3gg'-3fg'+3f'g)(f'^2+3g'^2),\\ z&=-(f'^2+3g'^2)^2+(ff'+3gg'-3fg'+3f'g)(f^2+3g^2),\\ u&=\ (f'^2+3g'^2)^2+(ff'+3gg'+3fg'-3f'g)(f^2+3g^2) \end{aligned}$$

(EULER).

soit encore :

$$\begin{aligned} x&=\ (a^2+3b^2)^2-a+3b,\\ y&=-(a^2+3b^2)^2+a+3b,\\ z&=\ (a^2+3b^2)(a+3b)-1,\\ u&=-(a^2+3b^2)(a-3b)+1. \end{aligned}$$

(BINET).

22. Prouver les identités :

$$(x+y)^3-x^3-y^3\equiv 3xy(x+y);$$
$$(x+y)^5-x^5-y^5\equiv 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2);$$
$$(x+y)^7-x^7-y^7\equiv 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2;$$
$$(x+y)^9-x^9-y^9\equiv 3xy(x+y)\left[3(x^2+xy+y^2)^3+x^2y^2(x+y)^2\right];$$
$$(x+y)^{11}-x^{11}-y^{11}\equiv 11xy(x+y)(x^2+xy+y^2)\left[(x^2+xy+y^2)^3+2x^2y^2(x+y)^2\right];$$
$$(x+y)^{13}-x^{13}-y^{13}\equiv 13xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2\left[(x^2+xy+y^2)^3+2x^2y^2(x+y)^2\right]$$

(CAUCHY).

23. Lorsque

$$a+b+c=0,$$

on a :

$$\begin{aligned} 10(a^7+b^7+c^7)&=7(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5),\\ 2(a^7+b^7+c^7)&=7abc(a^4+b^4+c^4),\\ 6(a^7+b^7+c^7)&=7(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4),\\ a^6+b^6+c^6&=3a^2b^2c^2+(a^2+b^2+c^2)^3. \end{aligned}$$

Lorsque a, b, c, d satisfont à la relation

$$a + b + c + d = 0,$$

on a aussi les égalités,

$$ad(a+d)^2 + bc(a-d)^2 + ab(a+b)^2 + cd(a-b)^2 + ac(a+c)^2 + bd(a-c)^2 + 4abcd = 0 ,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 9(bcd + cda + dab + abc)^2 = 9(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd)$$

(SMITH).

24. Démontrer que le cube d'un polynôme est égal à la somme des cubes de ses termes, plus trois fois la somme des produits de l'un des termes par le carré d'un autre, plus six fois les produits des termes trois à trois.

25. Effectuer les produits

$$(1+ax)(1+a^2x) ;$$
$$(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x) ;$$

plus généralement, effectuer le produit

$$(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)\dots(1+a^mx)$$

et ordonner ce produit suivant les puissances croissantes de x. Donner l'expression générale du coefficient de x^p dans ce développement. Que deviennent ces coefficients quand a tend vers 1? En conclure le développement de

$$(1+x)^m$$

suivant les puissances croissantes de x

(CAUCHY).

CHAPITRE VI

DIVISION DES MONOMES ET POLYNOMES

43. Pour faire le quotient d'un monôme par un monôme, il suffit d'indiquer l'opération en écrivant le diviseur au-dessous du dividende et en les séparant par un trait horizontal. Cette opération n'introduisant ni le signe (+) ni le signe (—), il en résulte que *le quotient de deux monômes est un monôme.*

Le quotient de deux monômes entiers *n'est pas, en général, un monôme entier*; mais si les deux monômes contiennent des lettres communes, on pourra simplifier la fraction obtenue en divisant les deux termes par les lettres communes.

Ainsi, le quotient de $4a^2bc^3$ par $\frac{2}{3}ab^2d$ est : $\frac{12\,a^2bc^3}{2\,ab^2d}$, fraction qui

peut se simplifier et s'écrire :

$$\frac{6a^3c^2}{bd},$$

en divisant les deux termes par $2ab$ (n° 18, *Th. I*).

Il peut arriver, en particulier, qu'après la simplification, il n'y ait plus aucune lettre en dénominateur. Dans ce cas, le quotient est un monôme *entier*.

Ainsi,
$$\frac{4a^3b^4c^2}{3ab^2c} = \frac{4}{3}a^2b^2c.$$

Il est d'ailleurs facile de voir que *la condition nécessaire et suffisante pour que le quotient de deux monômes entiers soit équivalent à un monôme entier, est que le dividende contienne toutes les lettres qui figurent dans le diviseur, chacune d'elles étant affectée d'un exposant au moins égal à celui qu'elle a dans le diviseur*[1].

44. Pour diviser un polynôme par un monôme, il suffit de diviser chacun des termes du polynôme par ce monôme, puisque (n° 20, *Cor. du Th. I*) pour diviser une somme algébrique par un nombre il suffit de diviser chacun des termes par ce nombre. Il en résulte que le quotient d'un polynôme par un monôme est un polynôme.

Le quotient d'un polynôme entier par un monôme entier n'est pas, en général, un polynôme entier, car chacun des termes du quotient ne sera pas, en général, un monôme entier. Ainsi :

$$\frac{4x^4 - 2ax^3 + 3a^2x^2 + a^4}{5ax^2} = \frac{4}{5}\frac{x^2}{a} - \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}a + \frac{1}{5}\frac{a^3}{x^2}.$$

Cependant, dans certains cas particuliers, ce quotient pourra être un polynôme entier. On a, par exemple,

$$\frac{\frac{2}{3}a^2x^3 - 5a^3x^2 + 2a^4x}{6a^2x} = \frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{6}ax + \frac{1}{3}a^2.$$

45. Le quotient de deux polynômes est une expression algébrique fractionnaire qu'on obtient en indiquant la division de ces deux polynômes.

Le quotient de deux polynômes *entiers* est, *dans le cas le plus général*, une expression *fractionnaire;* mais, dans certains cas particuliers, il peut arriver que cette expression soit *équivalente* à un

(1) Cette proposition est tout à fait analogue à celle qui donne en arithmétique la condition nécessaire et suffisante pour que deux nombres, décomposés en leurs facteurs premiers, soient divisibles l'un par l'autre (Voir, dans l'*Arithmétique* de M. Tannery, le n° 164).

certain polynôme entier. Des exemples de ce cas particulier sont faciles à construire. En effet, si on fait le produit de deux polynômes entiers, ce produit sera équivalent à un polynôme entier dont le quotient par l'un des facteurs est évidemment équivalent à l'autre facteur. On a :

$$(x^2 + ax + a^2)(x - a) \equiv x^3 - a^3,$$

on en conclut que

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a} \equiv x^2 + ax + a^2.$$

Définition. — Lorsque le quotient de deux polynômes entiers est équivalent à un polynôme entier, c'est-à-dire *lorsqu'il existe un polynôme entier, appelé* Quotient, *dont le produit par le polynôme* Diviseur, *effectué par la règle du n° 40, est égal, termes à termes, au polynôme* Dividende, on dit que la *division* du polynôme dividende par le polynôme diviseur est *possible*, ou encore que le polynôme dividende est *divisible* par le polynôme diviseur. La recherche du polynôme *quotient* est ce qu'on appelle *l'opération de la division.*

Opération de la division. — La recherche du quotient de deux polynômes, lorsque la division est possible, repose sur les deux propositions suivantes :

1° *Les polynômes dividende, diviseur et quotient étant ordonnés dans le même sens, par rapport à la même lettre, on obtient le premier terme du quotient en divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur.*

Supposons, en effet, les trois polynômes ordonnés suivant les puissances décroissantes de la lettre ordonnatrice. Le dividende étant égal, *termes à termes*, au produit du diviseur par le quotient, le terme de degré le plus élevé, c'est-à-dire le premier terme du dividende est égal (n° 41, *Th. II*) au produit du terme de degré le plus élevé du diviseur par le terme de degré le plus élevé du quotient. Par suite, le premier terme du quotient est égal au quotient du premier terme du dividende par le premier terme du diviseur.

Il en serait de même si les trois polynômes étaient ordonnés suivant les puissances croissantes. Car, dans ce cas, les premiers termes des polynômes seraient les termes de plus faible degré, et le terme de plus faible degré du dividende serait aussi égal au produit du terme de plus faible degré du quotient par le terme de plus faible degré du diviseur.

2° *Lorsqu'on connaît un certain nombre des premiers termes du quotient, si on retranche du dividende le produit du diviseur par le*

polynôme formé par les termes connus, on obtient un polynôme qu'on appelle Reste partiel. *Le terme suivant du quotient s'obtient en divisant le premier terme de ce Reste partiel (supposé ordonné dans le même sens que le diviseur) par le premier terme du diviseur.*

Soient, en effet, A le polynôme dividende, B le polynôme diviseur et Q le polynôme quotient. On a, par définition,

$$A \equiv BQ.$$

Supposons qu'on connaisse un certain nombre des premiers termes du quotient et soit Q' le polynôme formé par ces termes. Désignons par Q'' le polynôme formé par les termes restants du quotient. On aura, évidemment,

$$Q \equiv Q' + Q''$$

et, par suite,

$$A \equiv B(Q' + Q''),$$

ce qui s'écrit

$$A \equiv BQ' + BQ'',$$

ou encore :

$$A - BQ' \equiv BQ''.$$

A, B et Q' étant des polynômes entiers, $A - BQ'$ est aussi un polynôme entier que nous nommons *reste partiel*. La deuxième identité nous prouve que *le polynôme Q'' est le quotient de ce reste partiel par le diviseur* B. Or, le premier terme de Q'' est précisément le terme du quotient Q qui suit les termes connus et, d'après ce qui précède, le premier terme de Q'' s'obtient en divisant le premier terme du reste par le premier terme du diviseur. Par suite, le terme suivant du quotient s'obtient en divisant le premier terme du reste partiel par le premier terme du diviseur.

Remarque. — Nous appellerons *premier reste partiel* le reste obtenu en retranchant du dividende le produit du diviseur par le premier terme du quotient; *deuxième reste partiel* l'excès du dividende sur le produit du diviseur par la somme des *deux* premiers termes du quotient. D'une manière générale, le $k^{\text{ième}}$ *reste partiel* est l'excès du dividende sur le produit du diviseur par la somme des k premiers termes du quotient. Il est aisé de voir que les restes partiels se déduisent facilement les uns des autres. Supposons, en effet, qu'on ait formé le $k^{\text{ième}}$ reste : pour obtenir le $(k+1)^{\text{ième}}$ reste, il faut, par définition, retrancher du dividende le produit du diviseur par le polynôme formé par les $(k+1)$ premiers termes du

quotient. Or, ce produit est la somme du produit du diviseur par la somme des k premiers termes et du produit du diviseur par le $(k+1)^{\text{ième}}$ terme du quotient. Comme, pour retrancher une somme il suffit de retrancher successivement chacune des parties (n° 10, *Th. IV*), pour obtenir le $(k+1)^{\text{ième}}$ reste, on pourra retrancher du dividende d'abord le produit du diviseur par la somme des k premiers termes du quotient (ce qui donne le $k^{\text{ième}}$ reste), puis, de ce résultat, le produit du diviseur par le $(k+1)^{\text{ième}}$ terme du quotient. Ceci revient donc à dire que *l'on obtient le $(k+1)^{\text{ième}}$ reste en retranchant du $k^{\text{ième}}$ reste le produit du diviseur par le $(k+1)^{\text{ième}}$ terme du quotient.*

Des deux propositions précédentes et de cette remarque résulte immédiatement la *règle* suivante pour former le quotient de deux polynômes, lorsque la division est possible :

Règle. — *Lorsque la division de deux polynômes entiers est possible, on obtient le quotient de ces deux polynômes de la façon suivante :*

On ordonne les deux polynômes, dans le même sens, par rapport à la même lettre. Le premier terme du quotient est le quotient du premier terme du dividende par le premier terme du diviseur. On retranche du dividende le produit du diviseur par le premier terme et on obtient le premier reste partiel. Le second terme du quotient s'obtient en divisant le premier terme du premier reste partiel par le premier terme du diviseur. On retranche du premier reste le produit du diviseur par le second terme du quotient, ce qui donne le second reste partiel. Le troisième terme du quotient s'obtient en divisant le premier terme du second reste par le premier terme du diviseur. On forme le troisième reste partiel en retranchant du second reste le produit du diviseur par le troisième terme, et ainsi de suite. Le produit du dernier terme du quotient par le diviseur reproduit, exactement, le dernier reste partiel.

Remarque I. — On peut *a priori* connaître le *dernier* terme du quotient : c'est, évidemment, le quotient du dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur.

Remarque II. — *Le degré du quotient est l'excès du degré du dividende sur le degré du diviseur.* Car si m, p et q sont, respectivement, les degrés du dividende, du diviseur et du quotient, comme le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient, son degré est la somme des degrés du diviseur et du quotient (n° 41, *Cor. II*). Donc

$$m = p + q,$$

d'où

$$q = m - p.$$

46. Disposition de l'opération. — Pratiquement, on dispose l'opération de la division de la façon suivante : après avoir ordonné les deux polynômes dans le même sens, on écrit le polynôme diviseur à la droite du dividende. On calcule le premier terme du quotient, qu'on écrit au-dessous du diviseur, et on fait le produit du diviseur par ce premier terme. D'après la *règle* on doit retrancher ce produit du dividende. Pour cela, on dispose l'opération comme une soustraction ordinaire, c'est-à-dire qu'on ajoute au dividende ce polynôme changé de signe (n° 37). On écrit donc, successivement, tous les termes du produit du diviseur par le premier terme du quotient, à mesure qu'on les calcule, au-dessous du dividende, en ayant soin de changer, au préalable, le signe de chaque terme. On tire un trait et on effectue l'addition. On obtient ainsi le premier reste partiel. On opère avec celui-ci comme avec le dividende. On calcule le second terme du quotient, on écrit les produits, changés de signe, des termes du diviseur par le second terme du quotient au-dessous de ce reste partiel ; on fait l'addition, on a le second reste partiel, et ainsi de suite.

Remarque. — Étant donnés deux polynômes quelconques A et B on ne sait pas, *a priori*, si la division est possible. Pour cela on *l'essaie*, c'est-à-dire qu'on commence l'opération comme si elle était possible.

On calcule, d'autre part, le dernier terme du quotient (*Rem. I. précéd.*) et, si la division est possible, lorsqu'on sera amené à écrire au quotient un terme de même degré que celui-ci, ce terme devra être identique à ce dernier terme calculé d'avance et l'opération devra s'arrêter là.

EXEMPLE I. — Soit à diviser le polynôme

$$2x^4 - 45x + x^5 - 14x^3 + 7 + 54x^2$$

par

$$7 - 3x + x^2.$$

J'ordonne les deux polynômes suivant les puissances décroissantes de x :

Dividende.	$x^5+2x^4-14x^3+54x^2-45x+7$	x^2-3x+7	diviseur.
Produit du diviseur par $-x^3$. .	$-x^5+3x^4-7x^3$	x^3+5x^2-6x+1	quotient.
Premier reste partiel.	$5x^4-21x^3+54x^2-45x+7$		
Produit du diviseur par $-5x^2$.	$-5x^4+15x^3-35x^2$		
Second reste partiel.	$-6x^3+19x^2-45x+7$		
Produit du diviseur par $+6x$. .	$+6x^3-18x^2+42x$		
Troisième reste partiel.	x^2-3x+7		
Produit du diviseur par -1. . .	$-x^2+3x-7$		
	0		

Pour simplifier l'écriture, on néglige de recopier, dans chacun des restes partiels, les termes du dividende qui ne se sont réduits avec aucun autre et, alors, la division précédente s'écrit sous la forme simplifiée :

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 2x^4 - 14x^3 + 54x^2 - 45x + 7 & x^2 - 3x + 7 \\
\underline{-x^5 + 3x^4 - 7x^3} & \overline{x^3 + 5x^2 - 6x + 1} \\
\quad 5x^4 - 21x^3 & \\
\quad \underline{-5x^4 + 15x^3 - 35x^2} & \\
\qquad - 6x^3 + 19x^2 & \\
\qquad \underline{6x^3 - 18x^2 + 42x} & \\
\qquad\qquad x^2 - 3x & \\
\qquad\qquad \underline{-x^2 + 3x - 7} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Exemple II.

Soit à diviser

$$\frac{29}{9}a^3y^2 - \frac{41}{3}a^4y + 3y^5 - \frac{205}{6}a^2y^3 + 2a^5$$

par

$$\frac{1}{3}a^2y - 5ay^2 + \frac{3}{2}y^3 - 2a^3.$$

J'ordonne les deux polynômes suivant les puissances *croissantes* de y et, comme dans le dividende il n'y a pas de terme en y^4, j'ai soin de laisser un intervalle pour marquer la place de ce terme absent. On peut calculer d'avance quel devra être le dernier terme du quotient, si la division est possible, c'est :

$$\frac{3y^5}{\frac{3}{2}y^3} = 2y^2.$$

L'opération, avec la simplification d'écriture, est, alors :

$$
\begin{array}{l|l}
2a^5 - \frac{41}{3}a^4y + \frac{29}{9}a^3y^2 - \frac{205}{6}a^2y^3 \qquad + 3y^5 & -2a^3 + \frac{1}{3}a^2y - 5ay^2 + \frac{3}{2}y^3 \\
\underline{-2a^5 + \frac{1}{3}a^4y - 5a^3y^2 + \frac{3}{2}a^2y^3} & \overline{-a^2 + \frac{20}{3}ay + 2y^2} \\
\quad -\frac{40}{3}a^4y - \frac{16}{9}a^3y^2 - \frac{196}{6}a^2y^3 & \\
\quad \underline{+\frac{40}{3}a^4y - \frac{20}{9}a^3y^2 + \frac{100}{3}a^2y^3 - 10ay^4} & \\
\qquad - 4a^3y^2 + \frac{2}{3}a^2y^3 - 10ay^4 & \\
\qquad \underline{+ 4a^3y^2 - \frac{2}{3}a^2y^3 + 10ay^4 - 3y^5} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

47. Généralisation. — Étant donnés deux polynômes *quelconques*, A et B, entiers en x, il n'existe pas, en général, un polynôme Q, entier en x, dont le produit par B, effectué suivant la règle du n° 40, soit égal, termes à termes, au polynôme A; mais, si on ordonne les deux polynômes A et B suivant les puissances *décroissantes* de x, on pourra toujours commencer l'opération de la division, comme si elle était possible, pourvu que le degré du polynôme B ne surpasse pas celui du polynôme A. En suivant, pas à pas, la *règle* énoncée pour calculer le quotient, on formera une suite de polynômes entiers qui sont les *restes partiels* et on calculera une suite de termes qui formeraient le quotient si la division était possible.

Il est, d'abord, aisé de se rendre compte que les degrés des restes successifs vont en diminuant. En effet, d'après la façon même dont il a été calculé, le premier terme du quotient hypothétique est tel que le premier terme de son produit par le diviseur est égal au premier terme du dividende. Lorsqu'on retranche ce produit du dividende, les termes du degré le plus élevé disparaissent et, par suite, le premier reste est de degré inférieur au degré du dividende. De même, le produit du second terme du quotient par le diviseur a, d'après le calcul même de ce terme, son premier terme égal au premier terme du premier reste. Donc, lorsqu'on retranche ce produit du premier reste, pour former le second reste, les deux premiers termes se détruisent et le degré du second reste est, par suite, inférieur au degré du premier reste. Et, ainsi de suite. On voit que le degré de chaque reste est *au moins* inférieur *d'une* unité au degré du reste précédent.

Cela étant, pour qu'après avoir calculé un certain nombre de termes au quotient, on puisse continuer l'opération, il faut et il suffit que le premier terme du reste correspondant soit divisible par le premier terme du diviseur. Pour cela, il faut et il suffit que le degré du premier terme de ce reste, qui est son degré, ne soit pas inférieur au degré du premier terme du diviseur, c'est-à-dire au degré du diviseur. Or, comme les degrés des restes successifs vont en diminuant, si, au bout d'un certain nombre d'opérations, on n'arrive pas à un reste identiquement nul, auquel cas la division est possible, on parviendra, nécessairement, à un reste de degré inférieur au degré du diviseur et l'opération sera arrêtée.

D'ailleurs, comme chaque reste est, par définition, l'excès du dividende sur le produit du diviseur par le polynôme formé par les termes calculés au quotient, cela sera encore vrai pour le dernier reste et on en conclut la proposition suivante :

Étant donnés deux polynômes quelconques A et B, *entiers en* x (*le degré du polynôme* A *n'étant pas inférieur au degré du polynôme* B), *il existe un polynôme* Q, *entier en* x, *tel que la différence* A — BQ *soit un polynôme de degré inférieur à celui de* B.

Le polynôme Q *s'obtient en effectuant sur les deux polynômes* A et B, *ordonnés suivant les puissances décroissantes de* x, *l'opération de la division de* A *par* B, *comme si cette division était possible, jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste de degré inférieur à celui du polynôme* B.

Remarque. — Tout ce qui précède suppose, *essentiellement*, que les deux polynômes A et B sont ordonnés suivant les puissances *décroissantes* de x. Si on ordonnait, au contraire, les polynômes suivant les puissances croissantes et, si la division n'était pas possible, ou bien l'opération ne pourrait même pas être commencée (si le terme de plus bas degré du diviseur était de degré supérieur au terme de plus bas degré du dividende), ou bien elle pourrait se poursuivre indéfiniment, car les degrés des premiers termes des restes iraient sans cesse en augmentant.

Ainsi, par exemple, on ne peut même pas commencer la division du polynôme

$$1 + x + x^2 + x^3$$

par le polynôme $\qquad 2x - x^2 + 5x^3,$

puisque le premier terme 1 du dividende n'est pas divisible par le premier terme $2x$ du diviseur.

Au contraire, l'opération de la division du second polynôme par le premier se poursuivrait sans limite; cette opération est, en effet, la suivante :

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2x & -\ x^2 & +\ 5x^3 & & & & 1 + x + x^2 + x^3 \\
\hline
-2x & -\ 2x^2 & -\ 2x^3 & -\ 2x^4 & & & 2x - 3x^2 + 6x^3 + \ldots \\
\hline
 & -\ 3x^2 & +\ 3x^3 & -\ 2x^4 & & & \\
 & +\ 3x^2 & +\ 3x^3 & +\ 3x^4 & +3x^5 & & \\
\hline
 & & 6x^3 & +\ x^4 & +\ 3x^5 & & \\
 & & -\ 6x^3 & -\ 6x^4 & -\ 6x^5 & -\ 6x^6 & \\
\hline
 & & & -\ 5x^4 & -\ 3x^5 & -\ 6x^6 & \\
 & & & & \text{etc....} & &
\end{array}$$

Définition. — *Étant donnés deux polynômes entiers* A *et* B, *le degré de* A *n'étant pas inférieur au degré de* B, *on désigne sous le nom de* **partie entière du quotient** *de* A *par* B *un polynôme* Q *tel que la différence* A — BQ, *effectuée et réduite suivant les règles énoncées plus haut, soit un polynôme de degré inférieur à celui de* B.

L'excès du dividende A *sur le produit du diviseur* B *par la partie*

entière du quotient Q *est ce qu'on appelle le* reste *de la division de* A *par* B.

L'existence du polynôme Q répondant à cette définition a été prouvée dans ce qui précède ; car on a montré que, si on ordonne les deux polynômes A et B par rapport aux puissances *décroissantes*, on obtient, en effectuant *l'opération de la division* de A par B jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste de degré inférieur au degré de B, un polynôme Q satisfaisant à ces conditions. Cependant, pour que la définition précédente soit tout à fait légitime, il faut encore montrer qu'il n'y a *qu'un seul* polynôme Q qui y satisfait. Or, en reprenant, pas à pas, la théorie de la division on montrerait que *tout* polynôme Q, tel que A — BQ soit de degré inférieur au degré de B, a, nécessairement, pour termes ceux qu'on obtient en effectuant la division de A par B. Le polynôme obtenu par cette opération est donc *le seul* qui réponde à la définition.

Remarque I. — Q étant la partie entière du quotient du polynôme A par le polynôme B et R le reste de la division, on a, par définition,

$$A \equiv BQ + R \qquad (1)$$

et

$$\textit{degré de } R < \textit{degré de } B \qquad (2).$$

L'identité (1), *jointe à l'inégalité* (2), est ce qu'on appelle l'identité de la division. Il résulte de ce que nous avons dit qu'il n'y a *qu'un seul* couple de polynômes entiers Q et R vérifiant cette identité, ou, plus exactement, tels que, si on effectue le produit BQ par la règle du n° 40 et la somme BQ + R par la règle du n° 36, les deux membres de l'identité (1) soient égaux termes à termes.

Remarque II. — Pour abréger le langage, on donne souvent le nom de *quotient* à la *partie entière du quotient* de deux polynômes entiers, lorsque cette dénomination ne peut donner lieu à aucune ambiguïté.

Remarque III. — Lorsque la division est *possible*, c'est-à-dire lorsque le polynôme A est *divisible* par le polynôme B, la partie entière du quotient est égale à ce quotient lui-même et le reste de la division est *identiquement nul*, c'est-à-dire que tous ses termes sont nuls.

Exemple I.

Soit à calculer le quotient et le reste de la division de

$$3x^4 - 5x^2 + 6x + 1$$

par

$$x^2 - 3x + 4.$$

L'opération est la suivante :

$$
\begin{array}{rrrrl|l}
3x^4 & & -\ 5x^2 & +\ 6x & +\ 1 & x^2 - 3x + 4 \\
\cline{6-6}
-\ 3x^4 & +\ 9x^3 & -\ 12x^2 & & & 3x^2 + 9x + 10 \\
\cline{1-3}
 & 9x^3 & -\ 17x^2 & & & \\
 & -\ 9x^3 & +\ 27x^2 & -\ 36x & & \\
\cline{2-4}
 & & +\ 10x^2 & -\ 30x & & \\
 & & -\ 10x^2 & +\ 30x & -\ 40 & \\
\cline{3-5}
 & & & & -\ 39 &
\end{array}
$$

La partie entière du quotient est donc $3x^2 + 9x + 10$ et le reste -39 [qui, étant indépendant de x, est de degré *zéro*]. On a donc l'identité :

$$3x^4 - 5x^2 + 6x + 1 \equiv (x^2 - 3x + 4)\,(3x^2 + 9x + 10) - 39.$$

Exemple II.

Soit à diviser

$$(a - b)x^4 - 2(a^2 - b^2)x^3 + (2a^3 - a^2b + ab^2)x^2 - 2(a^4 + b^4)x + a^5 + b^5$$

par
$$x^2 - 2(a + b)x + a^2 + b^2.$$

Nous disposerons l'opération ainsi :

$$
\begin{array}{r|r|r|r|r|r||r|r}
a & x^4 \ -2a^2 & x^3 \ +2a^3 & x^2 \ -2a^4 & x \ +a^5 & & x^2 \ -2a & x \ +a^2 \\
-b & +2b^2 & -a^2b & -2b^4 & +b^5 & & -2b & +b^2 \\
\cline{7-8}
 & & +ab^2 & & & & a & x^2 \ +a^3 \\
-a & +2a^2 & -a^3 & & & & -b & +b^3 \\
+b & +2ab & -ab^2 & & & & & \\
 & -2ab & +a^2b & & & & & \\
 & -2b^2 & +b^3 & & & & & \\
\cline{1-3}
 & & a^3 & x^2 & & & & \\
 & & +b^3 & & & & & \\
 & & -a^3 & +2a^4 & -a^5 & & & \\
 & & -b^3 & +2a^3b & -a^3b^2 & & & \\
 & & & +2ab^3 & -a^2b^3 & & & \\
 & & & +2b^4 & -b^5 & & & \\
\cline{3-5}
 & & & 2a^3b & x \ -a^3b^2 & & & \\
 & & & +2ab^3 & -a^2b^3 & & &
\end{array}
$$

La partie entière du quotient est donc :

$$(a - b)x^2 + a^3 + b^3$$

et le reste :

$$2\,(a^3b + ab^3)x - a^3b^2 - a^2b^3.$$

48. Théorème I. — *Le reste de la division d'un polynôme, entier*

en x, *par* x — a *est égal au nombre que l'on obtient en donnant, dans ce polynôme, à* x, *la valeur* a.

Soit, en effet, $P(x)$ un polynôme entier en x, ordonnons-le suivant les puissances décroissantes de x et divisons-le par $x - a$. La partie entière du quotient sera un certain polynôme, entier en x, $Q(x)$, et le reste R, étant de degré inférieur au degré du diviseur (qui est du premier degré), sera de degré *zéro*, c'est-à-dire *indépendant de* x. On a donc, en écrivant l'identité de la division (n° 47, *Rem.* I),

$$P(x) \equiv Q(x)\ (x - a) + R.$$

Cette égalité, étant une identité, a lieu quelle que soit la valeur attribuée à x, en particulier si on donne à x la valeur a. On a donc, en remplaçant x par a et remarquant que cette substitution ne change pas R qui est une constante,

$$P(a) = Q(a)\ (a - a) + R$$

et, comme

$$a - a = 0,$$

$$P(a) = R.$$

Ce qui montre que R est égal à la valeur numérique $P(a)$ du polynôme $P(x)$, pour $x = a$.

Corollaire. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme, entier en* x, *soit divisible par* x — a *est que ce polynôme s'annule lorsqu'on donne à* x *la valeur* a.

Car la condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $P(x)$, entier en x, soit divisible par $x - a$ est que le reste de la division soit *identiquement nul* (n° 47, *Rem.* III). Or, ce reste étant $P(a)$, d'après ce qui précède, la condition est :

$$P(a) = 0.$$

Exemples. — Le reste de la division du polynôme

$$x^5 - 3x^2 + 2x - 4 \quad \text{par} \quad x - 1$$

est :

$$1 - 3 + 2 - 4 = -4.$$

Le reste de la division de

$$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \quad \text{par} \quad x - a$$

est :

$$a^3 - 3a^3 + 3a^3 - a^3 = 0.$$

Le polynôme proposé est donc *divisible* par $x - a$.

Remarque. — *Le reste de la division d'un polynôme, entier en* x, *par* x + a *s'obtient en remplaçant, dans ce polynôme,* x *par* — a.

Car $x + a$ peut s'écrire $x - (-a)$.

Exemple. — Le reste de la division de

$$x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 7 \quad \text{par} \quad x + 1$$

est : $(-1)^4 - 5(-1)^3 - 2(-1)^2 - 7 = 1 + 5 - 2 - 7 = -3.$

Théorème II. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme, entier en* x, *soit divisible par le produit* (x — a)(x — b)(x — c), a, b, c *étant trois nombres différents, est qu'il soit divisible séparément par* x — a, x — b *et* x — c.

1° La condition est, évidemment, nécessaire : car si un polynôme, entier en x, est divisible par le produit $(x-a)(x-b)(x-c)$, il est équivalent à

$$(x-a)(x-b)(x-c)\,Q(x),$$

$Q(x)$ étant un polynôme entier; ce qui montre que ce polynôme est équivalent au produit de $x-a$ par le polynôme $(x-b)(x-c)Q(x)$, c'est-à-dire divisible par $x-a$. De même pour $x-b$ et $x-c$.

2° La condition est suffisante. Soit $P(x)$ un polynôme entier en x divisible séparément par $x-a$, $x-b$ et $x-c$. Soit $Q(x)$ le quotient de $P(x)$ par $x-a$. On a :

$$P(x) \equiv (x-a)\,Q(x) \qquad (1).$$

Dans cette identité, donnons à x la valeur b; on aura :

$$P(b) = (b-a)\,Q(b).$$

Or, $P(x)$ étant divisible par $x-b$, $P(b)$ est nul; par suite, on a

$$0 = (b-a)\,Q(b)$$

et, comme, b étant différent de a, $b-a$ n'est pas nul, ceci entraîne

$$Q(b) = 0.$$

Le polynôme $Q(x)$ s'annule pour $x = b$, il est donc divisible par $x-b$. Soit $Q'(x)$ le quotient de $Q(x)$ par $(x-b)$. On a :

$$Q(x) \equiv (x-b)\,Q'(x)$$

et, par suite, en remplaçant $Q(x)$ par $(x-b)\,Q'(x)$ dans l'identité (1), on a

$$P(x) \equiv (x-a)(x-b)\,Q'(x) \qquad (2).$$

Dans cette nouvelle identité, donnons à x la valeur c; on a :

$$P(c) = (c-a)(c-b)\,Q'(c).$$

Comme $P(x)$ est divisible par $x - c$, $P(c)$ est nul, par suite,

$$0 = (c - a)(c - b)\,Q'(c)$$

et, comme $c - a$ et $c - b$ sont différents de zéro, ceci entraîne

$$Q'(c) = 0.$$

Le polynôme $Q'(x)$ est donc divisible par $x - c$ et si on désigne par $Q''(x)$ son quotient par $x - c$, qui est un polynôme entier, on a :

$$Q'(x) \equiv (x - c)\;Q''(x)$$

d'où, en remplaçant $Q'(x)$ par $(x - c)\,Q''(x)$ dans l'identité (2), on a

$$P(x) \equiv (x - a)\,(x - b)\,(x - c)\,Q''(x).$$

On voit ainsi immédiatement que $P(x)$ est égal au produit de $(x - a)\,(x - b)\,(x - c)$ par un polynôme entier et, par suite, que $P(x)$ est divisible par $(x - a)\,(x - b)\,(x - c)$.

Remarque. — Nous avons fait la démonstration du théorème précédent pour le cas de *trois* facteurs binômes $x - a$, $x - b$, $x - c$. Il est clair que cette démonstration réussirait pour le cas d'un nombre quelconque de facteurs et on peut dire d'une façon générale que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme, entier en x, *soit divisible par le produit de plusieurs facteurs binômes différents* x — a, x — b, x — c, ... x — l, *est qu'il soit divisible séparément par chacun de ces facteurs.*

Corollaire. — *Lorsqu'un polynôme entier en* x, *de degré* m, *s'annule pour* m *valeurs différentes* a, b, c, ... l *attribuées à* x, *il est équivalent au produit*

$$A\,(x - a)\,(x - b)\,(x - c)\,\ldots\,(x - l)$$

du coefficient A *de son terme de degré le plus élevé par le produit des binômes* x — a, x — b, x — c, ... x — l.

Car le polynôme, étant divisible, séparément, par les binômes $x - a$, $x - b$, $x - c$, ... $x - l$, est divisible par leur produit. Or, ce produit est un polynôme, entier en x, de degré m. Le quotient du polynôme proposé par ce produit est donc (nº 46, *Rem.* II) de degré $m - m = 0$. Le quotient est donc une *constante* A et le polynôme est équivalent au produit

$$A\,(x - a)\,(x - b)\,(x - c)\,\ldots\,(x - l).$$

D'ailleurs, le terme de degré le plus élevé de ce produit, et, par suite,

du polynôme donné, est Ax^m. Donc A est le coefficient du terme de degré le plus élevé du polynôme.

Exemples. — 1°. Le polynôme

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$$

s'annule pour $x = 1$ et $x = 2$, il est donc divisible par le produit :

$$(x - 1)(x - 2) \equiv x^2 - 3x + 2.$$

On a, en effet :

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \equiv (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 1).$$

2° Le trinôme du second degré

$$2x^2 - 13x + 15$$

s'annule par $x = \frac{3}{2}$ et $x = 5$, il est donc divisible par le produit $\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 5)$ et on a (*Th. II, Coroll.*) :

$$2x^2 - 13x + 15 \equiv 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 5).$$

Théorème III. — *Lorsqu'un polynôme entier réduit est équivalent à zéro, il est identiquement nul, c'est-à-dire que ses coefficients sont tous nuls.*

Supposons, en effet, que le polynôme entier réduit $P(x)$ puisse être équivalent à zéro sans que tous ses coefficients soient nuls et soit Ax^m son terme de degré le plus élevé ($A \neq 0$). Soient m nombres *différents* $a, b, c, \ldots l$, d'ailleurs quelconques; puisque le polynôme est équivalent à zéro, il s'annule, en particulier, pour les m valeurs $a, b, c \ldots l$ et, alors, d'après le corollaire précédent, on aurait

$$P(x) \equiv A(x - a)(x - b)(x - c) \ldots (x - l).$$

Pour toute valeur de x autre que $a, b, c \ldots l$ le second membre ne serait pas nul et, par suite, $P(x)$ aurait une valeur différente de zéro; ce qui est contraire à l'hypothèse. $P(x)$ ne peut donc être équivalent à zéro que si tous ses termes sont nuls séparément, c'est-à-dire que s'il est *identiquement nul.*

D'ailleurs, il est bien évident que cette condition, qui est nécessaire, est suffisante pour que $P(x)$ soit équivalent à zéro.

Remarque. — Puisqu'un polynôme entier ne peut être équivalent à zéro sans être identiquement nul, nous pouvons dorénavant confondre ces deux expressions.

Corollaire. — *Deux polynômes entiers réduits équivalents sont identiques, c'est-à-dire qu'ils sont de même degré et égaux terme à terme.*

Car la différence de deux polynômes entiers équivalents est un polynôme entier équivalent à zéro et, par suite, identiquement nul. Tout terme de la différence est la différence des termes de même degré des deux polynômes ; ce terme étant nul, les termes de même degré des deux polynômes sont égaux. Les deux polynômes sont donc égaux terme à terme, et tout terme qui manque dans l'un manque aussi dans l'autre.

Théorème IV. — *Lorsqu'un polynôme, entier en* x, *de degré* m, *s'annule pour plus de* m *valeurs distinctes de* x, *il est équivalent à zéro et, par suite, identiquement nul.* Soit $P(x)$ un polynôme entier, de degré m, qui s'annule pour les $(m+1)$ valeurs *différentes* de x: $a, b, c \ldots k, l$. Puisqu'il s'annule pour les m valeurs distinctes a, b, c, ... k, c'est qu'on a (*Th. II, Coroll.*) :

$$P(x) \equiv A(x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x-k) \qquad (1)$$

A étant une *constante*. Écrivons que le polynôme s'annule encore quand on donne à x la valeur l. On aura :

$$0 = A(l-a)(l-b)(l-c) \ldots (l-k).$$

Toutes les différences entre parenthèses sont, par hypothèse, différentes de zéro, il faut donc que l'on ait

$$A = 0.$$

On en conclut, immédiatement, que le second membre de l'identité (1) est nul quel que soit x, c'est-à-dire que $P(x)$ est *équivalent* à zéro. D'ailleurs (d'après le *Th. III*) ceci ne peut arriver que si $P(x)$ est identiquement nul, c'est-à-dire si tous ses coefficients sont nuls.

Corollaire. — *Lorsque deux polynômes entiers en* x, *de degré égal ou inférieur à* m, *prennent, respectivement, la même valeur numérique pour plus de* m *valeurs différentes de* x, *ils sont équivalents, par suite identiques.* Car leur différence est un polynôme entier en x de degré au plus égal à m qui s'annule pour plus de m valeurs de x et qui, par suite, d'après le théorème précédent, est équivalent à zéro. Les deux polynômes sont donc équivalents et, par suite (*Coroll.* du *Th. III*), *identiques.*

Applications. — 1° $x^m - a^m$ *est divisible par* $x - a$.
Car le reste de la division de $x^m - a^m$ par $x - a$ est

$$a^m - a^m = 0.$$

2° $x^m + a^m$ *n'est pas divisible par* $x - a$.
Car le reste de la division de $x^m + a^m$ par $x - a$ est

$$a^m + a^m = 2a^m \neq 0.$$

3° $x^m - a^m$ *est ou n'est pas divisible par* $x + a$, *suivant que* m *est pair ou impair.*
Car le reste de la division de $x^m - a^m$ par $x + a$ est

$$(-a)^m - a^m.$$

Si m est pair, on a $(-a)^m - a^m = a^m - a^m = 0.$
Si m est impair, on a $(-a)^m - a^m = -a^m - a^m = -2a^m \neq 0.$

4° $x^m + a^m$ *est ou n'est pas divisible par* $x + a$, *suivant que* m *est impair ou pair.*

Car le reste de la division de $x^m + a^m$ par $x + a$ est :

$$(-a)^m + a^m.$$

Or, si m est impair, on a $(-a)^m + a^m = -a^m + a^m = 0.$
Si m est pair, on a $(-a)^m + a^m = a^m + a^m = 2a^m \neq 0.$

Remarque. — Lorsque m est pair, $x^m - a^m$ est, à la fois, divisible par $x - a$ et $x + a$, il est donc divisible par le produit

$$(x - a)(x + a) \equiv x^2 - a^2.$$

49. Loi de formation du quotient par $x - a$.
Soit :

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0$$

un polynôme, entier en x, ordonné suivant les puissances décroissantes de x. Le premier terme du quotient de ce polynôme par $x - a$ est $A_m x^{m-1}$; le quotient est donc un polynôme de degré $(m - 1)$ dont le premier coefficient est A_m, coefficient que nous désignerons

par B_{m-1}. Pour avoir les autres coefficients du quotient effectuons la division :

$$\begin{array}{l|l}
A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \ldots + A_2x^2 + A_1x + A_0 & x - a \\
\hline
-B_{m-1}x^m + aB_{m-1}x^{m-1} & B_{m-1}x^{m-1} + B_{m-2}x^{m-2} + B_{m-3}x^{m-3} \\
\quad B_{m-2}x^{m-1} & \quad + \ldots + B_2x^2 + B_1x + B_0 \\
\quad -B_{m-2}x^{m-1} + aB_{m-2}x^{m-2} & \\
\qquad B_{m-3}x^{m-2} & \\
\qquad \ldots\ldots\ldots & \\
\qquad \ldots\ldots\ldots & \\
\qquad \ldots\ldots\ldots & \\
\qquad \ldots\ldots\ldots aB_2x^2 & \\
\qquad\quad B_1x^2 & \\
\qquad\quad -B_1x^2 + aB_1x & \\
\qquad\qquad B_0x + aB_0 & \\
\qquad\qquad\quad R &
\end{array}$$

En posant, dans le cours de l'opération :

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l}
B_{m-1} = A_m, \\
B_{m-2} = A_{m-1} + aB_{m-1}, \\
B_{m-3} = A_{m-2} + aB_{m-2}, \\
\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots \\
B_1 = A_2 + aB_2, \\
B_0 = A_1 + aB_1, \\
R = A_0 + aB_0.
\end{array} \right.$$

Or, les égalités (1) mettent précisément en évidence la loi de formation des coefficients du quotient. Le premier coefficient B_{m-1} est égal au premier cofficient A_m du dividende. Le second coefficient B_{m-2} est égal au second coefficient A_{m-1} du dividende augmenté du produit du premier coefficient du quotient par a. Le troisième coefficient du quotient B_{m-3} est égal au troisième coefficient A_{m-2} du dividende augmenté du produit du second coefficient B_{m-2} du quotient par a, etc... On tire de là, la règle suivante :

Règle. — *Un polynôme entier en* x, *étant ordonné suivant les puissances décroissantes de* x *et supposé complet, on obtient les coefficients de son quotient par* x — a, *également ordonné suivant les puissances décroissantes de* x *et supposé complet, de la façon suivante :*

1° *Le premier coefficient du quotient est égal au premier coefficient du dividende.*

2° *Tout autre coefficient du quotient s'obtient en ajoutant au coefficient de même rang du dividende le produit du coefficient précédent du quotient par* a ;

3° *Le reste de la division s'obtient en ajoutant au dernier coefficient du dividende le produit du dernier coefficient du quotient par* a.

Remarque. — Dans cette règle, on suppose le dividende et le quotient *complets*. Si l'un de ces polynômes n'était pas complet, il faudrait le considérer comme tel en regardant les termes manquants comme des termes ayant des coefficients *nuls*. Ainsi, par exemple, le polynôme

$$x^4 - 3x^2 + 5$$

qui n'a ni terme en x^3 ni terme en x, devra s'écrire, pour appliquer la règle,

$$x^4 + 0 \cdot x^3 - 3x^2 + 0 \cdot x + 5;$$

on a, alors, pour les coefficients du quotient par $x - 2$:

Coefficient de	x^3.....	$1,$
	x^2.....	$1 \times 2 + 0 = 2,$
	x	$2 \times 2 - 3 = 1.$
Terme constant...........		$1 \times 2 + 0 = 2.$
Reste...............		$2 \times 2 + 5 = 9.$

Le quotient est donc :

$$x^3 + 2x^2 + x + 2$$

et le reste 9.

Application I. — *Calculer la valeur numérique d'un polynôme en* x, *lorsqu'on donne à* x *une certaine valeur.*

D'après le *Théorème I* (n° 48), la valeur numérique d'un polynôme pour la valeur a, attribuée à x, est le reste de la division de ce polynôme par $x - a$. Or, d'après la loi de formation précédente du quotient et du reste par $x - a$, on déduit ce reste du dernier coefficient du quotient comme on déduit un coefficient quelconque du précédent On pourra donc calculer ce reste, c'est-à-dire la valeur numérique du polynôme pour $x = a$, en calculant, successivement, tous les coefficients du quotient du polynôme par $x - a$ et en déduisant le reste du dernier coefficient.

Par exemple, soit à calculer la valeur numérique du polynôme

$$2x^5 - 71x^3 - 8x^2 + 12x + 3$$

pour $x = 6$. Les coefficients du quotient par $x - 6$ sont, en appliquant la règle précédente,

$$2,\ 12,\ 1,\ -2,\ 0.$$

Le reste, c'est-à-dire la valeur numérique du polynôme pour $x = 6$, est donc :

$$0 \times 12 + 3 = 3.$$

Il est facile de se rendre compte que ce procédé donne lieu à des calculs plus simples que celui qui consiste à faire la substitution directe, c'est-à-dire à effectuer les calculs :

$$2 \times 6^5 - 71 \times 6^3 - 8 \times 6^2 + 12 \times 6 + 3.$$

Remarque. — Le procédé de calcul précédent revient, au fond, à écrire le polynôme de la façon suivante :

$$\{ [(2xx - 71)x - 8]x + 12 \} x + 3$$

et à effectuer les calculs indiqués, après avoir remplacé x par 6.

Application II. — *Quotient de* $x^m \pm a^m$ *par* $x - a$.

Le premier coefficient du dividende est 1 ; tous les coefficients suivants du dividende étant nuls, chaque coefficient du quotient, d'après la *règle* précédente, est égal au coefficient précédent multiplié par a. Le premier coefficient étant 1, les autres sont, alors,

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots.\ a^{m-1}.$$

Le quotient est donc

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

Le reste est

$$a^{m-1} \times a \pm a^m = a^m \pm a^m$$

le reste est, comme nous le savons déjà, nul pour $x^m - a^m$ et égal à $2a^m$ pour $x^m + a^m$. On a donc l'identité

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} \equiv x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

En particulier, si $a = 1$.

$$(1) \qquad \frac{x^m - 1}{x - 1} \equiv x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots + x + 1.$$

Application III. — *Quotient de* $x^m \pm a^m$ *par* $x + a$.

$x + a$ s'écrit $x - (-a)$. Ce cas se ramène au précédent où on remplace a par $(-a)$. Les coefficients du dividende étant tous nuls, sauf le premier et le dernier, tout coefficient du quotient, autre que le premier, est égal au précédent multiplié par $(-a)$.

La suite des coefficients du quotient est donc :

$$1, -a, (-a)^2, (-a)^3 \ldots (-a)^{m-2}, (-a)^{m-1};$$

c'est-à-dire

$$1, -a, a^2, -a^3, \ldots. (-a)^{m-2}, (-a)^{m-1}.$$

Le quotient est donc :

$$x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - a^3x^{m-4} + \ldots + (-a)^{m-2}x + (-a)^{m-1}$$

et le reste, comme nous le savons, est

$$(-a)^{m-1}(-a) \pm a^m = (-a)^m \pm a^m.$$

Par exemple, on a :

$$\frac{x^3 + a^3}{x + a} = x^2 - ax + a^2;$$
$$\frac{x^4 - a^4}{x + a} = x^3 - ax^2 + ax^2 - a^3.$$

EXERCICES

26. Effectuer les divisions exactes suivantes :

$$(a^4 - a^3b + 2a^2b^2 - ab^3 + b^4) : (a^2 + b^2);$$
$$(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc) : (a + b + c);$$
$$(x^3 - 3x^2 + 3x + y^3 - 1) : (x + y - 1);$$
$$(x^5 - 5x^4y + 7x^3y^2 - x^2y^3 - 4xy^4 + 2y^5) : (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3).$$

27. Calculer les parties entières des quotients suivants :

$$\frac{2x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 7};$$
$$\frac{(a^2 + 2ab + b^2)x^3 - 3(a + b)^3x^2 + a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5}{(a + b + x)^2};$$

et les restes des divisions.

28. Calculer directement, sans poser les divisions, les quotients et les restes des polynômes

$$x^3 + 3x^2 - 5x + 6;$$
$$x^4 - 7x^3 + 6x^2 - x + 1$$

par

$$x - 1, \quad x + 1, \quad x - 2, \quad x + 2, \quad 2x - 1.$$

29. Prouver que

$$(x+y)^n - x^n - y^n$$

est divisible par

$$xy(x+y)(x^2+xy+y^2),$$

lorsque n est un multiple de 6 *moins* 1,
et est divisible par

$$xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2,$$

lorsque l'entier n est un multiple de 6 *plus* 1 (à rapprocher de l'exercice 22)

(CAUCHY).

30. $$(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$$

est divisible par le produit

$$(x+y)(y+z)(z+x).$$

31. Montrer que

$$(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$$

est divisible par

$$x(x+1)(2x+1)$$

et que

$$x^{4n+2} - (2n+1)x^{2n+2} + (2n+1)x^{2n} - 1$$

est divisible par

$$(x^2-1)^3$$

(CATALAN).

32. Montrer que, si r est le reste de la division de m par p, le reste de la division de

$$x^m - a^m \quad \text{par} \quad x^p - a^p$$

est

$$a^{m-r}(x^r - a^r).$$

En conclure que la condition nécessaire et suffisante pour que $x^m - a^m$ soit divisible par $x^p - a^p$ est que m soit un multiple de p.

33. Le produit :

$$(x^m-1)(x^{m-1}-1)(x^{m-2}-1)\ldots\ldots(x^{m-(p-1)}-1)$$

est divisible par

$$(x-1)(x^2-1)(x^3-1)\ldots(x^p-1).$$

(Voir *l'Exercice* 32).

34. Si un polynôme entier en x, dont les coefficients sont des nombres entiers, s'annule pour une valeur entière de x, $x=p$, la valeur numérique que prend le polynôme pour $x=q$, q étant un entier quelconque, est un nombre entier multiple de $q-p$. En conclure que si le polynôme prend des valeurs numériques impaires pour $x=0$ et $x=1$, il ne peut s'annuler pour aucune valeur *entière* de x.

35. Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que la fraction

$$\frac{ax+b}{a'x+b'}$$

ait une valeur indépendante de x est que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

De même, pour que la fraction

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

ait la même valeur numérique quel que soit x, il faut et il suffit que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

D'une manière générale, pour que le quotient

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

de deux polynômes, entiers en x, ait la même valeur numérique, quel que soit x, il faut et il suffit que les deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ soient de même degré et que les coefficients des mêmes puissances de x soient proportionnels.

36. Si dans un polynôme, entier en x, on réunit, d'une part, tous les termes de degrés pairs, et d'autre part, tous les termes de degrés impairs, si, de plus, on met dans les termes de degrés impairs x en facteur, on mettra le polynôme sous la forme

$$P(x^2) + xQ(x^2)$$

$P(x^2)$ et $Q(x^2)$ désignant des polynômes entiers en x^2.

Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme soit divisible par $x^2 + 1$ est que l'on ait, à la fois,

$$P(-1) = 0, \quad Q(-1) = 0.$$

A cet effet, on montrera, d'abord, que le reste de la division du polynôme, par $x^2 + 1$, est

$$P(-1) + xQ(-1).$$

37. Étant donnés deux polynômes A et B, entiers en x, ordonnés suivant les puissances *croissantes* de x, le premier terme de B étant de degré au plus égal au degré du premier terme de A, on peut toujours commencer sur les deux polynômes A et B l'opération de la division de A par B (nos 45 et 46) comme si cette division était possible. Si la division n'est pas possible, l'opération pourra se continuer indéfiniment (n° 47, *Rem.*). Montrer, qu'étant donné un nombre entier α, on trouvera ainsi des polynômes entiers Q et R tels que l'on ait l'identité

$$A \equiv BQ + x^{\alpha+1}R,$$

Q étant un polynôme entier de degré au plus égal à α. α étant donné, cette égalité ne peut être satisfaite que par un seul couple de polynômes Q et R.

Comme application, calculer Q et R dans les cas suivants :

$$\begin{array}{lll} A \equiv 1, & B \equiv x + 1, & \alpha = 4; \\ A \equiv 1, & B \equiv x^2 - 2ax + 1, & \alpha = 4; \\ A \equiv 1 + x^3, & B \equiv 1 - x, & \alpha = 6. \end{array}$$

CHAPITRE VII

FRACTIONS ALGÉBRIQUES. — FORMES INDÉTERMINÉES

50. Fractions rationnelles. — Une *expression fractionnaire rationnelle* est, comme nous l'avons dit (nº 29), une expression qui ne contient pas de lettres sous des radicaux et qui contient des lettres en dénominateur.

Nous appellerons *fraction rationnelle* le quotient de deux polynômes entiers. C'est la forme la plus simple que puisse affecter une expression fractionnaire rationnelle, puisqu'il n'y a que l'indication *d'une seule* division.

Nous allons montrer que *toute expression fractionnaire rationnelle est équivalente à une certaine fraction rationnelle.*

Rappelons, d'abord, que toutes les transformations de calcul indiquées dans le chapitre I, n'altérant pas la valeur numérique d'une expression, transforment une expression en une autre expression équivalente. Par exemple, on peut multiplier ou diviser les deux termes d'une fraction par une même quantité *non nulle*, faire la somme de plusieurs fractions de même dénominateur, etc...

1° Considérons d'abord une expression fractionnaire qui est la somme algébrique de plusieurs fractions rationnelles ou polynômes entiers.

On pourra *réduire toutes ces fractions au même dénominateur* en multipliant, par exemple, les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs des autres. Il suffira, ensuite, de faire la somme des numérateurs pour obtenir une *fraction rationnelle* équivalente à l'expression proposée. Ainsi, l'expression :

$$\frac{a^4-b^4}{ab}-\frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{a^2-2ab+b^2}+a^2+b^2$$

peut s'écrire sous la forme équivalente :

$$\frac{(a^4-b^4)(a^2-2ab+b^2)}{ab(a^2-2ab+b^2)}-\frac{(a^4+2a^2b^2+b^4)\,ab}{ab(a^2-2ab+b^2)}+\frac{(a^2+b^2)\,(a^2-2ab+b^2)ab}{ab(a^2-2ab+b^2)};$$

et, par suite,

$$\frac{(a^4-b^4)\,(a^2-2ab+b^2)-(a^4+2a^2b^2+b^4)ab+(a^2+b^2)\,(a^2-2ab+b^2)ab}{ab(a^2-2ab+b^2)},$$

qui est bien une *fraction rationnelle*. En développant les calculs indiqués, et réduisant les termes semblables, la fraction s'écrit :

$$\frac{a^6 - 2a^5b - a^4b^2 - 3a^2b^4 + 2ab^5 - b^6}{a^3b - 2a^2b^2 + ab^3}.$$

Remarque. — Il arrive souvent que, pour réduire des fractions au même dénominateur, l'on peut trouver un dénominateur plus simple que le produit de tous les dénominateurs. Soit, par exemple, l'expression

$$\frac{a}{(x-b)(x-c)} + \frac{b}{(x-c)(x-a)} + \frac{c}{(x-a)(x-b)};$$

il est clair que le produit $(x-a)(x-b)(x-c)$ est un dénominateur commun. Cette expression est alors équivalente à l'expression

$$\frac{a(x-a) + b(x-b) + c(x-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

ou

$$\frac{(a+b+c)x - a^2 - b^2 - c^2}{x^3 - (a+b+c)x^2 + (bc+ca+ab)x - abc}.$$

2° Le produit ou le quotient de deux fractions rationnelles est encore une fraction rationnelle; car le produit de deux fractions est une fraction ayant pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs. Les deux termes du produit de deux fractions rationnelles sont donc des polynômes entiers, puisque ce sont des produits de polynômes entiers. De même, le quotient de deux fractions rationnelles est aussi une fraction rationnelle, puisque c'est le produit de la fraction dividende par l'inverse de la fraction diviseur. Par exemple, on a :

$$\frac{\dfrac{(x+a)^2}{x^2+a^2}}{\dfrac{x-a}{x+a}} = \frac{(x+a)^2}{x^2+a^2} \times \frac{x+a}{x-a} = \frac{(x+a)^3}{(x^2+a^2)(x-a)}.$$

3° Toute expression fractionnaire rationnelle résulte de la combinaison, par voie d'addition, de soustraction, de multiplication ou de division, de polynômes ou de fractions rationnelles. Or, d'après ce qui précède, chacune de ces opérations, effectuée sur des fractions rationnelles, donne pour résultat une fraction rationnelle; il en

résulte que, finalement, l'expression proposée est équivalente à une fraction rationnelle.

EXEMPLE I.

$$\frac{\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{x-a}{a}}{\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{2a}{x^2-a^2}}=\frac{\dfrac{a^2-(x-a)^2}{a\,(x-a)}}{\dfrac{x-a+2a}{x^2-a^2}}=\frac{\dfrac{2ax-x^2}{a\,(x-a)}}{\dfrac{x+a}{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{2ax-x^2}{a\,(x-a)}\times\frac{x^2-a^2}{x+a}=\frac{(2ax-x^2)\,(x^2-a^2)}{a\,(x^2-a^2)}.$$

On peut remarquer que les deux termes de la dernière fraction sont divisibles par x^2-a^2; en effectuant cette division, ce qui est permis, elle prend une forme plus simple et on a :

$$\frac{\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{x-a}{a}}{\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{2a}{x^2-a^2}}=\frac{2ax-x^2}{a}.$$

EXEMPLE II.

$$\frac{5\,\dfrac{\left(\dfrac{x^2-5x}{x-7}\right)}{2x+1}+3x}{4x-3}+\frac{5x-6}{x-1}=\frac{5\,\dfrac{x^2-5x}{(x-7)\,(2x+1)}+3x}{4x-3}+\frac{5x-6}{x-1}$$

$$=\frac{5\,(x^2-5x)+3x\,(x-7)\,(2x+1)}{(4x-3)\,(x-7)\,(2x+1)}+\frac{5x-6}{x-1}$$

$$=\frac{(x-1)\left[5\,(x^2-5x)+3x(x-7)(2x+1)\right]+(5x-6)(4x-3)(x-7)(2x+1)}{(4x-3)\,(x-7)\,(2x+1)\,(x-1)}$$

$$=\frac{46x^4-378x^3+391x^2+85x-126}{8x^4-66x^3+69x^2+10x-21}.$$

51. Fractions irrationnelles. — On ne peut pas donner de règle générale pour simplifier une expression fractionnaire irrationnelle. En général, lorsqu'on a une expression irrationnelle, on cherche, autant que possible, à faire disparaître les radicaux en dénominateur. Il y a un certain nombre de cas simples où cette opération est facile.

1° S'il n'y a qu'un radical carré en dénominateur, il suffit de multiplier les deux termes de la fraction par ce radical. Ainsi,

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-4}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{(\sqrt{x^2+1}-4)\,\sqrt{x^2+x+1}}{x^2+x+1}.$$

2° Les deux quantités $A + B$ et $A - B$ sont dites *conjuguées*. D'une manière générale, on appelle quantités conjuguées deux quantités qui sont l'une la somme, l'autre la différence de deux certaines expressions. Le produit de deux quantités conjuguées est une différence de carrés; car (n° 42, *App. II*) on a :

$$(A - B)(A + B) \equiv A^2 - B^2.$$

Lorsque le dénominateur d'une expression irrationnelle est de la forme $A \pm \sqrt{B}$ ou $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$, il suffit de multiplier les deux termes de la fraction par la quantité conjuguée du dénominateur pour rendre ce dénominateur rationnel. Ainsi,

$$\frac{C}{A + \sqrt{B}} \equiv \frac{C(A - \sqrt{B})}{A^2 - B};$$

$$\frac{C}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} \equiv \frac{C(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B}.$$

Exemples :

1°
$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \equiv \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{(x^2 + 1) - x^2} \equiv \sqrt{x^2 + 1} + x$$

2°
$$\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} \equiv \frac{\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right)^2}{(x+1) - (x-1)} \equiv \frac{x+1+x-1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}{2}$$
$$\equiv x + \sqrt{x^2 - 1};$$

en remarquant, d'après le calcul des radicaux (1), que

$$\sqrt{x+1}\,\sqrt{x-1} \equiv \sqrt{(x+1)(x-1)} \equiv \sqrt{x^2 - 1}.$$

3°
$$\frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \equiv \frac{2c\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)} \equiv \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(1) Le calcul des radicaux a été traité en arithmétique et on y a appris que, par exemple,

$$\sqrt{A} \times \sqrt{B} = \sqrt{A \times B}.$$

[Voir Tannery, *loc. cit.*, n°s 143 à 149. Ces numéros sont, d'ailleurs, reproduits dans l'*Appendice III* de ce volume.]

52. Forme $\frac{m}{o}$. — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé essentiellement que, dans toute expression fractionnaire, on n'attribuait aux lettres que des valeurs numériques telles que les dénominateurs ne soient pas nuls. Nous avons vu, en effet (n° 16, *Remarque finale*), qu'on ne pouvait pas définir le quotient d'un nombre par zéro. Cependant, considérons une expression fractionnaire et donnons aux lettres qui y figurent des valeurs telles que le dénominateur, *sans être nul*, ait une valeur absolue très petite. Il est facile de se rendre compte que, *si le numérateur ne s'annule pas en même temps que le dénominateur*, la fraction aura une valeur numérique très grande. Soit $\frac{A}{B}$ la fraction (A et B désignant des expressions algébriques). Puisque le dénominateur B s'annule pour certaines valeurs des lettres qui y figurent, il arrivera, *en général*, qu'on pourra prendre des valeurs de ces lettres assez voisines de ces valeurs particulières pour que la valeur absolue de B soit aussi petite qu'on le voudra. D'ailleurs, puisque le numérateur A ne s'annule pas, il restera supérieur, en valeur absolue, à un certain nombre positif N. Donc, pour des valeurs, convenablement choisies des lettres, on aura :

$$|A| > N$$

et

$$|B| < \frac{N}{G};$$

G étant un nombre positif donné, d'ailleurs aussi grand qu'on le voudra. Pour ces valeurs des lettres on aura donc :

$$\left|\frac{A}{B}\right| > G.$$

Ceci nous prouve que la valeur absolue de la fraction pourra dépasser tel nombre G que l'on voudra, si grand qu'il soit.

Lorsque la valeur absolue d'une quantité variable peut dépasser n'importe quel nombre positif donné, on dit que cette quantité croît sans limite ou croît indéfiniment (¹).

Ce qui précède nous montre donc, *qu'en général, lorsque le dénominateur d'une fraction s'annule pour certaines valeurs particulières attribuées aux lettres, sans que le numérateur soit nul, la fraction croît*

(¹) Voir, pour plus de précision, plus loin, le n° 109.

indéfiniment quand les valeurs numériques des lettres se rapprochent de ces valeurs particulières [1].

C'est pour exprimer plus brièvement ce fait qu'on dit souvent *qu'une fraction, dont le numérateur n'est pas nul et dont le dénominateur est nul, a une valeur infiniment grande.*

Il faut bien se garder d'attribuer à ce langage un autre sens que celui que nous venons de préciser. Il n'y a pas de nombre infiniment grand; car il n'y a pas de nombre plus grand que tous les autres (nº 12, *Th. I*); une fraction ne peut donc pas avoir une valeur infiniment grande, au sens propre du mot.

Considérons, par exemple, la fraction

$$\frac{2}{x-3},$$

qui a un sens pour toutes les valeurs de x *sauf pour la valeur* $x = 3$. Soit G un nombre positif donné; pour qu'on ait

$$\left|\frac{2}{x-3}\right| > G,$$

il suffit que l'on ait

$$|x-3| < \frac{2}{G}.$$

Il suffit donc qu'on donne à x une valeur qui diffère de 3, en valeur absolue, de moins de $\frac{2}{G}$ pour que la valeur absolue de la fraction soit plus grande que G. Lorsque la valeur numérique de x se rapproche de la valeur 3, la valeur absolue de la fraction $\frac{2}{x-3}$ croît sans limite. Ce n'est que ce fait qu'on exprime, brièvement, en disant que, pour $x = 3$, la fraction *a une valeur infiniment grande* ou encore *est infinie*.

53. Forme $\frac{0}{0}$. — Nous avons vu (nº 16) que, lorsqu'on cherche à calculer le quotient de zéro par zéro, on est conduit à considérer ce quotient comme *indéterminé*; car le produit de tout nombre par zéro est égal à zéro. Il est donc naturel de dire que, lorsque les deux termes d'une fraction prennent la valeur zéro pour des valeurs particulières des lettres, la valeur de cette fraction est *indéterminée*. Pour

(1) Nous nous contentons, ici, d'expliquer ce qui se passe, en gros; nous reviendrons sur ce sujet avec toute la précision et les détails désirables quand nous traiterons *des limites* (liv. IV, chap. I).

rappeler le fait que les deux termes de la fraction s'annulent, on dit *qu'il y a une indétermination de la forme* $\frac{0}{0}$.

Lorsque ce cas se présente, il arrive souvent qu'on peut trouver une seconde fraction équivalente à la fraction donnée, pour toutes les valeurs des lettres pour lesquelles celle-ci a une valeur bien déterminée, et telle que, pour les valeurs particulières pour lesquelles les deux termes de la fraction donnée sont nuls, ses deux termes ne soient pas nuls tous les deux.

Deux cas peuvent alors se présenter :

1° Le dénominateur de la seconde fraction n'est pas nul pour les valeurs particulières des lettres ; cette seconde fraction a une valeur bien déterminée et c'est cette valeur que, *par définition*, on appelle *la valeur* ou, encore, *la vraie valeur* de la fraction donnée pour les valeurs particulières des lettres (¹).

2° Le dénominateur de la seconde fraction s'annule ; on peut alors dire (en attachant à cette expression le sens que nous lui avons donné) que la seconde fraction a une valeur infiniment grande et *nous exprimerons ce fait* en disant aussi que la fraction donnée est *infiniment grande* pour les valeurs particulières des lettres.

On a, par exemple :

$$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x+1}{x-2},$$

pour toutes les valeurs de x autres que 1 et 2. Pour $x=1$, les deux termes de la dernière fraction ne sont pas nuls et cette fraction a la valeur -2; donc, *par définition*, la vraie valeur de la fraction $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, pour $x=1$, est -2.

Lever l'indétermination, c'est trouver la vraie valeur de la fraction. Il y a des cas où il est facile de lever l'indétermination.

1° Si la fraction donnée est une *fraction rationnelle*, on pourra toujours lever l'indétermination. En effet, si, pour quelque valeur a d'une certaine lettre x, les deux termes de la fraction prennent la valeur zéro, comme ces deux termes sont des polynômes entiers, ils sont tous deux divisibles par $(x-a)$ (n° 48, *Th. I*, *Cor.*) et on peut simplifier la fraction en divisant les deux termes par $(x-a)$. Si la nouvelle fraction obtenue est encore

(¹) Cette notion de la vraie valeur sera précisée plus loin (Voir n° 110).

indéterminée pour $x = a$, on pourra encore la simplifier de la même façon et, ainsi de suite ; on finira par arriver à une fraction dont les deux termes ne s'annuleront plus, à la fois, pour $x = a$, et qui, pour toutes les autres valeurs de x, sera équivalente à la fraction donnée.

Exemple. — Les deux termes de la fraction

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

s'annulent pour $x = 1$, on peut donc diviser les deux termes par $x - 1$ et on obtient la fraction équivalente :

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

Les deux termes de cette nouvelle fraction s'annulent aussi pour $x = 1$, on peut donc aussi la simplifier et elle est équivalente à

$$\frac{x - 1}{x - 2}.$$

Cette dernière fraction prend, pour $x = 1$, la valeur zéro ; par suite, la vraie valeur de la fraction donnée est *zéro*, pour $x = 1$.

2° Lorsque la fraction est irrationnelle, on ne peut pas donner de règle générale pour lever l'indétermination ; mais il arrive souvent qu'on peut la lever en rendant le dénominateur rationnel ou par un procédé analogue.

Exemple I. — Considérons la fraction

$$\frac{x - 5}{\sqrt{x - 1} - 2},$$

qui est indéterminée pour $x = 5$. Multiplions les deux termes par la quantité conjuguée du dénominateur ; et nous obtenons

$$\frac{(x - 5)\left(\sqrt{x - 1} + 2\right)}{x - 5} = \sqrt{x - 1} + 2.$$

La dernière expression prend, pour $x = 5$, la valeur 4 qui est, par conséquent, la vraie valeur de l'expression donnée.

Exemple II. — L'expression

$$\frac{- b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

où b désigne un nombre positif, est indéterminée quand a est nul. Multiplions les deux termes par la quantité conjuguée du numérateur, il vient :

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a\left[-b-\sqrt{b^2-4ac}\right]}=\frac{4ac}{2a\left[-b-\sqrt{b^2-4ac}\right]}.$$

En divisant les deux termes par $2a$, on a une fraction équivalente à la fraction donnée, pour toutes les valeurs de a autres que zéro :

$$\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}};$$

et, comme b n'est pas nul, cette deuxième fraction prend, pour $a=0$, la valeur bien déterminée $-\frac{c}{b}$ qui est, par suite, la vraie valeur de la fraction donnée.

EXERCICES

38. Simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$$

(J. Bertrand);

$$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)};$$

$$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-a};$$

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)};$$

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\left[1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right];$$

$$\frac{\frac{2bc}{b+c}-b}{\frac{1}{c}+\frac{1}{b-2c}}+\frac{\frac{2bc}{b+c}-c}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c-2b}}$$

(Smith).

39. Vérifier les identités suivantes :

$$\frac{x^2y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{(x^2-c)(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}$$
$$\equiv x^2+y^2+z^2-b^2-c^2$$

(J. Bertrand);

$$\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}\equiv 1$$

(J. Bertrand);

$$\frac{b+c}{a(a+b+c)} = \frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{(a+b)(a+b+c)}$$

(SMITH) ;

$$\frac{b+c+d}{a(a+b+c+d)} = \frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{(a+b)(a+b+c)} + \frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}$$

(SMITH) ;

d'une façon plus générale,

$$\frac{b+c+d+\dots+k+l}{a(a+b+c+d+\dots+k+l)} = \frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{(a+b)(a+b+c)} + \dots$$
$$\dots + \frac{l}{(a+b+\dots+k)(a+b+\dots+k+l)}$$

(SMITH).

40. Vérifier que, lorsque

$$a+b+c=0,$$

on a l'égalité

$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right) = 9;$$

généraliser.

(C. H. PRIOR).

41. Prouver que l'expression

$$\frac{a_1^r}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)} + \frac{a_2^r}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)}$$
$$+ \dots + \frac{a_n^r}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})}$$

est égale à zéro, si r est plus petit que $n-1$; égale à 1, lorsque $r=n-1$; et égale à

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

lorsque $r=n$.

42. Simplifier les expressions irrationnelles suivantes :

$$\frac{1}{a-b\sqrt{c}} - \frac{1}{a+b\sqrt{c}}$$

(*Baccalauréat*) ;

$$\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}-2}{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}+2}$$

(J. BERTRAND);

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

(J. BERTRAND).

43. Vérifier que l'expression

$$x^3+px+q$$

s'annule lorsqu'on y fait

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

en supposant

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0.$$

43 *bis*. Vérifier l'identité :

$$\sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - a^2}\right)} = \sqrt{\frac{R(2R + a)}{2}} - \sqrt{\frac{R(2R - a)}{2}}$$

(Voir, à ce sujet, n° 172)

44. Trouver les vraies valeurs des fractions suivantes :

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 6}, \quad \text{pour} \quad x = 2;$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}, \quad \text{pour} \quad x = 1;$$

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2(x-1)}}{\sqrt{x-3}}, \quad \text{pour} \quad x = 3$$

$$\frac{x^3 + y^3 - 2xy^2}{x - y}, \quad \text{lorsque} \quad x = y;$$

$$\frac{x^m - a^m}{x^p - a^p}, \quad \text{pour} \quad x = a;$$

$$\frac{\sqrt[3]{a(a-b)} + \sqrt[2]{a^2 - b^2}}{\sqrt[2]{a^2 - b^2} + a^2(a-b)}, \quad \text{lorsque} \quad a = b.$$

LIVRE II

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE TRANSFORMATION D'UNE ÉQUATION

54. Définitions. — On appelle *équation* une égalité dont les deux *membres* ne sont égaux que pour des valeurs particulières attribuées à certaines lettres appelées *inconnues*. Ces valeurs particulières qu'il faut donner aux inconnues sont ce qu'on appelle les *solutions* ou encore les *racines*. Ainsi

$$5x - 3 = x + 13$$

est une *équation*, car les deux membres ne sont pas équivalents. Pour $x = 4$, les deux membres prennent la même valeur numérique ; 4 est donc une *solution* de cette équation.

Le membre écrit à gauche du signe $=$ est ce qu'on appelle ordinairement le *premier membre* et l'autre est le *second membre*.

Résoudre une équation c'est trouver ses racines.

Si $x = a$ est une solution d'une équation, on dit que cette équation est *satisfaite* pour $x = a$ ou, encore, que a *vérifie* cette équation.

Une équation peut contenir *une* ou *plusieurs* inconnues.

Une équation est dite *irrationnelle*, *rationnelle*, *entière* ou *fractionnaire*, suivant que ses deux membres sont des expressions irrationnelles, rationnelles, entières ou fractionnaires *par rapport aux inconnues*. Ainsi

$$\sqrt{x - 2} = 5$$

est une équation *irrationnelle* ;

$$\frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{c} x^2 - 2bx = c$$

est une équation *rationnelle entière*, car l'*inconnue* x ne figure ni sous des radicaux ni en dénominateur. Il résulte de cette définition que, dans une équation *entière*, les deux membres sont des *polynômes entiers par rapport aux inconnues*.

On dit que deux équations sont *équivalentes* lorsqu'elles admettent *les mêmes solutions*, c'est-à-dire lorsque toutes les solutions de l'une vérifient l'autre, et réciproquement.

Il y a des équations dont les solutions sont *évidentes*. Ainsi, l'équation

$$x = 5$$

n'admet évidemment que la seule solution 5. Le problème général de la résolution d'une équation consiste à trouver une équation équivalente dont les solutions sont évidentes. Cette recherche est facilitée par les principes suivants.

55. Théorème. — *Lorsqu'on ajoute ou qu'on retranche une même quantité aux deux membres d'une équation, on forme une équation équivalente.*

Soit, en effet,

$$A = B \qquad (1)$$

une équation; A et B désignant deux expressions contenant une ou plusieurs inconnues. Ajoutons aux deux membres une même quantité C, nous aurons l'équation

$$A + C = B + C \qquad (2).$$

Si, pour certaines valeurs des inconnues, A et B prennent des valeurs numériques égales, il est clair que, pour les mêmes valeurs, $A + C$ et $B + C$ prendront des valeurs égales. Donc, toute solution de l'équation (1) vérifie l'équation (2).

Réciproquement, toute solution de l'équation (2) vérifie l'équation (1); car si, pour certaines valeurs des inconnues, $A + C$ et $B + C$ ont des valeurs égales, pour ces mêmes valeurs, A et B auront des valeurs égales : puisqu'on obtient leurs valeurs en retranchant des valeurs égales de $A + C$ et $B + C$ le même nombre, à savoir, la valeur de C.

Le théorème est encore vrai lorsqu'on retranche une même quantité aux deux membres, car retrancher une quantité c'est ajouter la quantité égale et de signe contraire.

Corollaire. — *Toute équation peut être mise sous la forme*

$$A = 0.$$

Car, en retranchant aux deux membres d'une équation une quantité égale à son second membre, on obtient une équation équivalente dont le second membre est zéro [1].

Application. — *Faire passer un terme d'une équation d'un membre dans l'autre.*

Si on retranche aux deux membres d'une équation entière un terme qui figure dans un des deux membres, ce terme disparaîtra dans le membre où il se trouvait, et il y aura dans l'autre membre un terme égal et de signe contraire à celui-ci.

Soit, par exemple, l'équation

$$2x - 3 + \frac{x}{2} = 4 - x + \frac{3}{2};$$

ajoutons x aux deux membres, et nous aurons l'équation équivalente

$$2x - 3 + \frac{x}{2} + x = 4 + \frac{3}{2}.$$

On obtient donc *une équation équivalente à une équation donnée, en effaçant un terme dans l'un des membres et en écrivant ce terme, changé de signe, dans l'autre membre.* C'est ce qu'on appelle *faire passer ce terme d'un membre dans l'autre.*

Définition. — Il résulte du *Corollaire* précédent que toute équation entière peut être mise sous la forme

$$A = 0,$$

où A désigne un polynôme entier par rapport aux inconnues. Le *degré* de ce polynôme entier réduit, par rapport aux inconnues, est ce qu'on appelle le *degré* de l'équation. Ainsi l'équation

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

est du *second degré*. L'équation, à deux inconnues x et y,

$$ax^2y - \frac{b^3}{a}xy + a^3x - b^3y = 0$$

est du *troisième degré*.

(1) C'est un mathématicien anglais, *Thomas Harriot* (1568-1621) qui, le premier, proposa d'écrire toutes les équations entières sous la forme $A = 0$. Ce fait est très important, car il a permis de définir le *degré* d'une équation entière et, en mettant le premier membre A sous la forme

$$A = (x - a)(x - b)(x - c)\ldots,$$

il a fait prévoir le théorème de Dalembert, d'après lequel toute équation, de degré m, a m racines.

56. Théorème. — *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise les deux membres d'une équation par une même quantité qui n'est ni nulle ni susceptible de devenir nulle ou infiniment grande* (¹), *on obtient une équation équivalente.*

Soit l'équation

$$A = B \qquad (1).$$

Multiplions les deux membres par le facteur C qui, par hypothèse, n'est ni nul ni infiniment grand, nous obtenons l'équation

$$AC = BC \qquad (2).$$

Pour démontrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes, mettons-les sous les formes équivalentes :

$$A - B = 0 \qquad (1')$$

et

$$C(A - B) = 0 \qquad (2').$$

Toute solution de (1′), rendant A — B nul, rend aussi le produit C(A — B) nul, puisque le second facteur de ce produit est nul et que le premier *n'est pas infiniment grand* (²). Donc toute solution de (1′) vérifie l'équation (2′).

Réciproquement, toute solution de (2′) annule le produit C(A — B) et, *comme* C *a une valeur différente de zéro*, il faut que A — B soit nul. Donc toute solution de (2′) vérifie l'équation (1′).

Il est évident que la proposition est encore vraie dans le cas de la division, car diviser par C c'est multiplier par $\frac{1}{C}$ et, si C n'est ni nul ni infiniment grand, $\frac{1}{C}$ n'est ni infiniment grand ni nul.

(1) Je rappelle (nº 52) qu'une quantité infiniment grande est une quantité dont le dénominateur est nul, le numérateur étant différent de zéro.

(2) Nous appliquons ici le théorème qui dit que, lorsque l'un des facteurs d'un produit est nul, ce produit est nul. Mais ce théorème suppose que tous les facteurs sont des nombres *bien déterminés*. Lorsque l'un des facteurs est infiniment grand le théorème *peut* tomber en défaut. Considérons, par exemple, le produit

$$(x - 1) \times \frac{x^2 + 1}{x - 1} = x^2 + 1.$$

Pour $x = 1$, le premier facteur s'annule, mais le produit n'est cependant pas nul et a la valeur 2 ; cela tient à ce que, pour $x = 1$, le second facteur est infiniment grand. Au fond, le produit est une fraction $\frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}$ qui, pour $x = 1$, est *indéterminée* (nº 53) et dont la *vraie valeur* est 2.

Remarque. — Pour qu'on puisse appliquer le théorème précédent, avec sécurité, il faut absolument que C ne puisse être ni nul ni infiniment grand.

Si, pour certaines valeurs des inconnues, C pouvait devenir nul, l'équation (2) admettrait bien toutes les solutions de l'équation (1), mais la réciproque pourrait être en défaut et, pour certaines valeurs des inconnues annulant C, l'équation (2) pourrait être satisfaite sans que l'équation (1) le soit. Par exemple, multiplions les deux membres de l'équation

$$x - 3 = 2x - 8$$

par $x - 2$; la nouvelle équation

$$(x - 2)(x - 3) = (x - 2)(2x - 8)$$

admet bien la solution $x = 5$ de l'équation proposée, mais elle admet, en outre, la solution $x = 2$ qui ne vérifie pas l'équation proposée.

Au contraire, si, pour certaines valeurs des inconnues, C était infiniment grand, toutes les solutions de l'équation (2) vérifieraient bien l'équation (1), mais il pourrait arriver que l'équation (2) n'admette pas certaines solutions de l'équation (1) pour lesquelles C est infiniment grand. Ainsi, multiplions les deux membres de l'équation

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

par $\frac{1}{x - 1}$; la nouvelle équation

$$x - 2 = 0$$

n'admet pas la solution $x = 1$ de l'équation proposée.

On voit donc, qu'en multipliant les deux membres d'une équation par une quantité qui peut devenir nulle ou infiniment grande, on peut ou *introduire des solutions étrangères* qui sont des valeurs des inconnues annulant le multiplicateur ou *supprimer certaines solutions* qui sont des valeurs des inconnues rendant le multiplicateur infiniment grand.

Cependant, si aucune des solutions de l'équation (2) n'annule C et si aucune des solutions de (1) ne rend C infiniment grand, le raisonnement du théorème précédent subsiste, et les équations (1) et

(2) sont équivalentes. Ainsi,

$$\frac{3}{x-2}=4 \qquad \text{et} \qquad 3=4(x-2)$$

sont deux équations équivalentes.

Application I. — *Lorsque, dans une équation entière, les coefficients sont des fractions, on peut rendre ces coefficients entiers en multipliant les deux membres de l'équation par le dénominateur commun de ces fractions.* Considérons, par exemple, l'équation

$$\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}+2x=\frac{x}{6}-3+\frac{x}{2};$$

multiplions les deux membres par 12 et nous aurons l'équation équivalente :

$$8x-3+24x=2x-36+6x.$$

Application II. — *Lorsqu'on multiplie les deux membres d'une équation rationnelle fractionnaire par le dénominateur commun des deux membres, on obtient, en général, une équation entière équivalente.*

En effet, nous pouvons toujours supposer (n° 55) que le second membre de cette équation soit zéro. Le premier membre, étant une expression fractionnaire rationnelle, peut être mis sous forme de fraction rationnelle (n° 50) et l'équation a la forme

$$\frac{A}{B}=0 \qquad (1),$$

où A et B désignent des polynômes entiers par rapport aux inconnues. Il est clair que, s'il n'existe aucunes valeurs des inconnues annulant à la fois A et B, il faut et il suffit, pour que $\frac{A}{B}$ soit nul, que A soit nul. L'équation (1) est alors équivalente à l'équation entière

$$A=0 \qquad (2).$$

S'il existait des valeurs des inconnues annulant à la fois A et B, ces valeurs vérifieraient l'équation (2) et pourraient ne pas vérifier l'équation (1); car, pour ces valeurs, la fraction $\frac{A}{B}$ serait indéterminée et sa vraie valeur pourrait ne pas être zéro.

Trouver l'équation entière (2) équivalente à l'équation donnée (1), c'est ce qu'on appelle *rendre l'équation* (1) *entière.*

57. Théorème. — *Lorsqu'on élève les deux membres d'une équation au carré, on obtient une nouvelle équation qui admet toutes les solutions de l'équation proposée, mais qui, en général, ne lui est pas équivalente.*

Soit l'équation

$$A = B \qquad (1).$$

Il est évident que toute solution de cette équation vérifie l'équation

$$A^2 = B^2 \qquad (2);$$

car, si les expressions A et B ont des valeurs numériques égales, leurs carrés ont aussi des valeurs égales. Mais, réciproquement, on ne peut pas affirmer que toute solution de l'équation (2) est une solution de l'équation (1). En effet, l'équation (2) peut être mise sous la forme équivalente

$$A^2 - B^2 = 0$$

ou, encore,

$$(A - B)(A + B) = 0 \qquad (3).$$

Pour que l'équation (3) soit satisfaite, il faut et il suffit que l'un des deux facteurs $A - B$ ou $A + B$ soit nul. Si c'est $A - B$, l'équation (1) est satisfaite; mais, si c'est $A + B$, l'équation (1) n'est pas, en général, satisfaite et c'est l'équation

$$A = -B \qquad (4)$$

qui est vérifiée.

Donc, *lorsqu'on élève les deux membres d'une équation au carré, on obtient une nouvelle équation qui admet, non seulement les racines de l'équation proposée, mais encore les racines de l'équation qu'on déduit de celle-ci en changeant le signe de l'un des deux membres.*

Soit, par exemple, l'équation

$$a - x = \sqrt{x - a}.$$

Élevons les deux membres au carré; nous obtenons l'équation

$$(x - a)^2 = x - a$$

qui s'écrit

$$(x - a)(a + 1 - x) = 0$$

et qui admet, manifestement, les deux racines

$$x = a \quad \text{et} \quad x = a + 1.$$

La première, $x = a$, vérifie l'équation proposée; mais la seconde, $x = a + 1$, ne la vérifie pas et vérifie l'équation :

$$a - x = -\sqrt{x - a}.$$

Remarque. — On peut observer que les deux équations, dont l'ensemble est équivalent à l'équation obtenue par l'élévation au carré, reproduisent, lorsqu'on les multiplie membre à membre (en supposant les seconds membres réduits à zéro), l'équation finale.

Car ces deux équations sont :

$$A + B = 0,$$
$$A - B = 0,$$

qui, multipliées membre à membre, donnent

$$A^2 - B^2 = 0.$$

Plus généralement, lorsque, pour rendre une équation entière, on fait plusieurs élévations au carré successives, l'équation finale est équivalente à l'*ensemble* de plusieurs équations dont le produit, membres à membres (en supposant les seconds membres réduits à zéro), reproduit l'équation finale.

Ainsi, l'équation

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} = 0$$

peut être rendue entière de la façon suivante :
on l'écrit

$$-\sqrt{A} = \sqrt{B} + \sqrt{C};$$

une première élévation au carré donne :

$$A = B + C + 2\sqrt{BC};$$

on écrit cette nouvelle équation :

$$2\sqrt{BC} = A - B - C$$

et une nouvelle élévation au carré donne :

$$4BC = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC + 2BC.$$

L'équation finale est donc :

$$(1) \qquad A^2 + B^2 + C^2 - 2BC - 2CA - 2AB = 0.$$

Or, en remontant les équations, de proche en proche, on se rend compte aisément que cette équation admet les solutions des *quatre* équations :

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} = 0,$$
$$\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C} = 0,$$
$$\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C} = 0,$$
$$\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C} = 0,$$

dont le produit, membres à membres, fournit, comme il est aisé de le vérifier, l'équation (1).

Généralisation. — *D'une manière générale, l'équation*

$$A^m = B^m \qquad (1)$$

n'est équivalente à l'équation

$$A = B \qquad (2),$$

que lorsque m *est impair. Lorsque* m *est pair, l'équation*

$$A^m = B^m$$

est équivalente à l'ensemble des deux équations

$$A = B,$$
$$A = -B.$$

(à condition de se borner, comme nous le ferons dans la suite, aux nombres positifs et négatifs) (1).

En effet, pour toute valeur de x qui donne à A^m et B^m des valeurs numériques égales, A et B ont des valeurs égales *en valeur absolue* (puisque deux nombres arithmétiques sont égaux quand leurs puissances $m^{ièmes}$ sont égales).

1° Si m est *impair*, A et B ont, respectivement, les mêmes signes que A^m et B^m (voir n° 19) et, par suite, sont de même signe. On a donc

$$A = B$$

et les équations (1) et (2) sont équivalentes.

2° Si m est *pair*, comme $(-A)^m = A^m$, A et B peuvent être de signes contraires et on a, par suite, soit

$$A = B,$$

soit

$$A = -B.$$

Les équations (1) et (2) ne sont pas équivalentes.

Remarque. — Dans le cas particulier où l'un des membres est nul, l'équation obtenue en élevant les deux membres d'une équation à une puissance quelconque, lui est *équivalente*; car A^m ne peut pas être nul sans que A soit nul.

(1) Cette proposition n'est plus exacte quand on généralise encore la notion de nombre et qu'on introduit, dans le calcul, les nombres dits *imaginaires* (Voir l'*Appendice I*).

EXERCICES

45. Rendre entières les équations suivantes :

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} = 0 ;$$
$$\sqrt[3]{A} + \sqrt{B} + C = 0 ;$$
$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D} + \sqrt{E} = 0 \qquad \text{(Descartes)} ;$$
$$\sqrt[m]{A} + \sqrt[3]{B} + C = 0 .$$

CHAPITRE II

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

58. D'après sa définition même (n° 55), une équation *du premier degré à une inconnue* est une équation entière telle que, lorsqu'on a fait passer tous les termes dans le premier membre, ce premier membre soit un polynôme du premier degré. Toute équation du premier degré à une inconnue peut donc être mise sous la forme

$$ax + b = 0 \qquad (1),$$

ou encore

$$ax = -b.$$

Si a est différent de zéro, on peut diviser les deux membres par a et on obtient finalement l'équation équivalente

$$x = -\frac{b}{a} \qquad (2),$$

dont la solution est évidente. De là, on conclut immédiatement la règle suivante :

Règle. — *Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue, on fait passer tous les termes contenant l'inconnue dans un membre et tous les termes connus dans l'autre; on réduit les termes semblables dans les deux membres et, si, après cette réduction, le coefficient de l'inconnue est différent de zéro, l'équation admet une solution et une seule qu'on obtient en divisant les deux membres par ce coefficient.*

Exemple. — Soit à résoudre l'équation

$$\frac{x}{3} - 2 + 3x - \frac{1}{2} = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} + 2 - x.$$

Elle s'écrit :

$$\frac{x}{3} + 3x - \frac{2x}{3} + x = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2$$

et, en réduisant,

$$\frac{11}{3}x = \frac{25}{6};$$

d'où

$$x = \frac{\frac{25}{6}}{\frac{11}{3}} = \frac{25}{22}.$$

Remarque. — Lorsqu'une équation a des coefficients fractionnaires, il est souvent commode de rendre d'abord les coefficients entiers avant d'appliquer la règle précédente.

Exemples :

1° Soit à résoudre l'équation

$$\frac{2x}{5} - 3x + \frac{1}{5} = \frac{2}{3} - x - \frac{x}{15}.$$

Chassons les dénominateurs, nous aurons :

$$6x - 45x + 3 = 10 - 15x - x;$$

puis, en appliquant la règle, on a, successivement,

$$6x - 45x + 15x + x = 10 - 3,$$
$$- 23x = 7,$$

et

$$x = -\frac{7}{23}.$$

2° Soit à résoudre l'équation

$$\frac{a+b}{a-b}x + 2a - 2b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2} - \frac{a-b}{a+b}x.$$

Multiplions les deux membres par $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$, c'est-à-dire par $a^4 - b^4$, nous aurons :

$$(a^2 + b^2)(a + b)^2 x + 2(a - b)(a^4 - b^4)$$
$$= (a^3 - b^3)(a^2 - b^2) - (a - b)^2 (a^2 + b^2)x,$$

et, en suivant la règle :

$$(a^2+b^2)(a+b)^2x+(a-b)^2(a^2+b^2)x=(a^3-b^3)(a^2-b^2)-2(a-b)(a^4-b^4),$$

$$2(a^2+b^2)^2x=-(a^2-b^2)(a-b)(a^2-ab+b^2),$$

$$x=-\frac{(a^3+b^3)(a-b)^2}{2(a^2+b^2)^2}.$$

59. Discussion. — Nous avons vu que, lorsque a est différent de zéro, l'équation

$$ax+b=0 \qquad (1)$$

a une solution et une seule qui est

$$x=-\frac{b}{a} \qquad (2).$$

Il nous reste à examiner le cas particulier où a est nul. Dans ce cas, on ne peut plus diviser les deux membres de l'équation (1) par a. Or, puisque $a = 0$, le premier membre de l'équation (1) a toujours la valeur b, *quel que soit* x; par suite : si b *n'est pas nul* il n'existera aucune valeur de x vérifiant l'équation (1) et *il n'y a pas de solutions ;* si b *est nul*, le polynôme $ax+b$ est nul, quel que soit x, et l'*équation est vérifiée pour toute valeur de* x, *la solution est indéterminée*. En réalité, dans ce dernier cas, l'égalité (1) n'est pas une équation, c'est une *identité*.

Donc, en résumé, lorsque le coefficient de l'inconnue est nul, l'équation est ou *impossible* ou *indéterminée* suivant que le terme constant est différent de zéro ou nul.

Exemple : Soit l'équation

$$\frac{x}{2}-3-\frac{x}{3}=1+\frac{x}{6}-\frac{1}{3}.$$

Elle devient, en résolvant :

$$3x-18-2x=6+x-2,$$

ou

$$0.x=22,$$
$$0=22.$$

L'équation *n'a donc pas de solution*. En d'autres termes, il n'existe aucun nombre x tel que les deux polynômes $\frac{x}{2}-3-\frac{x}{3}$ et $1+\frac{x}{6}-\frac{1}{3}$ aient des valeurs égales.

Remarque [1]. — Imaginons que a, au lieu de prendre brusquement la valeur zéro, ait des valeurs voisines de zéro et examinons ce

[1] Cette remarque prendra pour le lecteur une forme tout à fait rigoureuse lorsqu'il aura lu le chapitre I du livre IV, sur *les limites*.

que devient la solution (2). Tant que a n'est pas nul, l'équation

$$ax + b = 0 \qquad (1)$$

a une solution et une seule qui est $-\frac{b}{a}$. Or, si a tend vers zéro, c'est-à-dire si a prend des valeurs de plus en plus petites (en valeur absolue), et si b reste différent de zéro, nous savons que la fraction $-\frac{b}{a}$ *croît indéfiniment*. Donc, la solution de l'équation (1) croît indéfiniment lorsque, le terme constant b restant différent de zéro, le coefficient a de l'inconnue tend vers zéro. Comme, pour $a = 0$, l'équation (1) n'a pas de solution, on peut dire que, lorsque a tend vers zéro, la solution *disparaît*, ou encore *s'évanouit*, *en devenant infiniment grande*. C'est ce que l'on exprime, brièvement, en employant un langage analogue à celui dont nous nous sommes déjà servi (n° 52), en disant que, lorsque a est nul, b étant différent de zéro, *l'équation a une racine infiniment grande.*

Considérons, par exemple, l'équation

$$2\lambda x - 3 + x = \lambda x + 2x + 2,$$

où λ désigne un nombre supposé connu. Elle se met sous la forme :

$$(\lambda - 1)\, x = 5.$$

Lorsque λ est différent de 1, cette équation a une racine

$$x = \frac{5}{\lambda - 1}$$

et on peut choisir λ de façon que cette solution soit aussi grande qu'on le voudra en valeur absolue. Par exemple, pour que sa valeur absolue soit plus grande que 10 000, il suffit que l'on ait

$$|\lambda - 1| < \frac{5}{10000}.$$

Lorsque λ *tend* vers la valeur 1, la racine croît indéfiniment.
Pour $\lambda = 1$ l'équation n'a plus de solution.

60. La résolution de certaines équations, qui, d'abord, ne se présentent pas sous la forme d'une équation du premier degré, peut se ramener à celle d'une équation du premier degré à une inconnue. Nous allons en donner des exemples.

Il peut, d'abord, arriver qu'une équation, qui, à première vue,

paraît d'un degré supérieur au premier, s'abaisse au premier degré après les réductions. Ainsi, soit l'équation

$$(x-1)(x-3)+3x-2=x^2-4,$$

qui *paraît* du second degré. En faisant passer tous les termes dans le premier membre, on a, après réductions,

$$-x+5=0;$$

d'où

$$x=5.$$

En second lieu, en rendant entière une équation fractionnaire (n° 56, *App. II*), on peut parvenir à une équation du premier degré. Soit, par exemple, l'équation :

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x-3}.$$

Elle s'écrit sous la forme équivalente :

$$\frac{(x-1)(x-3)+(x-2)(x-3)-2(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=0$$

ou

$$\frac{-3x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}=0.$$

Elle est donc équivalente (n° 56, *App. II*) à l'équation du premier degré

$$-3x+5=0;$$

qui donne :

$$x=\frac{5}{3}.$$

61. Lorsqu'une équation est irrationnelle, on peut, en général, par des élévations aux puissances des deux membres, trouver une équation entière qui admet toutes les solutions de l'équation proposée mais qui ne lui est pas, cependant, équivalente (n° 57). Dans certains cas, l'équation entière à laquelle on parviendra pourra être du premier degré.

Pour faire disparaître les radicaux, voici comment on procédera. Si l'équation ne contient qu'un seul radical, on fera passer ce radical dans un membre et *tous* les autres termes dans l'autre ; c'est ce qu'on appelle *isoler le radical*. En élevant les deux membres à une

puissance dont l'exposant est égal à l'indice du radical, on obtiendra une équation entière. Par exemple, soit l'équation

$$\sqrt[4]{x-3} + x + 3 = x + 5 \qquad (1).$$

Elle s'écrit, en isolant le radical,

$$\sqrt[4]{x-3} = 2;$$

et, en élevant les deux membres à la quatrième puissance, l'on a :

$$x - 3 = 16 \qquad (2),$$

d'où

$$x = 19.$$

Il ne faudrait pas se hâter de conclure que 19 est solution de l'équation (1); car, comme nous le savons, l'équation (2) pourrait admettre des solutions étrangères. Il faut donc *vérifier* si 19 satisfait l'équation (1); ce qui a lieu.

D'une manière générale, lorsqu'on aura résolu l'équation entière, obtenue par les élévations aux puissances, il faudra *vérifier* si les racines obtenues satisfont l'équation proposée et ne conserver que celles qui la satisfont.

Lorsque l'équation contient deux radicaux carrés, on commence par *isoler* un des radicaux; on élève les deux membres de l'équation au carré, et on obtient une nouvelle équation qui ne contient plus qu'un seul radical. On isole de nouveau ce radical, et une seconde élévation au carré conduit à une équation entière. Toutes les racines de l'équation proposée vérifient cette équation entière; mais, comme la réciproque n'est pas vraie, on aura les racines de l'équation proposée en *choisissant parmi les racines de l'équation entière celles qui la satisfont.*

Soit, par exemple, l'équation

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x-5} = 1.$$

Isolons le second radical :

$$\sqrt{x-5} = 1 - \sqrt{x-2}.$$

En élevant au carré, on a :

$$x - 5 = 1 + x - 2 - 2\sqrt{x-2}.$$

Isolons de nouveau le radical, on a :

$$2\sqrt{x-2} = 4;$$

d'où, en élevant au carré,

$$x - 2 = 4, \quad x = 6.$$

Or, la solution $x = 6$ ne vérifie pas l'équation proposée. Cette équation n'a donc pas de solution. La solution $x = 6$ convient à l'équation

$$\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 5} = 1.$$

Remarque I. — Considérons, plus généralement, l'équation

$$\sqrt{x + a} + \sqrt{x + b} = c \qquad (1),$$

c étant un nombre *positif*. Isolons le second radical:

$$\sqrt{x + b} = c - \sqrt{x + a} \qquad (2).$$

Élevons au carré et nous obtenons :

$$x + b = c^2 + x + a - 2c\sqrt{x + a},$$
$$2c\sqrt{x + a} = c^2 + a - b \qquad (3).$$

Élevons une seconde fois au carré et il vient :

$$4c^2(x + a) = (c^2 + a - b)^2 \qquad (4);$$

ce qui donne :

$$x = \frac{c^4 - 2(a + b)c^2 + (a - b)^2}{4c^2}.$$

Il faut encore vérifier si cette solution convient à l'équation (1). Pour cela, il suffirait de substituer; mais on peut procéder autrement. Remontons les diverses transformations que nous avons faites et supposons, ce qui est permis, $a > b$. Comme nous avons élevé l'équation (3) au carré, la solution satisfait soit l'équation (3), soit l'équation :

$$-2c\sqrt{x + a} = c^2 + a - b \qquad (5).$$

Or, puisque $a > b$, $c^2 + a - b$ est positif; comme le premier membre est négatif, cette équation ne peut pas avoir de solutions. La solution vérifie donc *certainement* l'équation (3). Mais, pour obtenir celle-ci, nous avons élevé l'équation (2) au carré. La solution peut donc vérifier soit l'équation (2) soit l'équation

$$-\sqrt{x + b} = c - \sqrt{x + a} \qquad (6).$$

Pour distinguer laquelle des deux équations (2) ou (6) est vérifiée, il suffit de reconnaître le signe de $c - \sqrt{x+a}$. Pour que l'équation (1) soit vérifiée, il faut que l'on ait

$$c^2 > x + a,$$

ou

$$c^2 > \frac{(c^2 + a - b)^2}{4c^2},$$

$$4c^4 - (c^2 + a - b)^2 > 0,$$

$$(c^2 - a + b)(3c^2 + a - b) \geqslant 0;$$

et, comme $3c^2 + a - b$ est positif, puisque $a > b$, il faut que

$$c^2 \geqslant a - b.$$

Dans le cas contraire, l'équation (1) n'a pas de solution, et la solution trouvée vérifie l'équation (6).

Dans le cas particulier où

$$c^2 = a - b,$$

la solution est $x = -b$

qui vérifie *à la fois* les équations (2) et (6).

Remarque II. — Lorsque l'équation contient plus d'un radical ou plus de deux radicaux carrés, on ne peut plus donner de règle générale élémentaire. La transformation de l'équation irrationnelle en une équation rationnelle se fera encore par des élévations des deux membres de l'équation aux puissances; mais la façon de conduire le calcul, pour arriver rapidement au résultat, dépend de l'ingéniosité du calculateur.

Par exemple, en élevant les deux membres de l'équation

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} = \sqrt{x-c} + \sqrt{x-d}$$

au carré, on obtiendra une nouvelle équation ne contenant que deux radicaux carrés.

Souvent il sera utile, dans le calcul, de tenir compte des équations qui précèdent. Ainsi, on rendra l'équation

$$\sqrt[3]{x-a} + \sqrt[3]{x-b} + \sqrt[3]{x-c} = 0$$

rationnelle de la façon suivante : on l'écrit

$$-\sqrt[3]{x-a} = \sqrt[3]{x-b} + \sqrt[3]{x-c} \qquad (1).$$

En élevant les deux membres au cube, on a :

$$-(x-a) = 2x - b - c + 3\sqrt[3]{(x-b)(x-c)}\left[\sqrt[3]{x-b} + \sqrt[3]{x-c}\right].$$

En tenant compte de l'équation (1), cette équation se simplifie et devient :

$$-(x-a) = 2x - b - c - 3\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)},$$

et il ne reste plus qu'un seul radical à faire disparaître. (Voir les Exercices 45 et 50.)

EXERCICES

46. Résoudre les équations numériques suivantes :

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 11 + x;$$

$$\frac{5x - \frac{3}{2}}{9x - \frac{5}{4}} = \frac{4}{13};$$

$$\frac{10 - \frac{x}{35}}{2x - \frac{1}{25}} = \frac{3460}{2786};$$

$$\frac{7(7-x)}{6} - \frac{3(17-2x)}{9} = \frac{4x-9}{7} - \frac{13-x}{2} + 4.$$

Résoudre les équations :

$$\frac{x-a}{b} - \frac{x-b}{a} = \frac{b}{a};$$

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b-a} = \frac{a}{b+a};$$

$$\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{c} + \frac{x-c}{a} = \frac{x-(a+b+c)}{abc}.$$

47. Résoudre les équations suivantes, qui se ramènent au premier degré :

$$(1-x)(a-x) = (a-x)(1-b) - (1+x)(b-x);$$

$$(a+x)(b+x) = a(b+c) + \frac{a^2c}{b^2} + x^2;$$

$$\frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} = \frac{ax+b}{px+q};$$

$$(x+a)^3 + (x+b)^3 + (x+c)^3 = 3(x+a)(x+b)(x+c).$$

(Smith).

48. Résoudre les équations irrationnelles :

$$\sqrt{(x+4)(x+20)} = x + 10\,;$$

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x+20} = 2\sqrt{x+11}\,;$$

$$\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1 \qquad \text{(J. Bertrand)}:$$

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x} \qquad \text{(J. Bertrand)}:$$

$$\sqrt{7x-5} + \sqrt{4x-1} = \sqrt{7x-4} + \sqrt{4x-2} \qquad \text{(Smith)}.$$

49. Résoudre l'équation :

$$\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x} + \frac{\sqrt[n]{a+x}}{a} = \frac{\sqrt[n]{x}}{c} \qquad \text{(J. Bertrand)}\,;$$

on trouve :

$$x = \frac{a}{\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1}\,.$$

50. Résoudre les équations irrationnelles :

$$\sqrt{a^2 + x} + \sqrt{b^2 + x} = a + b\,;$$

$$\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \sqrt{a + b - 2x}\,;$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = a\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}\,;$$

$$\sqrt{a^2 + x\sqrt{b^2 + x^2 - a^2}} = x - a \qquad \textit{(comparer au } 3^{\text{ième}} \textit{ exercice } 48):$$

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} + \sqrt{x-c} + \sqrt{x-d} = 0;$$

$$\sqrt[3]{x-a} + \sqrt[3]{x-b} + \sqrt[3]{x-c} = 0;$$

et discuter l'existence de la solution suivant les valeurs de a, b, c, d.

CHAPITRE III

INÉGALITÉS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

62. De même qu'on distingue les égalités en deux espèces, les identités et les équations, on peut distinguer dans les inégalités celles qui ont lieu quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres qui y figurent et celles qui n'ont lieu que si on donne à certaines lettres, appelées *inconnues*, des valeurs convenablement choisies. Nous désignerons ces dernières inégalités sous le nom d'*inégalités conditionnelles* (1).

Deux inégalités conditionnelles sont dites *équivalentes* lorsqu'elles admettent les *mêmes solutions*, c'est-à-dire lorsque tout nombre qui vérifie l'une vérifie l'autre, et réciproquement.

Nous allons établir, pour les inégalités, des principes analogues à ceux que nous avons établis pour les équations (Voir nos 55 et 56).

Théorème I. — *Lorsqu'on ajoute ou qu'on retranche aux deux membres d'une inégalité conditionnelle une même quantité, on obtient une inégalité équivalente.*

Je dis que l'inégalité

$$A + C > B + C \qquad (1)$$

est équivalente à l'inégalité

$$A > B \qquad (2),$$

A, B, C désignant des expressions qui contiennent les inconnues. Ceci résulte, immédiatement, de ce qu'on peut ajouter ou retrancher aux deux membres d'une inégalité (de deux nombres) un même nombre (n° 13); car, si, pour certaines valeurs des inconnues, on a :

$$\textit{valeur de } A > \textit{valeur de } B,$$

on aura évidemment

$$\textit{val. } A + \textit{val. } C > \textit{val. } B + \textit{val. } C,$$

et réciproquement.

Théorème II. — *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise les deux membres d'une inégalité conditionnelle par un nombre positif on*

(1) On emploie aussi, quelquefois, les expressions de *inidentité* et *inéquation*, mais, comme ces expressions ne sont pas très usitées, nous avons préféré ne pas les employer.

obtient une inégalité équivalente ; si on multiplie par un nombre négatif, on obtient une inégalité équivalente, à condition de changer le sens de l'inégalité.

Soit l'inégalité conditionnelle

$$A > B \qquad (1).$$

1° Si C est un *nombre positif*, l'inégalité

$$AC > BC \qquad (2)$$

est équivalente à l'inégalité (1). Car si, pour certaines valeurs des inconnues, on a

$$val.\ A > val.\ B,$$

ou aura encore, en multipliant par le nombre *positif* C (n° 22, *Th. I*),

$$val.\ AC > val.\ BC,$$

et réciproquement.

2° Si C est un *nombre négatif*, l'inégalité

$$AC < BC \qquad (3)$$

est équivalente à l'inégalité (1). Car, si on a

$$val.\ A > val.\ B,$$

en multipliant les deux membres de l'inégalité par le nombre *négatif* C, on change le sens de cette inégalité (n° 22, *Th. I*) et on a

$$val.\ AC < val.\ BC,$$

et réciproquement.

Remarque. — Pour pouvoir appliquer la proposition précédente il est *essentiel* que C ait un signe bien déterminé, *invariable*. Nous avons supposé que C était un *nombre*, mais il est clair que la démonstration s'applique sans modification au cas où C, sans être un nombre, est une quantité *dont le signe est invariable*. Ainsi, on peut multiplier les deux membres d'une inégalité par un carré parfait $(x+1)^2$, par exemple; par une somme de carrés, etc...

Applications. — Des théorèmes précédents on peut tirer les mêmes conséquences que dans le cas des équations. Ainsi :

1° *On peut mettre toute inégalité conditionnelle sous la forme*

$$A > 0.$$

Dans le cas d'une inégalité *entière*, A est un polynôme entier par

rapport aux inconnues et le degré de ce polynôme est ce qu'on appelle *le degré de l'inégalité.*

2° *On peut faire passer un terme d'un membre d'une inégalité dans l'autre.*

3° *Dans une inégalité entière, à coefficients fractionnaires, on peut rendre les coefficients entiers en multipliant les deux membres par le dénominateur commun des coefficients.* Il faudra, dans ce cas, avoir soin de changer le sens de l'inégalité si le multiplicateur est négatif.

4° *On peut changer les signes des deux membres d'une inégalité, à condition de changer le sens de cette inégalité.* Car cela revient à multiplier les deux membres par (— 1).

63. Il résulte, de ce qui précède, qu'une inégalité conditionnelle du premier degré à une inconnue est une inégalité qui peut se mettre sous la forme

$$ax + b > 0 \qquad (1),$$

en faisant passer tous les termes dans un membre. Cette inégalité est équivalente à l'inégalité

$$ax > -b \qquad (2).$$

Si a est *positif*, cette inégalité s'écrit :

$$x > -\frac{b}{a};$$

et, si a est *négatif*, elle s'écrit :

$$x < -\frac{b}{a}.$$

Ces dernières inégalités ont la solution en évidence et elles expriment que la valeur de x doit être ou plus grande ou plus petite que $-\frac{b}{a}$.

Dans le cas où a est nul, l'inégalité (1) est

$$b > 0$$

qui *est* ou *n'est pas* vérifiée, *quelle que soit la valeur de* x, suivant que b *est* ou *n'est pas positif*. L'inégalité est donc, suivant les cas, ou *indéterminée* (c'est-à-dire vérifiée quel que soit x) ou *impossible*.

Exemple. — Résoudre l'inégalité conditionnelle :

$$2x - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} > 3x - \frac{1}{3} + \frac{x}{6}.$$

Chassons, d'abord, les dénominateurs, en multipliant les deux membres par 6; il vient :

$$12x - 2x + 3 > 18x - 2 + x.$$

Cette inégalité s'écrit :

$$12x - 2x - 18x - x > -3 - 2,$$

ou

$$-9x > -5$$

et enfin, en divisant par — 9,

$$x < \frac{5}{9}.$$

EXERCICES

51. Résoudre les inégalités conditionnelles :

$$5x + 2 - \frac{x}{2} > 3x + 1;$$

$$\frac{x-3}{x-4} > 0;$$

$$2x - \frac{3x}{2} + 4 > \frac{x}{2} + 2.$$

52. Résoudre l'inégalité conditionnelle :

$$\frac{mx+n}{a+b} - \frac{px+q}{a-b} < \frac{mx-n}{a-b} + \frac{px-q}{a+b};$$

on distinguera deux cas suivant le signe de

$$(a^2 - b^2)(bm + ap)$$

(Bezodis).

53. Démontrer qu'on a toujours

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc.$$

54. a, b, c étant les longueurs des trois côtés d'un triangle, on a :

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc).$$

55. Vérifier que. si la somme

$$ab + a'b' + a''b'' + \dots$$

est positive, on a :

$$ab + a'b' + a''b'' + \dots < \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots} \times \sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2 + \dots}.$$

Qu'arrive-t-il dans le cas particulier où

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \dots ?$$

56. Vérifier que, lorsque a est un nombre positif différent de 1, on a :

$$\frac{1 + a^2 + a^4 + \dots a^{2n}}{a + a^3 + a^5 + \dots a^{2n-1}} > \frac{n+1}{n}$$

(*Messenger of Mathematics*).

CHAPITRE IV

VARIATION DE LA FONCTION $ax + b$. — NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

64. Variation de la fonction $ax + b$. — Le polynôme $ax + b$, où x désigne une *variable* et a et b des *constantes*, est une *fonction* de x (Voir n° 30) dont la valeur numérique varie en même temps que la valeur de x, lorsque a est différent de zéro. L'étude complète de la variation de cette fonction repose sur les propriétés suivantes :

Théorème I. — *La fonction* ax + b *est croissante lorsque* a *est positif et décroissante lorsque* a *est négatif.*

Supposons, par exemple, a positif et soient x' et x'' deux valeurs différentes que nous attribuons à x; la fonction prendra les deux valeurs correspondantes $ax' + b$ et $ax'' + b$. Or, si

$$x' > x'',$$

comme a est *positif*, on a (n° 22, *Th. I*) :

$$ax' > ax''$$

et, en ajoutant b aux deux membres (n° 12),

$$ax' + b > ax'' + b.$$

La fonction est donc *croissante*, puisqu'à la plus grande valeur de la variable correspond la plus grande valeur de la fonction (n° 31).

Lorsque a est négatif, on a :

$$ax' < ax''$$

d'où

$$ax' + b < ax'' + b,$$

et la fonction est *décroissante*, puisqu'à la plus grande valeur de la variable correspond la plus petite valeur de la fonction.

Théorème II. — *La fonction* ax + b *peut, pour une valeur convenable de* x, *avoir telle valeur que l'on voudra* (*si* a *est différent de zéro*).

Soit, en effet, c un nombre ; pour que la fonction $ax + b$ ait la valeur c, il faut et il suffit que x soit racine de l'équation :

$$ax + b = c$$

qui a toujours une racine et une seule

$$x = \frac{c - b}{a},$$

puisque a est différent de zéro.

Définition. — On dit qu'une fonction, de x, *croît indéfiniment, en même temps que* x, lorsqu'à tout nombre positif P (d'ailleurs aussi grand qu'on le voudra) on peut faire correspondre un nombre positif A tel que, pour toute valeur de x dont la valeur absolue est plus grande que A, la valeur absolue de la fonction soit supérieure à P.

Au fond, on peut dire, d'une façon moins précise, que pour des valeurs de x, dont les valeurs absolues sont suffisamment grandes, la valeur absolue de la fonction peut devenir aussi grande qu'on le voudra

On dit qu'une quantité *croît indéfiniment par valeurs positives* lorsque cette quantité est positive et que sa valeur absolue croît au delà de toute limite. On dit, au contraire, qu'une quantité *croît indéfiniment par valeurs négatives* lorsque cette quantité est négative et que sa valeur absolue croît indéfiniment [1].

Pour indiquer qu'une quantité croît indéfiniment on emploie souvent un langage abrégé. Ainsi, au lieu de dire que, lorsque x croît indéfiniment par valeurs positives, une certaine fonction croît indéfiniment par valeurs négatives, on dit brièvement que, pour $x = +\infty$ (ce qui s'énonce *x égal plus l'infini*), la fonction est égale à $-\infty$ (*moins l'infini*).

Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ n'ont aucune signification *numérique* et il faut bien se garder de leur attacher un autre sens que celui que nous venons de leur donner. Ce ne sont que des signes abréviatifs, conventionnels, pour simplifier le langage et l'écriture. Il n'y a pas, comme nous le savons (n° 12, *Th. I*), de nombre plus grand ou plus petit que tous les autres.

Enfin, pour exprimer que nous donnons à une variable x, successivement, et par ordre de grandeur croissante, *toutes* les valeurs possibles depuis une valeur négative très petite (aussi petite qu'on le voudra) jusqu'à une valeur positive très grande (aussi grande qu'on le voudra), nous dirons, d'une façon abrégée, que *nous faisons croître x de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

[1] Il serait plus rationnel de réserver l'expression *croît indéfiniment* pour le premier cas, où la quantité est positive, et de dire, dans le second cas, que la quantité *décroît indéfiniment* car un nombre négatif, dont la valeur absolue augmente, diminue.

Théorème III. — *La fonction* $ax + b$ (*lorsque* a *est différent de zéro*) *croît indéfiniment en même temps que* x.

Soit, en effet, P un nombre positif donné. Nous savons que (n° 11, *Th. I*)

$$|ax + b| \geqslant |ax| - |b|;$$

donc, si on a :

$$|ax| - |b| > P \qquad (1),$$

on aura aussi

$$|ax + b| > P.$$

Or, pour que l'inégalité (1) soit satisfaite, il faut que l'on ait :

$$|x| > \frac{P + |b|}{|a|}$$

et, si on désigne par A le nombre $\frac{P + |b|}{|a|}$, pour toute valeur de x telle que

$$|x| > A,$$

on aura

$$|ax + b| > P.$$

Ce qui exprime que $ax + b$ croît indéfiniment en même temps que x.

Remarque. — Pour une valeur de x suffisamment grande, en valeur absolue, on aura

$$|ax| > |b|,$$

et, par suite, $ax + b$ aura le signe de ax. On en conclut que, *si* a *est positif*,

pour $x = +\infty$, on a : $ax + b = +\infty$;
pour $x = -\infty$, on a : $ax + b = -\infty$;

et que, *si* a *est négatif*,

pour $x = +\infty$, on a : $ax + b = -\infty$;
pour $x = -\infty$, on a : $ax + b = +\infty$

(en employant le langage abrégé conventionnel).

65. De ce qui précède, on conclut aisément la variation de la fonction.

1° $a > 0$. — Le théorème III nous apprend que, lorsque x est négatif et suffisamment petit, $ax + b$ est négatif et aussi petit que l'on voudra; c'est-à-dire que, pour $x = -\infty$, on a $ax + b = -\infty$.

Le théorème I nous apprend que, lorsqu'on fait croître x, la fonction croît; et, enfin, le théorème III nous montre encore que, quand x croît indéfiniment, par valeurs positives, $ax + b$ croît indéfiniment par valeurs positives. D'ailleurs, le théorème II nous montre que la fonction *prend*, en croissant, *toutes les valeurs possibles*. On peut donc dire, d'une façon abrégée, que, quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$, $ax + b$ croît aussi de $-\infty$ à $+\infty$.

2° $a < 0$. — Dans ce cas, pour $x = -\infty$, on a $ax + b = +\infty$; la fonction décroît (*Th. I*) et, pour $x = +\infty$, on a $ax + b = -\infty$. Comme, d'ailleurs, la fonction prend toutes les valeurs possibles, on peut dire que, quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction *décroît* de $+\infty$ à $-\infty$.

3° $a = 0$. — Lorsque a est nul, $ax + b$ a toujours la même valeur numérique, qui est b. La fonction est donc *constante*.

66. Coordonnées d'un point. — On définit, en *Géométrie analytique*, la position d'un point dans un plan de la façon suivante : Soient Ox et Oy deux *axes* rectangulaires sur lesquels des sens positifs sont déterminés. Supposons que, sur Ox, le sens positif soit $x'x$, de O vers x, et, sur Oy, de O vers y. Soit M un point quelconque du plan. Abaissons de M les perpendiculaires MP et MQ sur Ox et Oy (*fig.* 9); les mesures algébriques des *segments* sgOP et sgOQ sont ce qu'on appelle les *coordonnées* du point M. $\overline{OP}$ est *l'abcisse* et $\overline{OQ}$ *l'ordonnée*. On désigne, généralement, l'abcisse par x et l'ordonnée par y. Lorsqu'on énonce les deux coordonnées d'un point, on énonce d'abord l'abcisse et ensuite l'ordonnée : ainsi, lorsqu'on dit que M a pour coordonnées -3 et 4, on entend par là que son abcisse est -3 et son ordonnée 4. De cette définition il résulte que tout point M du plan a *un seul* système de coordonnées; récipro-

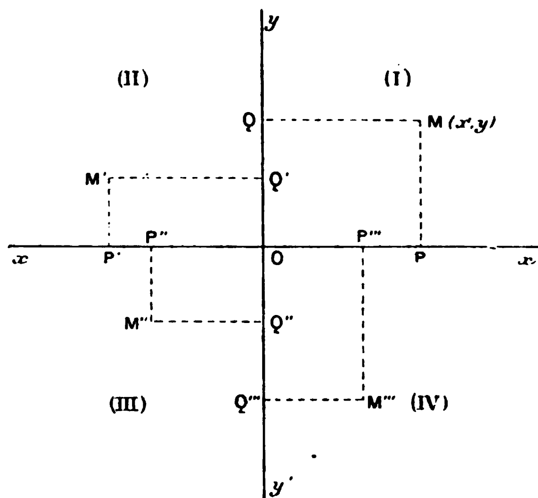


Fig. 9.

quement, étant donnés deux nombres quelconques x et y, il existe un point et un seul qui a pour coordonnées x et y. En effet, il n'y a qu'un point P, sur Ox, tel que

$$\overline{OP} = x;$$

ce point est obtenu en portant sur Ox, à partir du point O, une longueur OP égale à la valeur absolue de x et dans le sens Ox ou dans le sens Ox', suivant que x est positif ou négatif. De même, il n'y a qu'un point Q, sur Oy, tel que

$$\overline{OQ} = y.$$

Par suite, *le seul* point ayant pour abcisse x et pour ordonnée y est le point M d'intersection de la perpendiculaire en P à Ox avec la perpendiculaire en Q à Oy. Les deux coordonnées d'un point définissent donc, sans ambiguïté, la position de ce point dans le plan [1].

Les deux axes indéfinis $x'x$ et $y'y$ forment quatre angles, autour du point O, que nous numéroterons (I), (II), (III) et (IV) en commençant par l'angle xOy et en tournant toujours dans le même sens (*fig.* 9). Les signes des deux coordonnées x et y d'un point M dépendent de l'angle dans lequel se trouve ce point et on voit de suite que :

Si M est dans l'angle	(I)	on a :	$x > 0,\ y > 0;$
» M »	(II)	»	$x < 0,\ y > 0;$
» M »	(III)	»	$x < 0,\ y < 0;$
» M »	(IV)	»	$x > 0,\ y < 0.$

Dans les angles, opposés par le sommet, (I) et (III) x et y sont de même signe ; dans les angles, opposés par le sommet, (II) et (IV) x et y sont de signes contraires. Réciproquement, connaissant les signes des deux coordonnées d'un point on connaît celui des quatre angles dans lequel il se trouve.

Remarquons, enfin, que, pour tout point de l'axe Ox, l'ordonnée est nulle, et que, pour tout point de l'axe Oy, l'abcisse est nulle.

67. Distance de deux points. — Soient M et M' deux points du plan (*fig.* 10) de coordonnées x, y et x', y'. Abaissons, de M et M', les

(1) L'idée de définir la position d'un point dans un plan par deux coordonnées est due au célèbre philosophe et mathématicien français *René Descartes* (1596-1650). C'est pour cela qu'on nomme, quelquefois, le système de coordonnées que nous venons de définir du nom de *coordonnées Cartésiennes*. La découverte de Descartes fit faire un pas immense aux mathématiques puisqu'elle permit, en appliquant l'algèbre à la géométrie, de substituer, aux méthodes synthétiques de la géométrie pure, la méthode analytique de l'algèbre.

perpendiculaires MP et M'P', sur ox, et les perpendiculaires MQ, M'Q', sur oy. Soit H le point d'intersection de M'Q' avec MP. On a, dans le triangle rectangle MM'H,

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MH}^2 + \overline{M'H}^2.$$

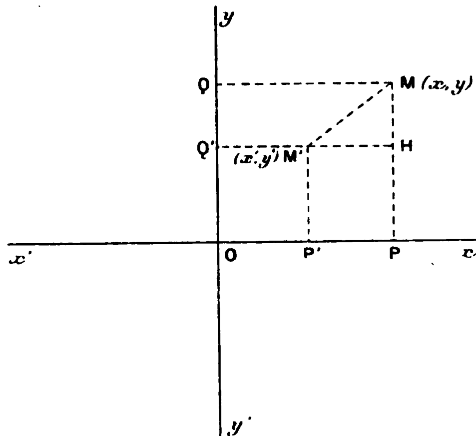


Fig. 10.

Les figures MHQ'Q et M'HPP' sont des rectangles, on a donc

$$\overline{MH}^2 = \overline{QQ'}^2, \quad \overline{M'H}^2 = \overline{PP'}^2.$$

Or on a, en vertu de la relation de *Chasles* (n° 23),

$$\overline{PP'} = \overline{OP'} - \overline{OP} = x' - x,$$
$$\overline{QQ'} = \overline{OQ'} - \overline{OQ} = y' - y.$$

D'où :

$$\overline{MM'}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

Le carré de la distance de deux points est donc égal à la somme des carrés des différences des abcisses et des ordonnées des deux points.

68. Représentation graphique de la variation d'une fonction.

Théorème. — *Tous les points d'un plan dont les deux coordonnées vérifient une relation du premier degré*

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

sont situés sur une droite telle que, réciproquement, les coordonnées d'un point quelconque de cette droite vérifient la relation.

Il est clair que, pour que la relation contienne effectivement les coordonnées, il faut que l'un au moins des coefficients A ou B soit différent de zéro. Nous examinerons d'abord deux cas particuliers :

1° *Supposons* $B = 0$. La relation a la forme

$$Ax + C = 0,$$

d'où on tire : $$x = -\frac{C}{A}.$$

Tout point dont les coordonnées satisfont cette relation a pour abcisse $-\frac{C}{A}$, il est donc situé sur la parallèle à oy menée par le point K, de ox, d'abcisse $-\frac{C}{A}$; et, réciproquement, tout point M de cette parallèle (*fig.* 11) a pour abcisse $-\frac{C}{A}$.

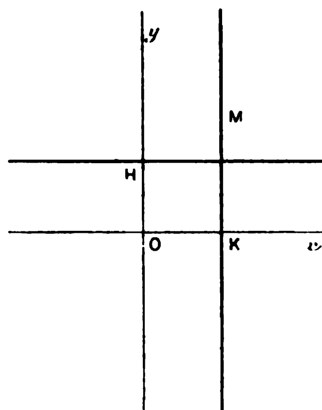


Fig. 11.

On verrait, de même, que si $A = 0$, la relation

$$By + C = 0$$

est vérifiée par les coordonnées de la parallèle à ox menée par le point H, de oy, d'ordonnée $-\frac{C}{B}$.

2° *Supposons* $C = 0$, A *et* B *différents de zéro.* La relation (1) a la forme

$$Ax + By = 0,$$

qui s'écrit

$$y = -\frac{A}{B}x.$$

Désignons, pour abréger, $-\frac{A}{B}$ par a, et la relation devient :

$$y = ax \qquad (2).$$

Construisons, dans le plan (fig. 12), le point A dont les coordonnées sont 1 et a, qui vérifient la relation. Nous allons montrer que tous les points, dont les coordonnées satisfont la relation (2), sont situés sur la droite OA qui joint l'origine O au point A. Soient x, y des coordonnées vérifiant la relation (2) et M le point correspondant. Abaissons de A et M les perpendiculaires AB et MP sur ox. On a, d'après la définition même des coordonnées,

$$OB = 1, \quad BA = |a|, \quad OP = |x|, \quad PM = |y|;$$

et, comme les coordonnées x, y vérifient la relation (2), on a aussi :

$$\frac{|y|}{|x|} = \frac{|a|}{|1|}, \quad \text{ou} \quad \frac{PM}{OP} = \frac{BA}{OB}.$$

Les deux triangles OBA et OPM qui ont un angle égal (*droit*), compris entre deux côtés proportionnels, sont semblables. Les angles $\widehat{MOP}$ et $\widehat{AOB}$ sont donc égaux et le point M ne peut se trouver que sur la droite OA ou sur la droite OA′, symétrique de OA par rapport à ox. Il reste à montrer que M est bien sur OA.

Supposons d'abord a positif : le point A est, alors (fig. 12), dans l'angle (I), puisque ses deux coordonnées sont positives. La droite OA est située tout entière dans les angles opposés par le sommet (I) et (III) et la droite OA′ dans les angles (II) et (IV). Or, puisqu'on a

$$\frac{y}{x} = a > 0,$$

y et x sont de même signe; le point M (n° 66) est situé dans l'angle (I) ou dans l'angle (III) et ne peut être que sur OA. On verrait, de même, que, lorsque a est négatif, la droite OA est située tout entière dans les angles (II) et (IV) et la droite OA′ dans les angles (I) et (III). Mais, dans ce cas, $\frac{y}{x}$ est négatif; y et x étant de signes contraires, M est situé dans l'angle (II) ou dans l'angle (IV) et, par suite, n'est pas sur OA′.

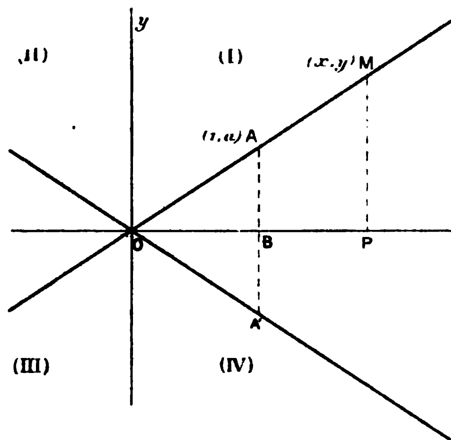


FIG. 12.

Réciproquement, soit M un point, de coordonnées x et y, situé sur la droite OA. Les triangles OAB et OMP sont semblables et on a :

$$\frac{MP}{OP} = \frac{AB}{OB} \quad \text{ou} \quad \left|\frac{y}{x}\right| = |\, a \,| \,.$$

D'ailleurs, $\frac{y}{x}$ et a étant toujours de même signe, on a bien

$$\frac{y}{x} = a \quad \text{ou} \quad y = ax.$$

3° *Supposons*, A, B et C *différents de zéro*. La relation (1) peut être mise sous la forme équivalente

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

ou, en posant, pour abréger,

$$a = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B},$$

$$y = ax + b. \qquad (3).$$

Construisons le point B, de l'axe oy, (*fig.* 13) qui a pour ordonnée b et, d'autre part, la droite OA dont les coordonnées vérifient la relation

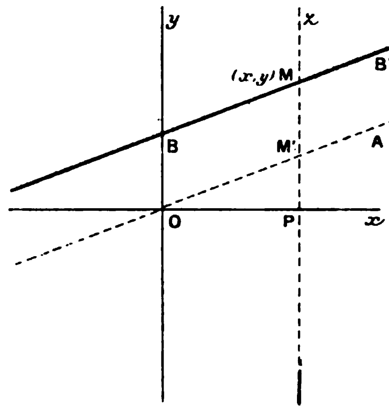


Fig. 13.

$$y = ax.$$

Pour construire le point M, dont l'abcisse est x et dont l'ordonnée, y, est donnée par la formule (3), prenons, sur ox, $\overline{OP} = x$. Soit Pz la perpendiculaire en P, à ox, sur laquelle nous prendrons un sens positif parallèle à celui de oy; le point M est tel que

$$\overline{PM} = ax + b.$$

Soit M′ le point où Pz rencontre OA, on a

$$\overline{PM'} = ax,$$

d'où (*Th. de Chasles*) :

$$\overline{M'M} = \overline{PM} - \overline{PM'} = b = \overline{OB}.$$

Ceci nous prouve que, les deux segments M′M et OB étant parallèles et de même sens, la figure BOM′M est un parallélogramme. Le point M est donc sur la parallèle BB′ à OA, menée par le point B.

Réciproquement, les coordonnées x et y de tout point M de BB′

vérifient la relation (3), car, si M′ est le point d'intersection de la perpendiculaire MP, à ox, avec OA, on a (n° 23) :

$$y = \overline{PM} = \overline{PM'} + \overline{M'M} = ax + b.$$

69. Soit $f(x)$ une fonction de la variable x. Désignons par y la valeur de la fonction qui correspond à la valeur x de la variable. L'égalité

$$y = f(x)$$

fait correspondre, en général, à chaque valeur de x une valeur pour y (en tous cas un nombre limité de valeurs de y). Ceci revient à dire que, si on considère dans un plan deux axes rectangulaires ox et oy, il existe, sur toute parallèle Pz (*fig.* 14) à oy, d'abcisse $x = \overline{OP}$, un point M dont l'ordonnée y est égale à $f(x)$. Lorsqu'on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$, le point P décrit tout l'axe ox, de x' vers x, et le point M, de Pz, décrit un lieu géométrique, une *courbe* C. Cette courbe C est ce qu'on appelle *la courbe représentative de la variation de la fonction*. Réciproquement, on dit que la relation

$$y = f(x)$$

est l'*équation* de la courbe C.

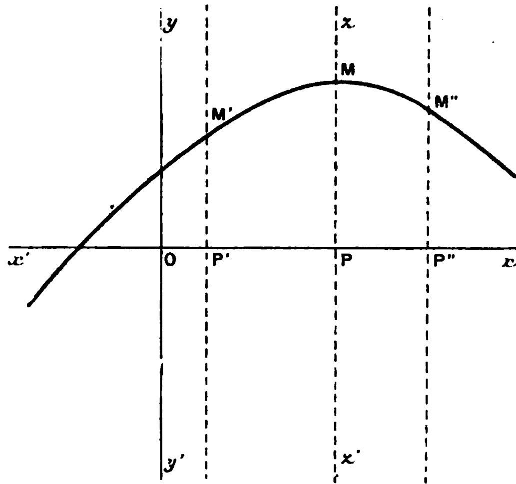


Fig. 14.

D'une manière générale, si tous les points d'une courbe C sont tels que leurs coordonnées vérifient une certaine relation et si, réciproquement, tous les points dont les coordonnées vérifient cette relation sont situés sur cette courbe, on dit que cette relation est l'*équation* de la courbe.

Ainsi, il résulte du théorème que nous avons démontré dans le paragraphe précédent que :

Toute équation du premier degré

$$Ax + By + C = 0$$

représente une droite.

D'ailleurs, réciproquement, *toute droite est représentée par une équation du premier degré.*

En effet :

1° Si la droite est parallèle à un des axes, oy par exemple (*fig.* 11), tous les points M de cette droite ont même abcisse $\overline{OK} = k$. L'équation

$$x = k$$

représente donc cette droite.

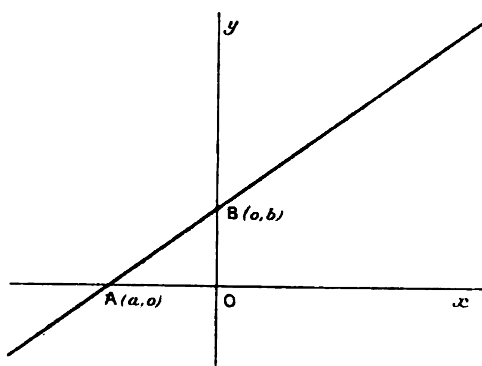


Fig. 15.

2° Si la droite passe par l'origine des coordonnées O (*fig.* 12), soit A le point de cette droite d'abcisse 1; désignons par a son ordonnée :

$$y = ax$$

est l'équation de la droite OA (n° 68).

3° Si la droite rencontre les axes ox et oy en deux points *distincts* A et B (*fig.* 15), soit a l'abcisse $\overline{OA}$ de A et b l'ordonnée $\overline{OB}$ de B. L'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

représente, comme nous l'avons vu (n° 68), une droite.

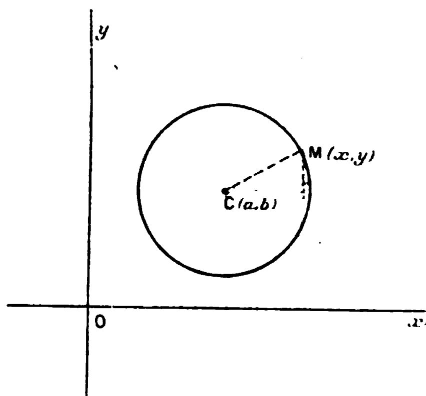


Fig. 16.

Or, puisque cette équation est vérifiée pour

$$x = a, \quad y = 0,$$
$$x = 0, \quad y = b;$$

cette droite passe par les points A et B. C'est donc la droite AB.

Comme second exemple, voici *l'équation d'un cercle* :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

En effet, l'expression

$$(x - a)^2 + (y - b)^2$$

est le carré de la distance du point C, de coordonnées a et b (*fig.* 16), au point M, de coordonnées x et y.

La relation précédente exprime donc que la distance CM, d'un point quelconque M dont les coordonnées la vérifient, au point C, est égale à R; c'est-à-dire que le point M est sur le cercle décrit du point C comme centre avec R pour rayon.

D'ailleurs, réciproquement, les coordonnées x et y d'un point quelconque M du cercle vérifient cette relation.

La représentation graphique de la variation d'une fonction par une courbe donne une image de la variation de la fonction qui permet de suivre facilement le sens de cette variation.

Prenons, sur l'axe ox (*fig.* 14), $\overline{OP} = x$. Lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point P décrit tout l'axe $x'x$ de gauche à droite. Si la fonction croît, sa valeur numérique augmente en même temps que x, l'ordonnée $\overline{PM}$ du point représentatif M augmente et le point M s'élève, la courbe *monte*. Lorsque la fonction décroît, l'ordonnée $\overline{PM}$ diminue, le point M s'abaisse et la courbe *descend*. Donc la courbe monte ou descend (de gauche à droite) suivant que la fonction croît ou décroît. Ainsi, dans la figure 14, lorsque le point P va de P′ en P, la courbe monte; donc la fonction croît, quand x croît de la valeur $x' = \overline{OP'}$ à $x = \overline{OP}$. Au contraire, de P en P″, la courbe descend; donc la fonction décroît, quand x croît de la valeur $x = \overline{OP}$ à la valeur $x'' = \overline{OP''}$.

Dans maintes circonstances, cette représentation graphique peut être utile. En voici un exemple :

Dans certaines maladies il est très utile, pour le médecin, de connaître la variation de la température du corps du malade. La manière dont cette température varie est souvent un renseignement utile pour l'étude de la marche de la maladie. Or, la température du malade est une fonction du temps et on représente graphiquement cette fonction du temps. On emploie, pour cela, (*fig.* 17) un papier quadrillé sur lequel on trace deux axes ox, oy (le quadrillage ne sert qu'à marquer plus facilement les points). Supposons qu'on ait observé le malade du 5 au 17 janvier. Prenons comme unité de temps le jour et portons les jours en abcisses sur ox. Portons en ordonnées les excès de température au-dessus de 34° centigrades. Si le 5 janvier la température du malade est 36°,7 nous marquons un point sur oy entre 36 et 37 environ aux 7 *dixièmes*. Le 6 janvier la température est 37°, nous marquons le point situé à l'intersection de la verticale 6 et de l'horizontale 37; et ainsi de suite. Chaque jour on note la température du malade par un point. En joignant tous les points par un trait continu, on a la

courbe de la maladie. Une simple inspection de cette courbe montre, de suite, la marche de la maladie. On voit que la température s'est d'abord

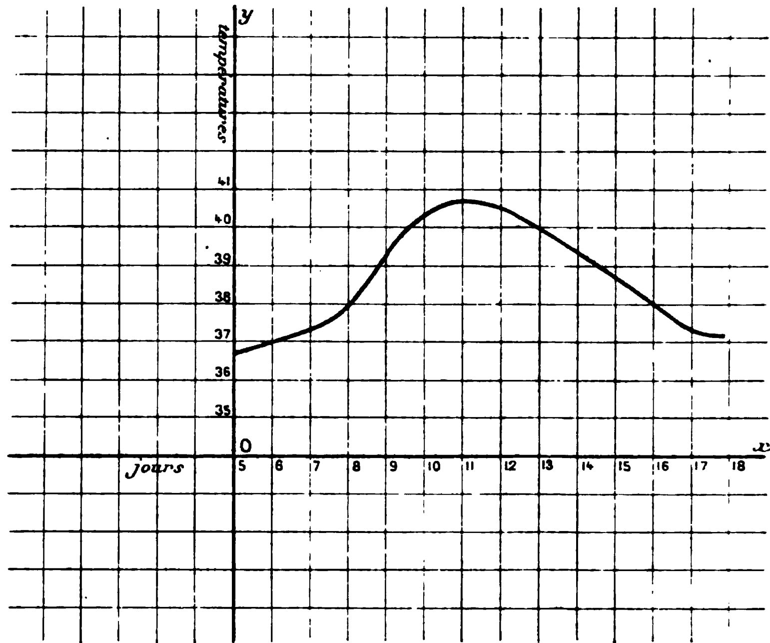


Fig. 17.

élevée lentement, du 5 au 8 janvier, jusqu'à 38°; puis s'est élevée très rapidement, en deux jours, jusque vers 41°. Elle est restée, pendant un jour, du 10 au 11, stationnaire pour redescendre ensuite lentement.

70. D'après ce qui précède, la courbe représentative de la variation de la fonction $ax + b$ est la *droite* BB′ qui a pour équation

$$y = ax + b.$$

Cette représentation met bien en évidence le sens de la variation de la fonction.

1° Si a est positif (*fig.* 18), la parallèle OA (n° 68) à la droite BB′ est située dans les angles I et III, donc la droite BB′ *monte* de gauche à droite; nous savons, en effet (n° 65), que la fonction *croît*.

2° Si a est négatif (*fig.* 19), la parallèle OA à la droite BB′ est située dans les angles II et IV (n° 68), la droite BB′ *descend*; nous savons (n° 65) que la fonction *décroît*.

3° Enfin si $a = 0$, la droite BB′ est parallèle à ox, elle ne monte pas et ne descend pas; la fonction est, en effet, *constante* (*fig.* 20).

71. Résoudre l'équation

$$ax + b = 0 \qquad (1),$$

c'est trouver l'abcisse x du point où la droite

$$y = ax + b \qquad (2)$$

rencontre l'axe ox. Cette nouvelle manière d'envisager la résolution

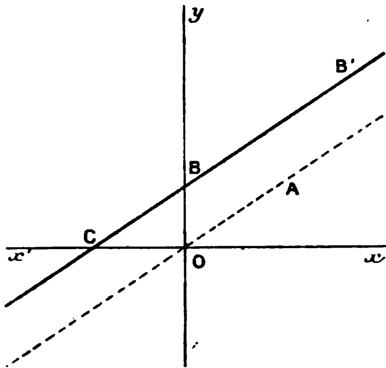


Fig. 18.

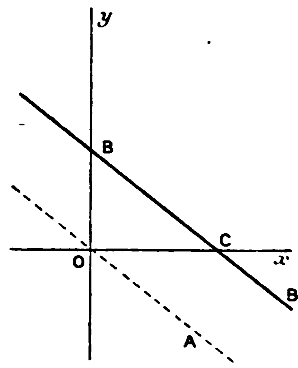


Fig. 19.

de l'équation (1) donnera de la clarté à la *discussion* de cette équation (n° 59).

1° Si a est différent de zéro, la droite BB′, représentée par l'équation (2), n'est pas parallèle à ox; elle coupe donc cet axe en un point C et un seul (*fig.* 18 et 19), l'équation (1) a donc une seule solution qui est $x = \overline{OC}$.

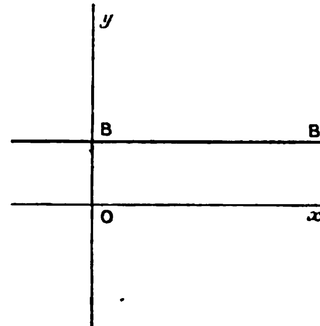


Fig. 20.

2° Si $a = 0$, mais si b est différent de zéro, la droite BB′ est une parallèle à ox (*fig.* 20) et ne rencontre pas ox. L'équation (1) n'a donc pas de solution.

3° Si on a, à la fois, $a = 0$, $b = 0$, la droite BB′ *coïncide* avec ox. Tout point de l'axe ox est un point commun à BB′ et à ox et la solution est *indéterminée*. L'équation (1) est vérifiée pour toute valeur de x.

Examinons maintenant ce qui se passe lorsque, b restant différent de zéro, le coefficient a tend vers zéro. b est l'ordonnée du point

B où la droite BB′, dont l'équation est (2), coupe oy ; si b reste constant, le point B reste fixe et la droite BB′ tourne autour de B, lorsque a varie (*fig*. 21). a étant différent de zéro, la droite BB′ n'est pas parallèle à l'axe ox et le coupe en un point C d'abcisse

$$\overline{OC} = -\frac{b}{a}.$$

Quand a diminue, la longueur OC augmente, le point C s'éloigne du point O et occupe, successivement, les positions C′, C″, etc.... L'angle $\widehat{BCO}$ diminue et, par suite, l'angle égal (alterne interne) $\widehat{CBK}$,

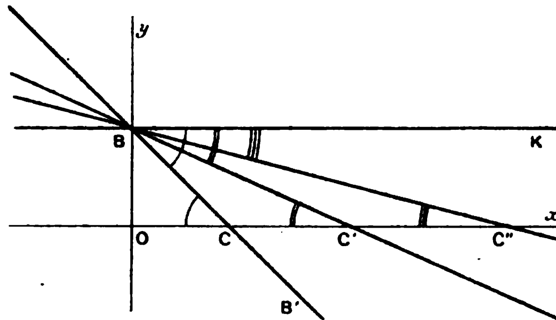


Fig. 21.

que CB fait avec la parallèle BK à ox, diminue aussi et tend vers zéro. On voit donc que, quand a tend vers zéro, la droite BB′ tend à se confondre avec la parallèle BK à ox ; le point C disparaît en s'éloignant indéfiniment. — La parallèle BK à ox peut donc être considérée comme la limite de la sécante BC lorsque le point d'intersection C s'éloigne indéfiniment.

EXERCICES

57. Construire les droites dont les équations sont :

$$y = 2x - 2;$$
$$y = x + 1;$$
$$x + y - 3 = 0;$$
$$2x + 3y = 1.$$

Pour construire une de ces droites, on calculera l'abcisse du point d'intersection avec ox, en faisant $y = 0$; et l'ordonnée du point d'intersection avec oy, en faisant $x = 0$.

58. Quelle est l'équation du cercle dont le centre est le point de ox d'abcisse a, et qui passe par l'origine O des coordonnées ?

59. On appelle *ellipse* le lieu des points M dont la somme des distances à deux points fixes F et F′ est constante et égale à $2a$. Montrer que, si on désigne par $2c$ la

distance FF', et si on prend pour origine des coordonnées le milieu O de FF' et pour axe des x la droite FF', l'équation de l'ellipse est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

en posant, $$b^2 = a^2 - c^2.$$

Pour faire ce calcul, on désignera par x et y les coordonnées de M, on calculera MF et MF', et on écrira que

$$MF + MF' = 2a,$$

On parvient ainsi à une relation contenant deux radicaux; on rendra cette relation entière par deux élévations au carré.

60. On appelle *hyperbole* le lieu géométrique des points dont la différence des distances à deux points fixes F et F' est constante et égale à $2a$. En prenant les mêmes notations et les mêmes axes que dans l'exercice précédent, montrer que l'équation de l'hyperbole est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

en posant :

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

61. On appelle *parabole* le lieu géométrique des points d'un plan à égale distance d'un point fixe F, appelé *foyer*, et d'une droite DD', appelée *directrice*. Montrer que, si on prend pour axe des x la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la directrice DD', pour origine des coordonnées le milieu O de la perpendiculaire abaissée de F sur DD' et, pour sens positif de l'axe des x, le sens de O vers F, l'équation de la parabole est :

$$y^2 - 2px = 0;$$

p désignant le *paramètre* de la parabole, c'est-à-dire la distance du foyer à la directrice.

CHAPITRE V

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES

72. Une seule équation à deux inconnues ne détermine pas, en général, les valeurs de ces inconnues. Par exemple, si on considère l'équation du premier degré à deux inconnues

$$ax + by + c = 0 \qquad (1),$$

cette équation est vérifiée par une infinité de systèmes de valeurs des inconnues x et y, car, si on donne à y une valeur *quelconque* y', on aura, pour déterminer x, une équation du premier degré qui donnera une valeur x', pour x. Nous avons vu, d'ailleurs, que tous

les points, dont les coordonnées x et y vérifient l'équation (1), sont sur une ligne droite.

Au contraire, étant données *deux* équations à *deux* inconnues il y a, en général, un seul ou un nombre *fini* de systèmes de valeurs des inconnues vérifiant les deux équations.

D'une manière générale, étant donné un système de plusieurs équations simultanées à plusieurs inconnues x, y, z, ..., on appelle *solution* de ce système un système de valeurs x', y', z', ..., des inconnues, pour lesquelles les équations sont toutes vérifiées. Deux systèmes d'équations sont dits *équivalents* lorsqu'ils admettent les mêmes solutions; c'est-à-dire lorsque tout système de solutions de l'un vérifie l'autre, et réciproquement.

En général, un système de n équations du premier degré à n inconnues admet une solution et une seule, comme nous le montrerons plus loin.

73. Nous établirons, d'abord, deux propositions préliminaires sur les systèmes d'équations.

Théorème I. — k *étant un nombre différent de zéro et* h *un nombre quelconque, le système des deux équations*

$$A = 0, \quad B = 0 \qquad (1)$$

est équivalent au système

$$hA + kB = 0, \quad A = 0 \qquad (2).$$

Tout système de solutions du système (1), annulant A et B, annule évidemment hA et kB et, par suite, vérifie le système (2). Réciproquement, toute solution du système (2), annulant A et $h\mathrm{A} + k\mathrm{B}$, annule kB et, comme k est différent de zéro, annule B; par suite, vérifie le système (1).

Généralisation. — *Plus généralement, étant donné un système de* p + q *équations, on obtient un système équivalent en remplaçant chacune des* q *dernières équations par celle que l'on obtient en multipliant ses deux membres par un nombre différent de zéro et en lui ajoutant les* p *premières multipliées, respectivement, par des facteurs quelconques.*

Ainsi, le système

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

est équivalent au système

$$A = 0, \quad hA + kB = 0, \quad mA + pC = 0,$$

pourvu que k et p soient différents de zéro.

De même, le système

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 0$$

est équivalent au système

$$\begin{cases} A = 0, \quad B = 0, \\ mA + pB + kC = 0, \\ m'A + p'B + k'D = 0, \\ m''A + p''B + k''E = 0, \end{cases}$$

k, k', k'' étant trois nombres différents de zéro.

La démonstration est la même que pour le cas de deux équations.

Théorème II. — p, q, p′, q′ *étant quatre nombres tels que* pq′ — qp′ *soit différent de zéro, le système des deux équations*

$$A = 0, \quad B = 0 \qquad (1)$$

est équivalent au système

$$pA + qB = 0, \quad p'A + q'B = 0 \qquad (2).$$

Toute solution du système (1), annulant A et B, annule $pA + qB$ et $p'A + q'B$ et, par suite, vérifie le système (2). Réciproquement, des identités

$$(pq' - qp')A \equiv q'(pA + qB) - q(p'A + q'B),$$
$$(pq' - qp')B \equiv p(p'A + q'B) - p'(pA + qB),$$

on conclut que toute solution du système (2), annulant $pA + qB$ et $p'A + q'B$, annule $(pq' - qp')A$ et $pq') - qp')B$ et, par suite, puisque $pq' - qp'$ est différent de zéro, annule A et B et vérifie le système (1).

74. Méthode de résolution par substitution. — Soient les deux équations du premier degré à deux inconnues

$$(1) \begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Supposons l'un des quatre coefficients a, b, a' ou b' différent de zéro, par exemple a, et résolvons la première équation par rapport à x, nous aurons le système équivalent

$$(2) \begin{cases} x - \dfrac{c - by}{a} = 0, \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$$

puisque la première équation est remplacée par une équation équivalente. Portons la valeur de x fournie par la première équation dans la seconde et nous obtenons le système :

$$(3)\quad \begin{cases} x = \dfrac{c - by}{a}, \\ a'\dfrac{c - by}{a} + b'y = c', \end{cases}$$

qui est équivalent au système (2); car, on déduit le système (3) du système (2) en remplaçant la seconde équation par celle que l'on obtient en en retranchant membre à membre la première multipliée par a' (n° 73, *Th. I*). Or, dans le système (3), la seconde équation ne contient plus *qu'une seule* inconnue y; on pourra donc la résoudre par rapport à y et elle donnera, en général, une valeur et une seule pour y. En remplaçant y par sa valeur, dans la première équation, on aura la valeur de l'inconnue x. On voit que le système admet, *en général*, une solution et une seule.

Remarque. — Si l'une des deux équations proposées ne contenait qu'une seule inconnue, la méthode se simplifierait, car on aurait de suite un système de la forme (3); il suffirait de résoudre l'équation à une inconnue et de porter la valeur de cette inconnue dans l'autre. Ainsi, pour résoudre le système

$$\begin{cases} 3x - 5 = 0, \\ 2y + x = 7, \end{cases}$$

je tire x de la première équation, ce qui donne :

$$x = \frac{5}{3}.$$

Je porte cette valeur de x dans la seconde, et j'obtiens :

$$2y + \frac{5}{3} = 7,$$

d'où

$$y = \frac{8}{3}.$$

Exemple. — Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - 1 + \dfrac{y}{3} = x - \dfrac{1}{3}, \\ x - y + 1 = \dfrac{x}{2} + 3. \end{cases}$$

Je tire x de la première équation :

$$x = \frac{2-y}{3},$$

et je porte dans la seconde :

$$\frac{2-y}{3} - y + 1 = \frac{2-y}{6} + 3$$

qui donne, en résolvant, la valeur de y :

$$y = -\frac{10}{7}.$$

En portant cette valeur de y, dans la précédente, j'obtiens :

$$x = \frac{2 + \frac{10}{7}}{3} = \frac{8}{7}.$$

75. Méthode de résolution par réduction. — Soit le système :

$$(1) \quad \begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$$

de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Si $ab' - ba'$ est différent de zéro, le système est (nº 73, *Th. II*) équivalent au système :

$$(2) \quad \begin{cases} b'(ax + by - c) - b(a'x + b'y - c') = 0, \\ -a'(ax + by - c) + a(a'x + b'y - c') = 0. \end{cases}$$

Or, ce système s'écrit, en simplifiant :

$$(3) \quad \begin{cases} (ab' - ba')x - (cb' - bc') = 0, \\ (ab' - ba')y - (ac' - ca') = 0, \end{cases}$$

dans lequel chacune des équations, ne contenant plus qu'une inconnue, donne la valeur de cette inconnue. On en tire donc

$$(4) \qquad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Ceci nous prouve la proposition suivante connue sous le nom de *Règle de Cramer :*

Lorsque, dans le système (1), *la quantité* $ab' - ba'$ *est différente de zéro, ce système admet une solution et une seule donnée par les formules* (4) *dites de Cramer.*

Les valeurs des inconnues ont pour dénominateur commun **ab' — ba'** *et le numérateur de chacune d'elles s'obtient en remplaçant, dans le dénominateur, les coefficients de cette inconnue par les termes connus correspondants, supposés écrits dans les seconds membres.*

Ainsi, le numérateur de x s'obtient en remplaçant, dans $ab'-ba'$, a par c et a' par c'.

Remarque. — Pour obtenir la première équation du système (2), on a multiplié la première équation (1) par le coefficient de y dans la seconde, et la seconde équation (1), par le coefficient de y dans la première; on obtient, ainsi, deux équations dans lesquelles les coefficients de y sont égaux, et, en les retranchant membre à membre, on fait disparaître y. C'est ce qu'on appelle avoir *éliminé* y. De même, la seconde des équations (2) ou (3) s'obtient en *éliminant* x entre les deux équations (1). On rend, pour cela, les coefficients de x égaux dans ces deux équations, en multipliant chacune d'elles par le coefficient de x dans l'autre, et, en retranchant, x disparaît.

Au fond, éliminer y entre les deux équations (1), c'est trouver la valeur qu'il faut donner à x pour que ces deux équations, considérées, chacune, comme une équation à une seule inconnue y, admettent la même solution pour y.

Exemple. — Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - 1 + \frac{y}{3} = x - \frac{1}{3}, \\ x - y + 1 = \frac{x}{2} + 3. \end{cases}$$

Faisons d'abord passer, dans chaque équation, toutes les inconnues dans un membre et chassons les dénominateurs (nº 55), ce qui donne :

$$\begin{cases} 3x + y = 2, \\ x - 2y = 4. \end{cases}$$

Éliminons y, en multipliant la première équation par 2 et ajoutant membre à membre, il vient :

$$7x = 8,$$

d'où

$$x = \frac{8}{7}.$$

De même, en éliminant x, on a

$$-7y = 10,$$

d'où

$$y = -\frac{10}{7}.$$

On arriverait au même résultat en appliquant les formules de *Cramer* :

$$\begin{cases} x = \dfrac{-4-4}{-6-1} = \dfrac{8}{7}, \\ y = \dfrac{12-2}{-6-1} = -\dfrac{10}{7}. \end{cases}$$

76. Discussion. — Reprenons le système général de deux équations du premier degré à deux inconnues

$$(1) \quad \begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

1° *Si* ab′ — ba′ *est différent de zéro*, nous avons vu que ce système admet une solution et une seule donnée par les formules de Cramer :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

2° *Supposons* ab′ — ba′ = 0, mais supposons que l'un des quatre coefficients a, b, a', b' soit différent de zéro ; par exemple, *supposons* a *différent de zéro*. Alors, en vertu du Théorème I (n° 73), le système (1) est équivalent au système

$$(2) \quad \begin{cases} ax + by - c = 0, \\ a'(ax + by - c) - a(a'x + b'y - c') = 0. \end{cases}$$

Or, dans ce système, la seconde équation se simplifie, puisque $ab' - ba'$ est nul, et le système s'écrit :

$$(3) \quad \begin{cases} ax + by - c = 0, \\ ac' - ca' = 0. \end{cases}$$

La seconde équation du système (2) ne contient plus les inconnues x et y ; il peut, alors se présenter deux cas :

(A) $ac' - ca'$ *est différent de zéro*. La seconde équation exprime une *impossibilité* ; le système proposé *n'a donc pas de solution*, on dit que les deux équations (1) sont *incompatibles*.

(B) $ac' - ca' = 0$. La seconde équation du système (2) est alors une *identité* ; elle est vérifiée quelles que soient les valeurs des inconnues x et y. Pour satisfaire le système (2), et, par suite, le système équivalent (1), il suffit de satisfaire la première équation

$$ax + by = c.$$

Le système admet, alors, une *infinité* de solutions; car on pourra prendre pour y une *valeur arbitraire* et, à cette valeur, correspondra pour x une valeur bien déterminée donnée par la formule :

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

On dit qu'il y a *indétermination d'ordre* 1, puisqu'on peut prendre arbitrairement la valeur *d'une* inconnue.

3° *Supposons, enfin*, $a = a' = b = b' = 0$. Dans ce cas, le système (1) ne contient plus les inconnues et se réduit à

$$0 = c, \qquad 0 = c'.$$

(A) Si l'*une* des deux quantités c ou c' est *différente de zéro*, ces égalités sont impossibles et le système proposé *n'a pas de solution*.

(B) Si on a $c = c' = 0$, les deux équations (1) sont des *identités* et sont vérifiées quelles que soient les valeurs de x et de y. Il y a *indétermination complète*, *d'ordre* 2, puisqu'on peut prendre *arbitrairement* les valeurs des *deux* inconnues.

Remarque. — Dans le cas où, a étant différent de zéro, on a, à la fois, $ab' - ba' = 0$ et $ac' - ac' = 0$, les deux équations (1) ont leurs coefficients proportionnels.

En effet, les deux conditions précédentes s'écrivent :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a'}{a} = \frac{c'}{c},$$

ou :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

On a, aussi :

$$b' = \frac{a'}{a} b, \qquad c' = \frac{a'}{a} c,$$

on en conclut l'identité :

$$a'x + b'y - c' \equiv \frac{a'}{a}(ax + by - c)$$

qui montre bien que, tout système de valeurs de x et y qui annule $ax + by - c$, annule aussi $a'x + b'y - c'$.

Résumé. — Le tableau suivant résume toute cette discussion :

$$\left\{\begin{array}{l} ab' - ba' \neq 0 \quad \text{une seule solution ;} \\ ab' - ba' = 0 \left\{\begin{array}{l} a \neq 0 \left\{\begin{array}{l} ac' - ca' \neq 0 \ \text{pas de solution ;} \\ ac' - ca' = 0 \ \text{indétermination d'ordre 1 ;} \end{array}\right. \\ a = a' = b = b' = 0 \left\{\begin{array}{l} c \ \text{ou} \ c' \neq 0 \ \text{pas de solution ;} \\ c = c' = 0 \ \text{indétermination complète.} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Remarque. — La discussion précédente donne lieu à quelques remarques très importantes :

1° On voit, d'abord, que le système

$$(ab' - ba')x = cb' - bc',$$
$$(ab' - ba')y = ac' - ca',$$

qui conduit aux formules de Cramer, n'est pas équivalent au système

$$(1) \left\{\begin{array}{l} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c', \end{array}\right.$$

dans le cas le plus général, puisque, lorsque $ab' - ba' = 0$, cette équivalence n'a plus lieu.

2° Il peut arriver que, lorsqu'on ne sait rien, *a priori*, sur le système proposé, on applique brutalement les formules de Cramer

$$(2) \qquad x = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Lorsque $ab' - ba'$ est nul, ces formules *n'ont plus de sens*; mais on peut cependant, dans le cas particulier où l'une au moins des inconnues figure dans l'une des équations, en tirer des renseignements sur la nature de la solution.

Supposons, en effet, que l'inconnue x figure dans l'une des équations (1), la première par exemple, alors a est différent de zéro. D'après la discussion précédente, si

$$ab' - ba' = 0 \quad \text{et} \quad ac' - ca' \neq 0,$$

il n'y a pas de solution et la valeur de y, fournie par les formules (2), se présente sous la forme $\frac{m}{0}$ où m est différent de zéro.

Si, au contraire, on a, à la fois,

$$ab' - ba' = 0 \quad \text{et} \quad ac' - ca' = 0,$$

il y a indétermination pour y et la valeur de y, fournie par les formules (2), se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. On peut donc énoncer la règle suivante :

Si l'une des inconnues figure, effectivement, dans l'une des équations, on se reporte à la formule qui fournit l'autre inconnue : si la valeur de cette inconnue se présente sous la forme $\frac{m}{0}$ il y a impossibilité ; si, au contraire, la valeur de cette inconnue prend la forme $\frac{0}{0}$, il y a indétermination, pour cette inconnue.

3° Il faudrait bien se garder d'appliquer la règle précédente dans un autre cas que celui que nous venons de préciser, ou d'une autre façon. Ainsi, si b et b' sont nuls tous les deux, la valeur de x se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et, cependant, il ne faudrait pas en conclure qu'il y a indétermination, car, si $ac' - ca'$ est différent de zéro, il y a impossibilité. Il ne faut donc pas dire, d'une façon générale, que le symbole $\frac{0}{0}$ indique toujours une indétermination. De même, dans le cas où

$$a = a' = b = b' = 0,$$

les deux valeurs de x et y prennent la forme $\frac{0}{0}$, et, cependant, il n'y a pas indétermination si l'une des quantités c ou c' est différente de zéro.

Exemple I. — Soit le système :

$$\begin{cases} x - y + 3 = y - 2x + 10, \\ 7x - 3y - 2 = x + y + 1. \end{cases}$$

Il s'écrit, en simplifiant :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7, \\ 6x - 4y = 3. \end{cases}$$

On voit que :

$$ab' - ba' = 12 - 12 = 0;$$
$$ac' - ca' = 9 - 42 = -33 \neq 0;$$

le système n'a donc pas de solution. D'ailleurs, ceci s'aperçoit directement, car, si, pour *éliminer* x, on multiplie la première équation par 2 et qu'on

en retranche, membre à membre, la seconde, on élimine, du même coup, y et on arrive à l'*impossibilité* suivante :

$$0 = 11.$$

Exemple II. — Considérons encore le système :

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda x + y = 1, \\ x + y = 2\lambda, \end{cases}$$

où λ est une quantité supposée connue. On a, ici,

$$ab' - ba' = \lambda - 1 ;$$

donc, si le nombre λ est différent de 1, le système admet une solution et une seule :

$$x = \frac{2(1-\lambda)}{\lambda - 1} = -2, \quad y = \frac{2(\lambda^2 - 1)}{\lambda - 1} = 2(\lambda + 1).$$

Si, au contraire, $\lambda = 1$, $ab' - ba'$ est nul ; mais alors le système devient :

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 2, \end{cases}$$

les deux équations sont identiques et il y a *indétermination*. On peut donner à x une valeur arbitraire et la valeur correspondante de y est donnée par la formule :

$$y = 2 - x.$$

On serait arrivé aux mêmes résultats en cherchant à résoudre directement le système (1), par exemple par la méthode de substitution. De la seconde équation du système (1), tirons la valeur de y et portons-la dans la première ; nous aurons le système équivalent (nº 74) :

$$\begin{cases} (\lambda - 1)\, x = -2(\lambda - 1), \\ y = 2\lambda - x. \end{cases}$$

Si λ est différent de 1, la première équation donne, pour x, une valeur

$$x = -2$$

et, en portant dans la seconde, on a :

$$y = 2\lambda + 2 = 2(\lambda + 1).$$

Si, au contraire, $\lambda = 1$, la première équation devient une *identité* et la seconde se réduit à

$$y = 2 - x,$$

qui est la seule à vérifier. Il y a donc *indétermination* ; on peut donner à x une valeur arbitraire et la valeur correspondante de y est donnée par cette formule.

77. Interprétation géométrique. — La représentation géométrique de la variation d'une fonction par une courbe (nos 66 à 69) nous donne une interprétation très intéressante de la discussion précédente. Traçons dans un plan deux axes rectangulaires ox et oy. Nous savons (n° 68) que tous les points dont les coordonnées vérifient la relation

$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$

sont sur une droite BC (*fig.* 22). De même, l'équation

$$a'x + b'y + c' = 0 \; (2),$$

représente une autre droite B'C'. Résoudre le système des deux équations (1) et (2), c'est trouver les coordonnées d'un point situé, à la fois, sur les deux droites, c'est-à-dire, du *point d'intersection* M des deux droites BC et B'C'. Supposons b et b' différents de zéro, nous pouvons écrire les équations des deux droites sous les formes équivalentes

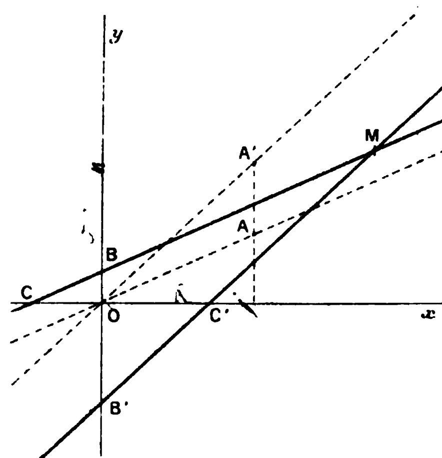


Fig. 22.

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad (1'),$$

$$y = -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'} \quad (2').$$

Or, d'après ce que nous avons vu (n° 68), les équations

$$y = -\frac{a}{b}x \quad \text{et} \quad y = -\frac{a'}{b'}x$$

sont les équations des deux parallèles OA et OA' menées, aux droites BC et B'C', par le point O. (A est le point de coordonnées : $1, -\frac{a}{b}$, et A' a pour coordonnées : $1, -\frac{a'}{b'}\Big)$.

1° Si $-\frac{a}{b}$ est différent de $-\frac{a'}{b'}$, c'est-à-dire *si $ab' - ba'$ est diffé-*

rent de zéro, les droites OA et OA′ sont *distinctes* (car les points A et A′ ne coïncident pas). Par suite, les droites BC et B′C′ ne sont pas parallèles et *se coupent en un point* M, *et un seul*. Il y a donc une solution, et une seule.

2° Si $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$, c'est-à-dire si $ab' - ba' = 0$, les deux droites OA et OA′ coïncident et, par suite, les droites BC et B′C′ sont ou paral-

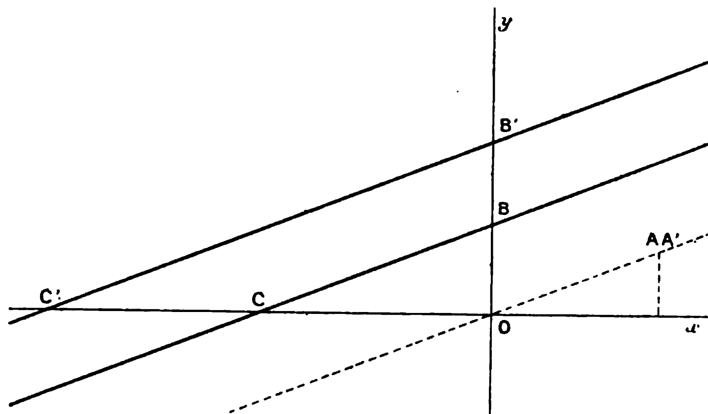


Fig. 23.

lèles ou confondues (*fig.* 23). Or, les abcisses des points C et C′, où ces deux droites coupent l'axe ox, sont $-\frac{c}{a}$ et $-\frac{c'}{a'}$ (on les obtient en faisant $y = 0$ dans les équations (1) et (2)); d'où, deux cas :

(*a*) Si $-\frac{c}{a}$ est différent de $-\frac{c'}{a'}$, c'est-à-dire $ac' - ca'$ *est différent de zéro*, les deux points C et C′ sont distincts et, par suite, les deux droites BC et B′C′ sont *parallèles*. Les deux droites n'ont *aucun point commun* et *il n'y a pas de solution*.

(*b*) Si $-\frac{c}{a} = -\frac{c'}{a'}$, c'est-à-dire si $ac' - ca' = 0$, les deux points C et C′ sont confondus et, par suite, les droites BC et B′C′ coïncident. Tout point de l'une des droites appartient à l'autre; il y a une infinité de points communs, il y a donc *une infinité de solutions*.

Nous retrouvons, ainsi, les résultats de la discussion précédente

par une voie géométrique qui précise le sens des résultats [1].

D'ailleurs, réciproquement, on aurait pu se servir de la discussion algébrique pour en tirer des conclusions géométriques et on peut dire que, de la discussion du n° 76, résultent les trois propositions suivantes :

I. *La condition nécessaire et suffisante pour que les deux droites, qui ont pour équations*

$$ax + by + c = 0,$$
$$a'x + b'y + c' = 0,$$

ne soient pas parallèles est

$$ab' - ba' \neq 0.$$

II. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux droites, dont les équations sont*

$$ax + by + c = 0,$$
$$a'x + b'y + c' = 0,$$

soient parallèles et distinctes sont :

$$ab' - ba' = 0$$

et

$$ac' - ca' \neq 0$$

(*en supposant* $a \neq 0$) [2].

III. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux droites, dont les équations sont*

$$ax + by + c = 0,$$
$$a'x + b'y + c' = 0,$$

soient confondues sont

$$ab' - ba' = 0, \quad ac' - ca' = 0, \quad bc' - cb' = 0$$

(*dont une est toujours conséquence des deux autres*), *ou encore*

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

En d'autres termes :

Pour que deux équations du premier degré représentent la même droite il faut et il suffit que leurs coefficients soient proportionnels.

(1) Dans cette discussion géométrique, il n'y a pas lieu d'examiner le cas où

$$a = a' = b = b' = 0,$$

car, dans ce cas, les équations (1) et (2) ne représentent plus des droites.

(2) Si a et a' sont nuls, il faut que b et b' soient différents de zéro et la condition $ac' - ca' \neq 0$ doit être remplacée par $bc' - cb' \neq 0$.

EXERCICES

62. Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21, \\ 5x - 2y = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21x + 12y = 87, \\ 35x - 18y = 69; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{4x}{3} - \dfrac{2y}{5} = \dfrac{3x}{4} + \dfrac{19y}{40}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{5x - 1}{6} + \dfrac{4y - 5x}{10} = \dfrac{3y - 8x}{4} - \dfrac{29}{300}, \\ \dfrac{y - 1}{2} + \dfrac{3 - 2y}{5} - \dfrac{x - 8}{11} = \dfrac{138}{100}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{7x}{2} - y + 3 - \dfrac{y}{2} = -\dfrac{1}{2} + 15x + 2y, \\ \dfrac{x - 2}{2} + \dfrac{3y}{2} - 6x = 7y - \dfrac{x}{3} + 7. \end{cases}$$

On fera ces résolutions par les diverses méthodes indiquées.

63. Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} a^2 + ax + y = 0, \\ b^2 + bx + y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = a, \\ 4x + 7y = b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + ay = b, \\ ax - by = c; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = a, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = b. \end{cases}$$

64. Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1, \\ x + y = \lambda; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda x - 2y = \lambda, \\ (\lambda - 1)x - y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + (3\lambda - 1)y = 0, \\ x + 2y = \lambda - 4. \end{cases}$$

et *discuter* la résolution de ces systèmes suivant les valeurs que prend λ.

65. Déterminer λ de façon que les deux droites dont les équations sont :

$$y = \lambda x + 2,$$
$$3y - 1 = x + 3,$$

soient parallèles.

CHAPITRE VI

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUS DE DEUX INCONNUES

78. Méthode de résolution par substitution. — Considérons d'abord un système de trois équations du premier degré à trois inconnues :

$$(1)\quad \begin{cases} ax + by + cz = d, \\ a'x + b'y + c'z = d', \\ a''x + b''y + c''z = d''. \end{cases}$$

Si a est différent de zéro, nous pouvons résoudre la première par rapport à x et, en portant la valeur de x dans les deux autres, nous obtenons le système

$$(2)\quad \begin{cases} x = \dfrac{d - by - cz}{a}, \\ a'\dfrac{d - by - cz}{a} + b'y + c'z = d', \\ a''\dfrac{d - by - cz}{a} + b''y + c''z = d'', \end{cases}$$

qui est équivalent au système (1); car on le déduit du système (1) en remplaçant la première équation par une équation équivalente (n° 55 et 56), la seconde équation par celle que l'on obtient en en retranchant la première multipliée par a' (n° 73, *Th. I*, *Généralisation*), et la troisième équation par celle que l'on obtient en en retranchant la première multipliée par a''. Pour résoudre le système (1), il suffit donc de résoudre le système (2). Or, dans le système (2), les deux dernières équations ne contiennent plus que deux inconnues y et z; on aura donc les valeurs de ces inconnues en résolvant ce système; et, en portant leurs valeurs dans la première équation, on aura la valeur de x.

EXEMPLE. — Soit à résoudre le système :

$$(1)\quad \begin{cases} 4x - 5y + 2z = 0, \\ 3x + 2y + 7z = 28, \\ x - y + 2z = 5. \end{cases}$$

En tirant x de la dernière équation et portant dans les autres, on a :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + y - 2z, \\ 4(5 + y - 2z) - 5y + 2z = 0, \\ 3(5 + y - 2z) + 2y + 7z = 28. \end{array} \right.$$

Les deux dernières équations simplifiées donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} y + 6z = 20, \\ 5y + z = 13; \end{array} \right.$$

d'où on tire :

$$y = 2, \quad z = 3.$$

En portant ces valeurs de y et z dans la première équation du système (2), on a :

$$x = 5 + 2 - 6 = 1.$$

79. La méthode, que nous venons d'exposer pour les systèmes de trois équations à trois inconnues, s'étend, immédiatement, à un système de n équations à n inconnues et on peut énoncer la règle suivante :

Règle. — *Pour résoudre un système de* n *équations du premier degré à* n *inconnues, on résoud l'une des équations par rapport à l'une des inconnues et on porte sa valeur dans les autres équations. On obtient, ainsi, un système équivalent au système proposé* (*en vertu du Th. I, généralisé*, n° 73), *dans lequel* (n — 1) *équations ne contiennent plus que* (n — 1) *inconnues. On est, ainsi, ramené à résoudre un système de* (n — 1) *équations à* (n — 1) *inconnues qu'on traite comme le précédent; ce qui conduit à résoudre un système de* (n — 2) *équations à* (n — 2) *inconnues; et ainsi de suite, de proche en proche. On arrivera, finalement, à une seule équation à une inconnue qui donnera la valeur de cette inconnue. En remontant, de proche en proche, les équations résolues par rapport aux autres inconnues et en y portant, successivement, les valeurs des inconnues déterminées, on aura les valeurs de toutes les autres inconnues.*

Exemple. — Soit à résoudre le système de cinq équations à cinq inconnues :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x - y + z - t + u = 0, \\ 2x - y + 3z = 1, \\ x + 3y - 2u = 0, \\ 3x - 3y + t = 2, \\ 5z - 4t + 5u = 2. \end{array} \right.$$

peut être généralisée. Au lieu de tirer *une* inconnue x de l'une des équations, pour porter sa valeur dans les autres, on pourrait résoudre *deux* des équations par rapport à *deux* des inconnues et porter leurs valeurs, en fonction des autres inconnues, dans les équations restantes. Ainsi, dans un système de trois équations à trois inconnues x, y et z, on pourrait tirer x et y de deux des équations, en fonction de z, et porter ces valeurs dans la troisième équation; on obtiendrait, ainsi, une équation à une inconnue z qui donnerait la valeur de cette inconnue.

D'une manière générale, lorsqu'on a n équations à n inconnues on peut, pour résoudre le système, résoudre p équations par rapport à p inconnues, en fonction des $(n-p)$ autres inconnues. En portant les valeurs des p premières inconnues dans les $(n-p)$ équations restantes, on obtiendra un système de $(n-p)$ équations qui fournira les valeurs des $(n-p)$ dernières inconnues. En portant les valeurs de ces $(n-p)$ inconnues dans les expressions des p premières, on aura les valeurs des p premières. On ramène, ainsi, la résolution d'un système de n équations à la résolution de deux systèmes l'un de p, l'autre de $(n-p)$ équations. Il y aura, par exemple, avantage à procéder ainsi lorsque p équations ne contiennent que p inconnues; car on aura, de suite, la valeur de ces p inconnues. La méthode ordinaire, que nous avons développée plus haut, est le cas de $p=1$.

On pourrait, en particulier, prendre $p=n-1$, c'est-à-dire résoudre $(n-1)$ équations par rapport à $(n-1)$ inconnues. En portant ces valeurs dans la dernière, on aura une équation à une inconnue qui donnera la valeur de la $n^{\text{ième}}$ inconnue.

Au fond, toutes ces méthodes sont équivalentes, car chacune ramène la résolution d'un système d'équations à des résolutions de systèmes d'un nombre moindre d'équations. En traitant ces systèmes comme le système proposé, et en continuant de la sorte, on est toujours ramené, en dernière analyse, à résoudre des équations à *une* inconnue. Mais, suivant la forme des systèmes proposés, il pourra y avoir avantage, au point de vue de la simplicité du calcul, à suivre plutôt une marche qu'une autre.

80. Méthode de Bézout. — La méthode de Bézout n'est autre chose qu'une généralisation de la méthode de résolution par réduction pour le cas de deux inconnues (n° 75). Reprenons, rapidement, cette méthode : soit

$$(1)\quad \begin{cases} ax+by=c, \\ a'x+b'y=c', \end{cases}$$

un système de deux équations à deux inconnues. Pour avoir la valeur de x, on *élimine* y et, à cet effet, on multiplie les deux équations par des facteurs tels, qu'en ajoutant membre à membre, le coefficient de y soit nul. Dans ce cas simple ces facteurs sont faciles à trouver; il suffit de multiplier la première par b' et la seconde par $-b$.

Considérons maintenant le système :

$$(2)\quad \begin{cases} ax + by + cz = d, \\ a'x + b'y + c'z = d', \\ a''x + b''y + c''z = d''; \end{cases}$$

multiplions la première équation par λ, la seconde par λ', la troisième par λ'' et ajoutons, on obtient :

$$\begin{aligned}(\lambda a + \lambda' a' + \lambda'' a'')x + (\lambda b + \lambda' b' + \lambda'' b'')y + (\lambda c + \lambda' c' + \lambda'' c'')z \\ = \lambda d + \lambda' d' + \lambda'' d'',\end{aligned}$$

équation qui pourra, par exemple, remplacer la troisième équation, si λ'' est différent de zéro (n° 73, *Th. I*). Prenons $\lambda'' = 1$ et déterminons λ et λ' de façon que les coefficients de y et de z soient nuls, c'est-à-dire de façon que y et z soient *éliminés*; λ et λ' sont alors les solutions du système

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda b + \lambda' b' + b'' = 0, \\ \lambda c + \lambda' c' + c'' = 0, \end{cases}$$

de deux équations à deux inconnues. Ces valeurs de λ et λ' ainsi déterminées, on aura la valeur de x :

$$x = \frac{\lambda d + \lambda' d' + d''}{\lambda a + \lambda' a' + a''}.$$

On voit ainsi que, pour trouver la valeur de x, on est ramené à résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

De même, pour avoir y, il faut *éliminer* x et z; il faudra, alors, déterminer λ et λ' (en prenant toujours $\lambda'' = 1$) de façon que

$$(4)\quad \begin{cases} \lambda a + \lambda' a' + a'' = 0, \\ \lambda c + \lambda' c' + c'' = 0, \end{cases}$$

λ et λ' étant donnés par ce système, on aura :

$$y = \frac{\lambda d + \lambda' d' + d''}{\lambda b + \lambda' b' + b''}.$$

On pourrait procéder de même pour z.

En résumé, on voit que cette méthode ramène la résolution du système proposé à celle de *trois* systèmes de deux équations à deux inconnues. Lorsqu'on aura trouvé la valeur de x, il sera plus simple, pratiquement, de porter cette valeur dans les deux premières équations (2) et de résoudre le système, à deux inconnues y et z, ainsi obtenu.

EXEMPLE. — Considérons le système :

$$\begin{cases} 4x - 5y + 2z = 0, \\ 3x + 2y + 7z = 28, \\ x - \ y + 2z = 5. \end{cases}$$

Multiplions la première équation par λ, la seconde par λ' et ajoutons à la troisième. Le système proposé est équivalent (n° 73) au système :

$$\begin{cases} 4x - 5y + 2z = 0, \\ 3x + 2y + 7z = 28. \\ (4\lambda + 3\lambda' + 1)x - (5\lambda - 2\lambda' + 1)y + (2\lambda + 7\lambda' + 2)z = 28\lambda' + 5. \end{cases}$$

1° Choisissons d'abord λ et λ' de façon que :

$$5\lambda - 2\lambda' + 1 = 0,$$
$$2\lambda + 7\lambda' + 2 = 0;$$

ce qui donne :

$$\lambda = -\frac{11}{39}, \qquad \lambda' = -\frac{8}{39},$$

et la dernière équation devient :

$$\left(-\frac{44}{39} - \frac{24}{39} + 1\right)x = -\frac{224}{39} + 5,$$

qui donne : $\qquad x = 1.$

2° Choisissons ensuite λ et λ' de façon à éliminer x et z :

$$4\lambda + 3\lambda' + 1 = 0,$$
$$2\lambda + 7\lambda' + 2 = 0;$$

nous aurons :

$$\lambda = -\frac{1}{22}, \qquad \lambda' = -\frac{3}{11},$$

et la dernière équation devient :

$$\left(-\frac{5}{22} + \frac{6}{11} + 1\right)y = \frac{84}{11} - 5,$$

qui donne : $\qquad y = 2.$

3° Éliminons, enfin, x et y et, pour cela, prenons λ et λ' de façon que :

$$4\lambda + 3\lambda' + 1 = 0,$$
$$5\lambda - 2\lambda' + 1 = 0,$$

d'où :

$$\lambda = -\frac{5}{23}, \qquad \lambda = -\frac{1}{23};$$

la dernière équation s'écrit alors :

$$\left(-\frac{10}{23} - \frac{7}{23} + 2\right)z = -\frac{28}{23} + 5,$$

d'où

$$z = 3.$$

81. La méthode de Bézout, que nous venons d'exposer, en détail, pour un système de trois équations à trois inconnues, s'applique, sans modification, à un système de n équations à n inconnues.

Soit, en effet,

$$(1) \qquad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \ldots \quad A_{n-1} = 0, \quad A_n = 0.$$

un système de n équations du premier degré à n inconnues.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ étant $(n-1)$ facteurs numériques, nous savons que le système proposé (n° 73) est équivalent au système (2) suivant :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = 0, A_2 = 0, \ldots . A_{n-1} = 0, \\ \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_{n-1} A_{n-1} + A_n = 0. \end{array} \right.$$

Or, si on peut choisir les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ de façon que la dernière équation du système (2) ne contienne plus *qu'une seule* inconnue, cette équation donnera, de suite, la valeur de cette inconnue. Ceci est en général possible : car, en égalant à zéro, dans la dernière équation du système (2), les coefficients de toutes les inconnues, *sauf une*, on a, pour déterminer $\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_{n-1}$, un système de $(n-1)$ équations du premier degré à $(n-1)$ inconnues. La méthode de Bézout ramène, ainsi, la détermination d'une inconnue à la résolution d'un système de $(n-1)$ équations à $(n-1)$ inconnues. Pour résoudre le système (1) on est donc ramené à résoudre des systèmes à $(n-1)$ inconnues. En appliquant à ces nouveaux systèmes la méthode de Bézout on sera ramené à résoudre des systèmes à $(n-2)$ inconnues, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'enfin on parvienne à des équations du premier degré à *une* inconnue.

Généralisation. — Cette méthode, comme la méthode de substitution, peut encore être appliquée d'une façon plus large. Au lieu

d'*éliminer* $(n-1)$ inconnues entre les n équations, pour obtenir une seule équation à une inconnue, on peut éliminer un nombre moindre d'inconnues $(n-p)$, par exemple, pour obtenir un système ne contenant plus que p inconnues. Ainsi, soit un système de quatre équations du premier degré à quatre inconnues x, y, z, t:

$$(1) \qquad A=0, \quad B=0, \quad C=0, \quad D=0.$$

Ce système est équivalent au système

$$(2) \quad \begin{cases} A=0, \quad B=0, \\ C+\lambda A+\mu B=0, \quad D+\lambda' A+\mu' B=0 \end{cases}$$

(d'après le *théorème I* du n° 73). Or, dans les deux dernières équations, on pourra disposer des nombres λ, μ et λ', μ' de façon que ces équations ne contiennent plus les inconnues x et y. Pour cela, on écrira que les coefficients de x et y dans $C+\lambda A+\mu B$ sont nuls et on aura, pour déterminer λ et μ, deux équations du premier degré à deux inconnues. De la même façon, on déterminera λ' et μ'. On aura, ainsi, *éliminé* x et y. Les deux dernières équations du système (2) ne contiendront plus que les inconnues z et t et donneront les valeurs de ces inconnues. On portera les valeurs de z et t dans les deux premières équations qui donneront x et y. On aura, ainsi, résolu le système (1) en résolvant quatre systèmes d'équations à *deux* inconnues.

Des procédés analogues pourront être employés pour des systèmes à un nombre quelconque d'inconnues. Considérons, par exemple, un système

$$A_1=0, \quad A_2=0, \quad \ldots . \quad A_n=0$$

de n équations du premier degré, à n inconnues. Ce système sera équivalent (*Th. I*, n° 73) au système suivant :

$$A_1=0, \quad A_2+\lambda_2 A_1=0, \quad \ldots . \quad A_n+\lambda_n A_1=0,$$

où $\lambda_2, \lambda_3, \ldots . \lambda_n$ sont n nombres arbitraires. On pourra, évidemment, déterminer $\lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ de façon que les dernières équations ne contiennent plus que $(n-1)$ inconnues, en égalant à zéro le coefficient d'une inconnue x dans chacune de ces équations. On aura, ainsi, éliminé *une* inconnue et on sera ramené à résoudre le système des $(n-1)$ dernières équations à $(n-1)$ inconnues, qu'on pourra traiter comme le précédent.

EXERCICES

66. Résoudre les systèmes suivants d'équations du premier degré à trois inconnues :

$$\begin{cases} 12x + 7y = 109, \\ 5y - 2z = 11, \\ 3z + 4x = 26; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 47, \\ 5x - 3y + 7z = 41, \\ 7x - 2y - 5z = 24; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 36, \\ \frac{x}{15} + \frac{y}{20} + \frac{z}{9} = 10, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{10} + \frac{z}{4} = 43; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{10x + 4y - 5z}{5} = \frac{4x + 6y - 3z}{9}, \\ 10x + 4y - 5z = 4x + 6y - 3z - 8, \\ \frac{10x + 4y - 5z}{10} + \frac{4x + 6y - 3z}{3} = \frac{x + y + z}{4}. \end{cases}$$

67. Résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} a^3 + a^2x + ay + z = 0, \\ b^3 + b^2x + by + z = 0, \\ c^3 + c^2x + cy + z = 0\ ; \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2}\ ;$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ (b + c)x + (c + a)y + (a + b)z = 0, \\ bcx + cay + abz = 1\ ; \end{cases}$$

$$xyz = a(yz - zx - xy) = b(zx - xy - yz) = c(xy - yz - zx)$$

(TODHUNTER).

68. Résoudre et discuter, suivant les diverses valeurs attribuées à λ, μ et ρ, les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 1, \\ x + \lambda y + z = \lambda, \\ x - y + z = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ \mu z + x + y = \rho, \\ 2(x + \lambda y + \lambda z) = \mu + 2 + z - y. \end{cases}$$

69. Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 5y - 3z = 9, \\ 4z - 3t = 5, \\ 20t - 3x = 8\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2t = 4, \\ 5y - 2z = 4, \\ 5x + 3z = 14, \\ x - 4y + 3t = 5\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 3y - 2z + t = 9, \\ 3x + 4y + 3z - 2t = 12, \\ 6x + 2y - 4z + 3t = 10, \\ 2x + 5y - z + 4t = 25\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + m(y + z + u) = k, \\ by + m(z + x + u) = l, \\ cz + m(u + x + y) = p, \\ du + m(x + y + z) = q. \end{cases}$$

70. Résoudre et discuter, suivant les diverses valeurs de λ, le système :

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = 2\lambda, \\ x + z + \lambda t = 0, \\ (\lambda + 1)\,x + \lambda y + z = \lambda, \\ x + z = 0. \end{cases}$$

71. Résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} ax^3 = by^3 = cz^3, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{d} \end{cases}$$ (J. Bertrand) ;

$$\begin{cases} \sqrt{y} - \sqrt{20 - x} = \sqrt{y - x}, \\ 3\sqrt{20 - x} = 2\sqrt{y - x} \end{cases}$$ (J. Bertrand).

72. Démontrer que le système de quatre équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \lambda\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \mu\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\mu}\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

admet une solution unique et déterminer cette solution.

CHAPITRE VII

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ

82. *Résoudre* un problème, c'est trouver certaines quantités appelées *inconnues*, connaissant certaines relations entre ces quantités et d'autres quantités connues qu'on appelle les *données* du problème. Pour résoudre un problème par l'algèbre, on désigne l'inconnue ou les inconnues par des lettres (en général x, y, z, t ...) et on *traduit algébriquement* les relations qui existent entre les données et les inconnues. On est, ainsi, conduit à résoudre un certain nombre d'équations qui fournissent les valeurs des inconnues. On dit qu'un problème est du *premier degré* si sa résolution n'exige que la résolution d'équations du premier degré. Le problème est dit du *second degré* si sa résolution se ramène à la résolution d'une équation du second degré. D'une manière générale, un problème est dit du $n^{\text{ième}}$ degré si sa résolution se ramène à celle d'une équation de degré n.

La solution de questions arithmétiques nous a déjà fourni des exemples de ce genre. Ainsi, reprenons le problème suivant (1) :

On sait que 25 *litres de vin coûtent* 32fr,25; *on demande combien coûteront* 37 *litres du même vin.*

Ici, les données sont : 25 litres et leur prix 32fr,25; d'autre part, 37 litres dont l'inconnue est le prix. La relation entre les données et l'inconnue x n'est pas donnée explicitement, mais on suppose implicitement que, suivant les conventions habituelles, il y a proportionnalité entre le prix et le nombre des litres de vin. On a, alors, la relation

$$\frac{x}{32,25} = \frac{37}{25},$$

ce qui n'est autre chose qu'une équation du premier degré à une inconnue qui donne :

$$x = \frac{37 \times 32,25}{25}.$$

De même, dans ce qui précède, nous avons déjà, plusieurs fois, donné des exemples de résolutions de problèmes par l'algèbre. Dans les nos 24 et 25, nous avons traité tous les problèmes simples, relatifs au mouvement uni-

(1) Voir *Leçons d'arithmétique* de M. Tannery, page 357, n° 372.

forme; dans les n°s 71 et 77 nous avons résolu les problèmes suivants : « trouver le point d'intersection d'une droite avec l'axe ox » et « trouver le point d'intersection de deux droites quelconques ».

Traitons, d'abord, quelques exemples simples.

EXEMPLE I. — *Trouver la longueur de l'arête d'un cube sachant que la somme des longueurs de toutes ses arêtes est égale à la somme des longueurs des arêtes d'un parallélépipède dont les dimensions sont* a, b, *etc.*

Soit x la longueur inconnue de l'arête du cube. Le cube a 12 arêtes égales à x et le parallélépipède a 4 arêtes égales à a, 4 arêtes égales à b et 4 arêtes égales à c. On doit donc avoir

$$12x = 4a + 4b + 4c,$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{a+b+c}{3}.$$

EXEMPLE II. — *Trouver un nombre sachant que si on le multiplie par* 2 *et que du résultat on retranche* 3, *on obtient le même résultat que si on avait divisé ce nombre par* 5 *et qu'au résultat on eût ajouté* 3 *fois ce nombre augmenté de* 2.

Soit x le nombre cherché. De l'énoncé même il résulte qu'on doit avoir :

$$2x - 3 = \frac{x}{5} + 3(x + 2).$$

Ce qui donne, en résolvant cette équation,

$$x = -\frac{15}{2}.$$

EXEMPLE III. — *Trouver le millésime d'une année sachant que ce nombre a* 4 *chiffres et que :*

1° *La somme des chiffres est* 23 ;

2° *La somme du chiffre des mille et du chiffre des centaines est égale au chiffre des dizaines ;*

3° *Le chiffre des centaines est égal au double de l'excès du chiffre des dizaines sur le chiffre des unités ;*

4° *Le double du chiffre des dizaines est égal à* 3 *fois la somme du chiffre des mille et du chiffre des unités.*

Soit x le chiffre des mille, y celui des centaines, z celui des dizaines et t celui des unités. Les quatre parties de l'énoncé nous donnent les quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 23, \\ x + y &= z, \\ y &= 2(z - t), \\ 2z &= 3(x + t). \end{aligned}$$

En résolvant ce système, on trouve :

$$x = 1, \qquad y = 8, \qquad z = 9, \qquad t = 5.$$

Le millésime cherché est donc 1895.

83. Discussions. — Un grand nombre de problèmes n'ont des solutions que si les inconnues satisfont certaines conditions restrictives qui tiennent à la nature même du problème. Or, lorsqu'on traduit algébriquement l'énoncé, de façon à obtenir les équations du problème, on ne tient pas compte de ces conditions, de telle façon que les solutions des équations pourront fort bien ne pas convenir au problème. Ainsi, dans l'*Exemple III* précédent, il fallait, évidemment, que les nombres trouvés, pour les quatre inconnues, x, y, z et t, soient positifs ou nuls, entiers et plus petits que 10. Si la résolution des équations avait fourni, pour x, y, z et t, des valeurs plus grandes que 10, fractionnaires ou négatives, le problème proposé n'aurait pas eu de solution, quoique le système des équations, auquel il conduit, en ait une.

Si les *données* du problème sont *numériques*, il n'y aura qu'à vérifier si les solutions du système d'équations, auquel conduit le problème, satisfont bien les conditions restrictives de l'énoncé. Si elles ne les satisfont pas, on pourra affirmer que le problème proposé n'a pas de solution.

EXEMPLE IV. — *Une personne possède 10 pièces d'argent, les unes de 5 francs et les autres de 2 francs, formant une somme totale de 40 francs. On demande combien elle a de pièces de 5 francs et combien de pièces de 2 francs.*

Soit x le nombre des pièces de 5 francs et y le nombre des pièces de 2 francs. Il y a en tout 10 pièces, donc :

$$x + y = 10 \qquad (1).$$

Les x pièces de 5 francs valent $5x$ francs et les y pièces de 2 francs valent $2y$ francs, on doit donc avoir :

$$5x + 2y = 40 \qquad (2).$$

En résolvant le système des deux équations (1) et (2) on trouve :

$$x = \frac{20}{3}, \quad y = \frac{10}{3}.$$

Or, d'après sa nature même, le problème doit avoir pour solution un système de deux nombres *entiers*, vérifiant les équations (1) et (2) : puisque les nombres qui vérifient ces équations sont fractionnaires, le problème *n'a pas de solution.*

Lorsqu'au contraire les données du problème sont représentées par des lettres, en exprimant que les solutions des équations satisfont les conditions restrictives, on trouvera certaines conditions que devront satisfaire les données pour que le problème soit

possible. C'est la recherche de ces conditions qu'on nomme la *discussion du problème*.

Ainsi, *discuter un problème c'est trouver les conditions que doivent satisfaire les données pour que le problème soit possible.*

Exemple V. — *Dans une course de 3 chevaux* A, B, C :

on rend	*a fois la mise si le cheval*	A	*arrive premier*
—	*b*	—	B	—
—	*c*	—	C	—

On demande quelles sont les mises qu'un joueur doit placer sur les 3 chevaux pour gagner, certainement, une somme s.

Soit x la mise sur le cheval A, y la mise sur le cheval B, z la mise sur C. Dans tous les cas, la somme que touche le joueur, après la course, doit être égale à sa mise totale $x + y + z$, augmentée de la somme s, qu'il veut gagner. Or, si A arrive premier, il touche a fois sa mise, c'est-à-dire ax; si B arrive, il touche by; et si C arrive, il touche cz. On doit donc avoir, pour les trois cas :

$$\begin{cases} ax = s + x + y + z, \\ by = s + x + y + z, \\ cz = s + x + y + z. \end{cases}$$

En résolvant ce système de trois équations à trois inconnues on trouve :

$$x = \frac{s}{a(1-m)}, \quad y = \frac{s}{b(1-m)}, \quad z = \frac{s}{c(1-m)},$$

en posant :

$$m = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Discussion. — Pour que le problème soit possible il faut et il suffit que les valeurs trouvées pour x, y et z soient positives. Or, a, b, c, s étant des nombres positifs, il faut, pour cela, et il suffit, que $1 - m$ soit positif, c'est-à-dire que l'on ait :

$$m < 1$$

ou

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1.$$

Donc *le problème proposé n'est possible que si la somme des inverses des cotes* a, b, c *des chevaux est plus petite que* 1.

Exemple VI. — *Calculer les longueurs des côtés d'un triangle isocèle connaissant son périmètre* 2p *et la hauteur* h *relative à la base.*

Soit x la longueur commune des côtés égaux AB et AC (fig. 24), y la longueur de la base. Le périmètre est, évidemment, $2x + y$. On a donc, d'abord,

$$2x + y = 2p \qquad (1).$$

Soit AD la hauteur relative à la base. Dans le triangle rectangle ABD on a :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$$

c'est-à-dire

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \quad (2).$$

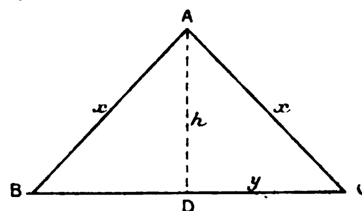


Fig. 24.

Tirons y de l'équation (1) :

$$y = 2(p - x);$$

en portant dans l'équation (2), on trouve :

$$x^2 = h^2 + (p - x)^2$$

ou

$$0 = h^2 + p^2 - 2px;$$

ce qui donne :

$$x = \frac{h^2 + p^2}{2p}$$

et, par suite,

$$y = \frac{p^2 - h^2}{p}.$$

Discussion. — Pour que le problème admette une solution, il faut que les valeurs trouvées, pour x et y, soient positives, et, qu'avec ces longueurs, on puisse construire un triangle isocèle, c'est-à-dire que la longueur y de la base soit plus petite que la somme $2x$ des autres côtés.

Or, la valeur trouvée pour x est, manifestement, positive. Pour que la valeur de y soit positive il faut que

$$p^2 > h^2 \quad \text{ou} \quad p > h.$$

Enfin, il faut encore que l'on ait :

$$y < 2x$$

c'est-à-dire

$$\frac{p^2 - h^2}{p} < \frac{p^2 + h^2}{p},$$

ce qui a toujours lieu.

La seule condition de possibilité du problème est donc :

$$p > h.$$

Le demi-périmètre doit être plus grand que la hauteur.

84. Interprétation des solutions négatives. — Il arrive, fréquemment, que, dans un problème, plusieurs hypothèses sont

possibles sur la forme du résultat, parce que l'inconnue est une grandeur susceptible d'être comptée dans deux sens opposés. En général, on peut, en faisant une convention sur le signe de l'inconnue, établir cependant un système d'équations qui convienne à tous les cas. Nous avons vu des exemples de cette nature dans les problèmes du mouvement uniforme et, en convenant de considérer le temps comme positif ou négatif, suivant qu'il est passé au futur, et les distances comme positives ou négatives, suivant qu'elles étaient portées dans un sens ou dans le sens opposé, nous sommes parvenus à une formule unique (n° 25) qui convenait à tous les cas.

Exemple VII. — *Un joueur entre au jeu avec une mise de 100 francs; il joue deux coups, et on demande quelle est la somme qu'il a gagnée ou perdue sachant qu'au premier coup il a gagné le double de ce qui lui reste à la fin du second coup et qu'au second coup il a perdu 150 francs.*

Soit x le nombre de francs gagnés ou perdus, x désignant un nombre positif s'il y a gain et un nombre négatif s'il y a perte (voir n° 26).

Dans les deux cas, il lui reste à la fin de la partie $100 + x$ francs. Au premier coup il gagne $2(100 + x)$ francs, il possède donc $100 + 2(100 + x)$ fr. Au second coup il perd 150 francs; il lui reste donc $100 + 2(100 + x) - 150$ fr.; somme qui doit être égale à $100 + x$. Ce qui donne, dans tous les cas, l'équation :

$$100 + 2(100 + x) - 150 = 100 + x$$

d'où on tire :

$$x = -50.$$

Le résultat est négatif. Le joueur a donc *perdu* 50 francs.

Dans des problèmes de cette nature, lorsque les données sont littérales, *discuter* le problème ce sera, non seulement rechercher les conditions que doivent satisfaire les données pour que le problème soit possible, mais encore examiner, suivant les diverses valeurs que peuvent prendre ces données, la forme qu'affecte le résultat. Nous allons étudier, comme exemple de ce genre de discussions, le problème classique des courriers.

Exemple VIII. — *Deux courriers marchent, d'un mouvement uniforme, avec des vitesses* v *et* v', *sur une même route, dans le sens de* A *vers* B (*fig.* 25). *On sait que le second courrier a passé au point* B h *heures après le passage du premier courrier au point* A. *On demande en quel point de la route les deux courriers se sont rencontrés. La distance* AB *est égale à* d.

Soit M le point de rencontre des deux courriers.

Le point M peut occuper trois positions sur la route. Il peut être avant le point A, entre A et B ou au delà du point B. Prenons comme sens

positif, sur la route, le sens de A vers B, et désignons par x le segment $\overline{AM}$. Choisissons, comme origine du temps, l'instant du passage du premier courrier en A et soit t l'instant où a eu lieu la rencontre, t désignant un nombre positif ou négatif, suivant que cet instant suit ou précède le passage

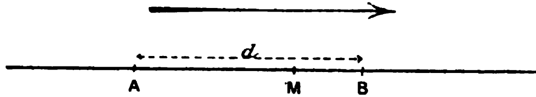


Fig. 25.

du premier courrier en A. De la façon dont nous avons choisi le sens positif, on a

$$\overline{AB} = d > 0$$

et les vitesses v et v' des deux courriers sont positives.

Le premier courrier est, à l'instant $t = 0$, au point $x = 0$, il a une vitesse v; l'équation de son mouvement est donc (n° 25) :

$$(1) \qquad x = vt.$$

Le second courrier est, à l'instant $t = h$ (> 0), au point $x = d$; l'équation de son mouvement est donc :

$$(2) \qquad x = d + v'(t - h).$$

On aura l'abcisse x du point de rencontre et l'instant t de cette rencontre en résolvant les deux équations (1) et (2) qui sont valables pour *tous les cas*, à cause de la généralité (n° 25) des équations du mouvement uniforme. Éliminons t entre les équations (1) et (2) et nous aurons, pour déterminer x :

$$(3) \qquad (v - v')x = v\,(d - hv').$$

Discussion. — *Si v est différent de v'*, cette équation donne, pour x, toujours une valeur

$$x = \frac{v(d - hv')}{v - v'}$$

qui est toujours acceptable (qu'elle soit positive ou négative). Il reste à étudier quelle position occupe le point de rencontre M suivant les diverses valeurs des données v, v', h et d. Nous distinguerons, à cet effet, deux cas :

1° *Soit* $v > v'$. — Le dénominateur de x est alors positif et le signe de x est celui de $d - hv'$.

Si $d < hv'$ x est négatif, le point M est avant le point A.

Si $d > hv'$, x est positif, le point M est au delà du point A; mais il faut encore reconnaître s'il est avant ou après le point B. Pour que le point M soit avant le point B il faut que x soit plus petit que d, il faut donc avoir

$$\frac{v(d - hv')}{v - v'} < d$$

ou, comme $v - v' > 0$,

$$v(d - hv') < d(v - v'),$$

ce qui donne :

$$d < hv.$$

Cette condition n'est pas incompatible avec la condition

$$d > hv',$$

car, v étant plus grand que v', hv est aussi plus grand que hv' et d peut être compris entre les deux.

Enfin, si

$$d > hv,$$

la valeur de x est plus grande que d et le point M est au delà du point B.

2° $v < v'$. — Le dénominateur de x est négatif, x est du signe contraire à celui de $d - hv'$. En suivant la même marche que précédemment, on arrive aux conclusions suivantes :

Si $d > hv'$, on a : $x < 0$, le point M est avant A;

Si $hv < d < hv'$, on a : $0 < x < d$, le point M est entre A et B;

Si $d < hv$, on a : $x > d$, le point M est au delà de B.

3° *Cas de* $v = v'$. — Nous avons supposé jusqu'ici $v \neq v'$. Si v est égal à v', l'équation (3) se réduit à

$$0 = v(d - hv')$$

et on voit que, si d est différent de hv' (ou hv), l'égalité est impossible. Le problème, dans ce cas, n'a pas de solution; les deux courriers ne se rencontrent pas. Si d est égal à hv' et à hv l'équation (3) devient une identité: le problème est indéterminé. Les deux courriers, dans ce cas, marchent ensemble.

Ces derniers résultats s'expliquent aisément. Puisque $v = v'$, les deux courriers ont la même vitesse. Si donc, à un instant quelconque, ils sont à une certaine distance l'un de l'autre, ils resteront indéfiniment à la même distance et, par suite, ne se rencontreront jamais. Mais si, au contraire, à un certain moment, les deux courriers sont ensemble, ils resteront indéfiniment ensemble. On pourrait, aisément, expliquer d'une façon analogue les résultats de la discussion des deux premiers cas.

On peut réunir tous les résultats en un seul tableau :

$v > v'$	$d < hv'$,	$x < 0$,	M est avant A.
	$hv' < d < hv$,	$0 < x < d$,	M est entre A et B.
	$d > hv$,	$x > d$,	M est au delà de B.
$v < v'$	$d > hv'$,	$x < 0$,	M est avant A.
	$hv' > d > hv$,	$0 < x < d$,	M est entre A et B.
	$d < hv$,	$x > d$,	M est au delà de B.
$v = v'$	$d \neq hv'$,	Il n'y a pas rencontre.	
	$d = hv' = hv$,	Les deux courriers marchent ensemble.	

Remarque. — Dans l'exemple précédent, l'énoncé ne comportait qu'une seule inconnue x. Cependant, pour mettre le problème en

équations, nous avons pris deux inconnues x et t. La seconde inconnue t ne nous a servi que comme intermédiaire de calcul, aussi, n'avons-nous pas calculé sa valeur que nous n'avions pas besoin de connaître. On aurait pu, évidemment, former immédiatement une seule équation ne contenant que la seule inconnue x, mais cela eût été moins commode et, au fond, on aurait eu à faire les mêmes calculs, en écrivant que les deux courriers passent au même instant t au point M. L'inconnue t est ce qu'on appelle une *inconnue auxiliaire*. Dans beaucoup de problèmes il est commode d'introduire, ainsi, des inconnues auxiliaires, dans le calcul, inconnues dont il est inutile de calculer la valeur.

85. Lorsque, dans un problème qui, d'après son énoncé même, n'admet que des solutions positives pour les inconnues, on trouve, pour ces inconnues, des valeurs négatives, on est conduit à en conclure que le problème, *tel qu'il a été posé*, n'a pas de solution. Cependant, dans bien des cas, on peut substituer, à l'énoncé donné, un énoncé plus général dans lequel l'inconnue est susceptible d'être comptée dans deux sens différents et pour lequel, par suite, une solution négative a un sens. Le problème proposé n'est, alors, qu'un cas particulier de ce problème plus général. Trouver cette généralisation de l'énoncé c'est ce qu'on appelle *interpréter la solution négative.*

Exemple IX. — *Un père a 50 ans, son fils en a 30. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il double de l'âge du fils?*

Soit x le nombre d'années inconnu. On devra avoir évidemment

$$50+x=2(30+x);$$

on en tire

$$x=-10.$$

Discussion. — On trouve pour x une valeur négative. Or, le problème, tel qu'il a été posé, ne comporte qu'une solution positive : il n'a donc pas de solution. Cependant, modifions l'énoncé de la façon suivante : « *Un père a 50 ans, son fils en a 30. A quelle époque l'âge du père est-il double de l'âge du fils?* » Dans ce nouvel énoncé on ne précise plus que l'époque cherchée est postérieure à l'instant actuel. Soit alors x le nombre d'années qui sépare l'instant actuel de l'instant cherché, x étant positif ou négatif, suivant que cet instant suit ou précède l'instant actuel. On aura, encore,

$$50+x=2(30+x)$$

et

$$x=-10;$$

mais ici la solution négative a un sens, elle indique que l'instant cherché *précède* de 10 années l'instant actuel. Il y a bien une époque à laquelle l'âge

du père est double de l'âge du fils, mais cette époque est antérieure à l'époque actuelle.

EXEMPLE X. — *Deux trains, allant de Lyon à Marseille, sont partis de Lyon, le premier à 9 h. 1/2 du matin et le second à 10 heures. Le premier train marche à raison de 50 kilomètres à l'heure et le second à raison de 45 kilomètres à l'heure; on demande à quelle distance de Lyon ils se rencontreront.*

Soit x cette distance, évaluée en kilomètres; on devra avoir :

$$\frac{x}{50}=\frac{1}{2}+\frac{x}{45},$$

en écrivant que le premier train met une demi-heure de plus que le second à aller de Lyon au point de rencontre. On tire de là :

$$x = -225.$$

Discussion. — La solution étant négative, le problème proposé n'a pas de solution. Mais modifions l'énoncé de la façon suivante : « *Deux trains, allant dans la direction de Lyon vers Marseille, ont passé à Lyon, le premier à 9 h. 1/2... etc...* » Ce nouvel énoncé n'indique plus que la rencontre devra avoir lieu nécessairement après Lyon et, cette fois, cette rencontre pourrait avoir lieu avant Lyon. Soit alors x la distance du point de rencontre comptée positivement après Lyon et négativement avant. Les équations des mouvements des deux trains sont, en prenant 9 h. 1/2 du matin comme origine du temps et en désignant par t le temps en heures :

$$\begin{cases} x = 50t, \\ x = 45\left(t-\dfrac{1}{2}\right). \end{cases}$$

En égalant les deux valeurs de t on a, pour déterminer x, la même équation que précédemment :

$$\frac{x}{50}=\frac{1}{2}+\frac{x}{45};$$

d'où

$$x = -225.$$

Ici la solution négative a un sens; la rencontre *avait* eu lieu 225 kilomètres *avant* Lyon.

Ces deux exemples suffisent à faire voir comment il faut procéder pour interpréter une solution négative. D'une manière générale, lorsque la résolution d'un problème conduit à une solution négative et que l'inconnue est susceptible d'être comptée dans un sens différent de celui dans lequel elle est comptée dans l'énoncé, on peut *souvent interpréter* cette solution négative. Pour cela, on généralise l'énoncé de façon que l'inconnue puisse être comptée dans deux sens différents. *Si l'interprétation est possible*, on devra, en faisant

une convention sur le signe de l'inconnue, pouvoir établir une équation *unique*, s'appliquant à tous les cas de l'énoncé généralisé. Cette équation devra être *identique* à l'équation fournie par l'énoncé particulier proposé.

Remarque I. — On voit que, chaque fois que la solution négative s'interprète, elle indique que l'inconnue doit être comptée dans un sens différent de celui de l'énoncé. Mais il faudrait bien se garder de croire que toutes les solutions négatives sont susceptibles d'interprétation et admettre, sans justification, qu'une solution négative fournit une solution du problème obtenu en changeant le sens de l'inconnue.

Remarque II. — Pour interpréter les solutions négatives, on peut encore procéder de la façon suivante : Au lieu de *généraliser* l'énoncé, on le *modifie* en changeant le sens dans lequel on compte l'inconnue. On met le nouveau problème en équation. Toute solution positive de cette nouvelle équation donne une solution comptée dans le nouveau sens. Par suite, si les solutions négatives de l'équation proposée s'*interprètent*, c'est-à-dire fournissent une solution dans laquelle le sens de l'inconnue est changé, la nouvelle équation devra admettre, comme solutions positives, toutes les valeurs absolues des solutions négatives de la première équation et, d'ailleurs, par réciprocité, comme solutions négatives, les solutions positives, changées de signe, de la première équation. Donc, pour que les solutions négatives s'interprètent, *il faut et il suffit que la nouvelle équation se déduise de la première en changeant* x *en* — x. Cette règle est connue sous le nom de *Règle de Descartes*.

86. Dans ce qui précède nous avons donné des exemples où, plusieurs hypothèses différentes étant possibles sur la forme de la solution, on pouvait trouver une équation unique, bonne pour tous les cas. Ceci n'aura pas toujours lieu, et nous allons montrer, par des exemples, qu'il peut arriver que chaque cas donne lieu à une équation différente. Il faudra, alors, examiner chaque cas isolément.

EXEMPLE XI. — *Soit* AB *un diamètre d'un cercle. Trouver sur la droite indéfinie* AB *un point* M *tel que, si, de ce point, on mène la tangente* MT *au cercle, la somme des deux longueurs* MA *et* MT *soit égale à une longueur donnée* a (*fig.* 26).

Le point cherché peut avoir deux positions différentes sur AB. Il peut être en M, à gauche de A, ou en M′, à droite de B.

Premier cas. — Soit O le centre du cercle et R son rayon. Dans le triangle rectangle MTO on a :

$$MT = \sqrt{\overline{MO}^2 - \overline{OT}^2}\,.$$

Soit x la distance MA. On a :

$$MO = R + x$$

et, par suite,

$$MT = \sqrt{(R+x)^2 - R^2}.$$

x est donc racine de l'équation irrationnelle

$$x + \sqrt{(R+x)^2 - R^2} = a.$$

Pour résoudre, isolons le radical :

$$\sqrt{(R+x)^2 - R^2} = a - x \qquad (1),$$

ce qui donne, en élevant au carré et simplifiant :

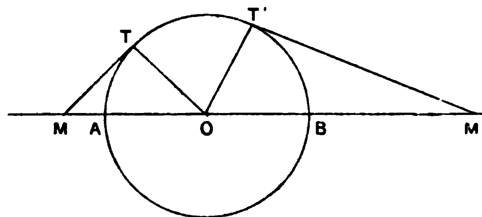


FIG. 26.

$$2Rx = a^2 - 2ax,$$

d'où

$$x = \frac{a^2}{2(R+a)}.$$

Discussion. — Comme nous avons élevé l'équation (1) au carré, il faut encore vérifier si cette valeur de x satisfait l'équation (1) et non l'équation obtenue en changeant le signe du radical (Voir n° 61). Pour cela, il suffit que $a - x$ soit positif, c'est-à-dire que x soit plus petit que a, ce qui a lieu. D'ailleurs, la valeur trouvée pour x étant positive, la solution est acceptable.

Deuxième cas. — Supposons le point en M', à droite de B ; prenons toujours pour inconnue la distance $AM' = x$. On a, encore, dans le triangle OM'T'

$$OT' = \sqrt{\overline{OM'}^2 - \overline{OT'}^2}.$$

Or, ici,

$$OM' = x - R$$

et l'équation qui donne x est :

$$x + \sqrt{(x-R)^2 - R^2} = a$$

ou :

$$\sqrt{(x-R)^2 - R^2} = a - x \qquad (2).$$

Cette nouvelle équation est tout à fait distincte de l'équation (1), car lorsqu'on y change x en $-x$ on ne retrouve pas l'équation (1), ce qui devrait, évidemment, avoir lieu si l'équation (1) pouvait servir pour les deux cas, à condition de considérer x comme négatif lorsqu'il est compté

dans le sens de A vers B. En élevant au carré l'équation (2) et résolvant, on trouve, en supposant R différent de a :

$$x = \frac{a^2}{2(a - R)}.$$

Discussion. — Il faut, d'abord, que la valeur trouvée pour x satisfasse bien l'équation (2), ce qui exige que cette valeur soit plus petite que a, c'est-à-dire que

$$\frac{a^2}{2(a - R)} < a.$$

Si a est plus petit que R cette inégalité est vérifiée, car le premier membre est négatif et le second positif.

Si a est plus grand que R on peut multiplier par $a - R$ qui est positif et on doit avoir

$$a^2 < 2a^2 - 2aR,$$

d'où

$$2R < a.$$

La valeur de x ne vérifie donc l'équation (2) que si

$$a < R \qquad \text{ou} \qquad a > 2R.$$

Mais il faut, en outre, pour que la solution ait un sens, que cette valeur de x soit positive, ce qui donne :

$$a > R.$$

Il en résulte que le seul cas où il y a une solution de la seconde forme est celui où a est plus grand que 2R.

Le problème admet donc toujours une solution M et la solution M′ n'existe que quand $a > 2R$.

Exemple XII. — *Étant donnés deux points* A *et* B *sur une droite indéfinie, trouver, sur cette droite, un point* M *tel que le rapport* $\frac{MA}{MB}$ *ait une valeur donnée* k (*positive*).

Le point M peut occuper sur la droite AB trois positions différentes : il



Fig. 27.

peut être entre A et B, à l'extérieur de AB, du côté de A, ou à l'extérieur de AB, du côté de B.

Premier cas. — Supposons le point M entre A et B (fig. 27). Désignons par a la distance AB et soit x la distance AM. On doit avoir

$$\frac{x}{a - x} = k,$$

d'où :

$$x = \frac{ak}{1+k}.$$

Cette valeur est acceptable car elle est positive et plus petite que a.

Second cas. — Supposons le point M à l'extérieur du segment AB (fig. 28). Prenons, alors, comme sens positif sur la droite AB le sens de A

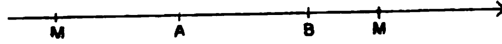


Fig. 28.

vers B et désignons par x le *segment* $\overline{AM}$; on aura toujours, en grandeur et en signe,

$$\overline{BM} = \overline{AM} - \overline{AB} = x - a,$$

quelle que soit la position du point M sur AB.

Or, lorsque le point M est à l'extérieur de AB, les deux segments $\overline{AM}$ et $\overline{BM}$ sont de même sens et on a, *pour les deux cas :*

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{x}{x-a}.$$

Donc l'équation qui donne x est

$$\frac{x}{x-a} = k,$$

pour les deux cas. On en tire, en supposant k différent de 1 :

$$x = \frac{ka}{k-1}.$$

Discussion. — Lorsque k est plus petit que 1, la valeur trouvée pour x est négative, ce qui indique que le point M est du côté de A.

Lorsque k est plus grand que 1, x est positif. Mais, pour que cette valeur soit acceptable, il faut qu'elle soit plus grande que a, ce qui a lieu, car $\frac{k}{k-1}$ est plus grand que 1.

En résumé, il existe toujours deux points répondant à la question, l'un situé entre A et B, l'autre situé à l'extérieur de AB, du côté de A ou du côté de B, suivant que k est plus petit ou plus grand que 1.

Dans le cas particulier de $k = 1$, il n'y a plus qu'une solution : la première.

Si on fait *tendre* k vers 1 la seconde solution croît indéfiniment; on peut donc dire que, quand k tend vers 1, le point extérieur s'éloigne indéfiniment.

EXERCICES

73. Les rois d'une dynastie ne portèrent que 9 noms différents. Le premier nom fut porté par le *tiers* des rois; le second nom par le *quart;* le troisième par le *huitième;* le quatrième par le *douzième* des rois. Enfin, les cinq autres noms ne furent portés chacun que par un roi. De combien de rois se composait la dynastie?

(Todhunter).

74. Quels sont les points du cadran d'une montre où se font les rencontres des deux aiguilles ?

75. Une montre avance de 3 minutes en 24 heures. On l'a mise à l'heure le 1er avril à midi. Quelle heure sera-t-il le 3 avril lorsqu'elle marquera 9 heures du matin ?

76. Trouver deux nombres entiers consécutifs sachant que la différence de leurs carrés est 15.

77. Déterminer λ de façon que

$$x^4 - 5x^2 + 4x - \lambda$$

soit divisible par

$$2x + 1.$$

78. Déterminer λ et μ de façon que

$$x^3 + 3ax^2 + 3\lambda x + \mu$$

soit divisible par

$$x^2 + 2ax + \lambda.$$

79. Déterminer λ, μ et ρ de façon que

$$x^4 + 4ax^3 + 6\lambda x^2 + 4\mu x + \rho$$

soit divisible par

$$x^3 + 3ax^2 + 3\lambda x + \mu.$$

80. Trois joueurs A, B, C conviennent, en se mettant au jeu, que le perdant doublera l'avoir des deux autres. Ils font trois parties. A, perd la première partie, B la seconde et C la troisième. Après quoi, les avoirs des trois joueurs ont pour valeur commune a. Calculer ce que chaque joueur avait en entrant au jeu.

81. Inscrire dans un rectangle dont les dimensions sont a et b ($a > b$) un autre rectangle dont les côtés sont entre eux dans le rapport de m à n ($m > n$). — Discuter.

82. On donne la suite :

$$a + b, \quad ap + bq, \quad ap^2 + bq^2, \quad ap^3 + bq^3, \ldots$$

et l'on propose de trouver deux nombres x et y tels que chaque terme de cette suite puisse s'obtenir en multipliant le précédent par x et l'antéprécédent par y, et en ajoutant les résultats.

(J. Bertrand).

83. On donne la suite :

$$a + b + c, \quad ap + bq + cr, \quad ap^2 + bq^2 + cr^2, \quad ap^3 + bq^3 + cr^3, \text{ etc. } \ldots$$

et l'on demande de trouver trois nombres x, y, z tels que chaque terme de cette suite s'obtienne en multipliant le précédent par x, l'antéprécédent par y et celui qui précède de trois rangs par z, et en ajoutant les résultats.

(J. Bertrand).

84. x et y étant deux nombres quelconques, on calcule deux autres nombres x' et y' par les formules :

$$x' = ax + by + c, \quad y' = a'x + b'y + c'.$$

On calcule ensuite deux nombres x'' et y'' qui se déduisent de x' et y' de la même façon que ceux-ci se déduisent de x et y :

$$x'' = ax' + by' + c, \quad y'' = a'x' + b'y' + c'.$$

On demande de déterminer a', b', c' de façon que l'on ait toujours

$$x'' = x, \quad y'' = y,$$

quels que soient les nombres x et y.

(*Baccalauréat*, *Rennes*).

85. Dans un triangle ABC on donne le côté $BC = a$ et la hauteur h issue du sommet A. Calculer les dimensions d'un rectangle inscrit, de périmètre $2p$, dont un côté repose sur BC. — Discuter.

86. Étant données les bases a, b et la hauteur h d'un trapèze, calculer la hauteur du triangle qui a pour sommets le point de concours des côtés non parallèles et les sommets de la grande base. — Discuter.

87. Un train T, dont la vitesse est v, part après un autre train T', dont la vitesse est v'; et le retard est calculé de manière qu'ils arrivent en même temps à destination. Le train T' est obligé de ralentir de moitié sa vitesse, après avoir fait les $\frac{2}{3}$ de la course. Il y a rencontre des trains a lieues avant le point d'arrivée. Trouver la longueur x du trajet.

(J. Bertrand).

88 Deux triangles ABC, A'B'C' ont leurs bases b et b' sur une même droite. Leurs hauteurs sont, respectivement, h et h'. On demande à quelle distance de la base il faut mener une parallèle à cette ligne pour que les deux parties de cette parallèle, interceptées dans les deux triangles, soient égales. — Discuter.

(Bezodis).

89. Une sphère est posée sur un plan horizontal. Sur le même plan repose un cône droit dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère. On demande de couper les deux corps par un plan horizontal de telle sorte que les sections soient entre elles comme deux nombres donnés. — Discuter.

(*Concours général*).

90. n pierres sont rangées en ligne droite à d mètres de distance les unes des autres. Déterminer sur cette droite un point M tel qu'on ait k fois plus de chemin à faire pour transporter, successivement, chaque pierre au point M que pour les transporter à la place occupée par la première d'entre elles. On supposera, dans les deux cas, qu'on parte de la première pierre. — Discuter.

On fera, d'abord, le problème en prenant pour n une valeur numérique, par exemple $n = 5$, puis on abordera le cas général.

(J. Bertrand).

91. Étant données deux droites concourantes ox et oy et un point P dans l'angle xoy, mener par le point P une sécante MPN, qui coupe ox en M et oy en N, telle que l'on ait la relation :

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{1}{k},$$

k étant une longueur donnée.

LIVRE III

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

CHAPITRE PREMIER

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

87. D'après sa définition même (Voir n° 55), une équation du second degré, à une inconnue x, est une équation telle, qu'en faisant passer tous les termes dans un membre, elle prenne, toutes réductions faites, la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1),$$

où a est différent de zéro. Pour résoudre cette équation, nous ferons subir à son premier membre quelques transformations. Mettons a en facteur, elle s'écrit :

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = 0.$$

Dans la quantité entre crochets, on peut considérer les deux termes x^2 et $\frac{b}{a}x$ comme les deux premiers termes du développement du carré de $x + \frac{b}{2a}$, car ce carré est $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$. Si donc on ajoute et on retranche, dans le crochet, $\frac{b^2}{4a^2}$, on met l'équation sous la forme :

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = 0$$

ou

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \qquad (2).$$

Nous sommes, alors, amené à distinguer trois cas.

1° *Supposons* $b^2 - 4ac$ *positif.* On peut considérer $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ comme le carré de $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\sqrt{b^2-4ac}$ désignant la racine carrée arithmétique de b^2-4ac. L'équation (2) s'écrit, alors :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]=0$$

ou, enfin, puisque la quantité entre crochets est une différence de carrés,

$$a\left[x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]=0.$$

Or, a étant différent de zéro, pour que le premier membre soit nul, il faut et il suffit que l'un des deux crochets soit nul. Il faut donc que l'on ait : ou bien

$$x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0,$$

c'est-à-dire

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (3);$$

ou bien

$$x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0,$$

c'est-à-dire

$$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (4).$$

Donc, dans ce cas, l'*équation du second degré* (1) *a deux racines*, et *deux seulement*, données par les formules (3) et (4).

2° *Supposons* b^2-4ac *nul.* L'équation (2) prend alors la forme simple :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

Pour que le premier membre de l'équation soit nul, il faut et il suffit que

$$x + \frac{b}{2a} = 0,$$

ou que : $$x = -\frac{b}{2a} \qquad (5).$$

L'équation n'a *qu'une racine et une seule*. Cependant, il faut remarquer que, dans ce cas particulier, le raisonnement que nous avons fait, dans le cas précédent, pourrait encore s'appliquer; les formules (3) et (4) donnent encore les racines, mais les valeurs qu'elles fournissent sont *égales*. Pour rappeler ce fait, on dit que, *lorsque* $b^2 - 4ac = 0$, *les deux racines de l'équation du second degré sont égales*, ou encore que *l'équation a une racine double*.

Il faut remarquer, d'ailleurs, qu'en changeant au besoin les signes des deux membres de l'équation (1), on peut toujours supposer $a > 0$ et, alors, le premier membre de l'équation s'écrit, lorsque $b^2 - 4ac = 0$,

$$\left[\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right]^2 = 0.$$

Le premier membre de l'équation est donc un *carré parfait* (1).

3° *Supposons* $b^2 - 4ac$ *négatif*. L'équation (2) s'écrit :

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = 0.$$

La quantité entre crochets est la somme de deux quantités, l'une positive ou nulle $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, l'autre toujours positive $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$: elle est donc toujours positive et jamais nulle. L'équation, dans ce cas, *n'a pas de solutions*.

Remarque I. — La quantité $b^2 - 4ac$ qui, comme nous venons de le voir, joue un rôle important, est ce qu'on appelle le *discriminant* de l'équation du second degré. Les résultats précédents se résument de la façon suivante :

1° Lorsque le discriminant est positif, l'équation du second degré

(1) On dit qu'un polynôme, entier en x, est *carré parfait* lorsqu'il est le carré d'un autre polynôme, entier en x.

a *deux* racines données par la formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (6),$$

où on prend successivement le signe (+) et le signe (—) devant le radical.

2° Lorsque le discriminant est nul, l'équation a *une seule* racine (*double*) qui est

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

3° Lorsque le discriminant est négatif, l'équation *n'a pas* de racines.

Remarque II. — Il y a des cas particuliers où la formule de résolution (6) affecte une forme plus simple. Prenons l'équation

$$x^2 + px + q = 0.$$

Ceci revient à supposer : $a = 1$, $b = p$, $c = q$; et la formule (6) devient :

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad (7).$$

Supposons, en second lieu, que b soit un nombre entier *pair*, soit $b = 2b'$, on pourra diviser les deux termes de la fraction (6) par 2 et on aura :

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \qquad (8).$$

Exemple I. — Soit à résoudre l'équation :

$$2(x^2 + x + 1) = 5x + x^2,$$

Elle s'écrit, en faisant passer tous les termes dans le premier membre et toutes réductions faites :

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Le discriminant est $9 - 8 = 1$, positif. L'équation a deux racines, données par les formules (3) et (4) :

$$x = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2, \quad x = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1.$$

Exemple II. — Soit à résoudre

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Le discriminant est $1 - 4 = -3$, négatif. L'équation n'a pas de racines.

Exemple III. — Soit l'équation

$$4x^2 + 4x + 1 = 0.$$

Le discriminant est $16 - 16 = 0$; l'équation a une seule racine *double*

$$x = -\frac{1}{2}.$$

D'ailleurs, le premier membre est un carré parfait car l'équation s'écrit :

$$(2x + 1)^2 = 0.$$

88 (1). *Cas de* $a = 0$, $b \neq 0$. — Dans la résolution précédente de l'équation générale du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1),$$

nous avons supposé, essentiellement, a différent de zéro. Si a était nul, l'équation ne serait plus du second degré, elle se réduirait à l'équation du premier degré

$$bx + c = 0,$$

qui a une racine $x = -\frac{c}{b}$, si b est différent de zéro. On en conclut que, si on fait varier le coefficient a dans l'équation (1), le coefficient b restant différent de zéro, il y a une des deux racines de l'équation qui *disparaît*, lorsque a prend la valeur zéro. On est conduit à se demander *comment* cette racine disparaît. C'est ce que nous allons rechercher. Remarquons, d'abord, que, b restant différent de zéro, lorsque a a une valeur très petite, $4ac$ a aussi une valeur très petite et qu'on peut toujours prendre a assez petit pour que la valeur absolue de $4ac$ soit plus petite que b^2. Le discriminant $b^2 - 4ac$ est donc positif et l'équation a deux racines x' et x'' :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Lorsque a est nul, le radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$ se réduit à $\sqrt{b^2}$ qui est la *valeur absolue* de b. Nous distinguerons, par suite, deux cas.

(1) Le lecteur, soucieux de rigueur dans les démonstrations et les termes, pourrait ne lire les nos 88 et 89 qu'après avoir lu le chapitre I du livre IV.

1° $b > 0$. On a : $\sqrt{b^2} = |\,b\,| = b$. Pour $a = 0$, le numérateur de x' devient $-b + b = 0$, son dénominateur s'annule et x' se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour lever l'indétermination, multiplions, haut et bas, par la quantité conjuguée du numérateur (Voir n° 53). Il vient, après réductions,

$$x' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \qquad (8)$$

et, pour $a = 0$, la vraie valeur de x' est $-\frac{2c}{2b}$ ou $-\frac{c}{b}$, ce qui est précisément la racine unique de l'équation $bx + c = 0$. Au contraire, pour $a = 0$, le numérateur de x'' est $-b - b = -2b$, différent de zéro, et, comme son dénominateur est nul, x'' *croît indéfiniment*. (Voir n° 52.)

2° $b < 0$. On a : $\sqrt{b^2} = |\,b\,| = -b$. Pour $a = 0$, le numérateur de x' est $-b - b = -2b$, différent de zéro, et, comme le dénominateur est nul, on peut dire, que, quand a tend vers zéro, x' croît indéfiniment. Quant à x'', pour $a = 0$, son numérateur est $-b + b = 0$ et sa valeur se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour lever l'indétermination, multiplions, haut et bas, par la quantité conjuguée du numérateur et, après simplifications, il vient :

$$x'' = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \qquad (9).$$

On a donc la vraie valeur de x'', pour $a = 0$,

$$x'' = -\frac{2c}{2b} = -\frac{c}{b}.$$

En résumé, *lorsque* a *tend vers zéro*, b *restant différent de zéro, il y a toujours une des deux racines de l'équation qui croît indéfiniment et l'autre prend la valeur qui est la racine de l'équation du premier degré à laquelle se réduit l'équation* (1), *pour* a = 0.

Nous savons donc maintenant que c'est *en croissant indéfiniment* qu'une des deux racines *disparaît*.

89. *Cas de* $a = b = 0$. — Si, dans l'équation générale du second degré, les deux coefficients a et b sont nuls simultanément, l'équation se réduit à

$$c = 0,$$

égalité qui est : ou bien impossible, si c est différent de zéro, ou identique, si c est nul.

On voit donc que, si, dans une équation du second degré, les deux coefficients a et b deviennent nuls simultanément, c restant différent de zéro, l'équation n'a plus aucune racine : les deux racines ont disparu. Nous allons encore rechercher *comment* elles disparaissent. Pour cela, reprenons les formes (8) et (9) sous lesquelles nous avons mis précédemment les racines :

$$x' = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad x'' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Ces deux formes montrent immédiatement que, quand a et b tendent vers zéro, c restant différent de zéro, les numérateurs de x' et x'' restent différents de zéro et les dénominateurs tendent vers zéro. Les *deux* racines *croissent indéfiniment*.

Donc, *lorsque* a *et* b *tendent vers zéro, le terme constant* c *restant différent de zéro, les deux racines de l'équation disparaissent en croissant indéfiniment.*

90. Certaines équations qui, au premier abord, ne paraissent pas être du second degré se ramènent au second degré, toutes réductions faites.

Ainsi la suivante :

$$x^2(x-1)(x-2) + x^2(x+1)(x+2) - 2(x^4 + x^2 + x + 1) = 0,$$

qui paraît être du quatrième degré, devient, après réductions,

$$2x^2 - 2x - 2 = 0$$

ou

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

qui est du second degré et a deux racines

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Des équations fractionnaires, lorsqu'on les rend entières en chassant les dénominateurs, ou des équations irrationnelles, rendues entières par des élévations aux puissances, peuvent conduire à des équations du second degré, mais il ne faudra pas oublier que, dans ces cas, on pourra introduire des solutions étrangères (Voir n°s 56 et 57).

Exemple. — Résoudre l'équation

$$(1) \qquad \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 5.$$

Isolons un radical, l'équation s'écrit :

$$\sqrt{x+1} = 5 - \sqrt{2x+3};$$

élevons au carré et il vient :

$$x + 1 = 25 + 2x + 3 - 10\sqrt{2x+3}.$$

Isolons encore le radical

$$10\sqrt{2x+3} = x + 27$$

et, en élevant au carré, nous obtenons :

$$100(2x+3) = (x+27)^2;$$

ce qui donne l'équation :

$$x^2 - 146x + 429 = 0,$$

dont les racines sont

$$x' = 3, \quad x'' = 143.$$

Puisqu'on a élevé deux fois au carré, on a pu introduire des solutions étrangères. Comme il est facile de le vérifier, 3 est racine de l'équation proposée et 143 ne l'est pas. L'équation (1) a donc une seule racine qui est 3.

La racine 143 satisfait l'équation :

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 5.$$

EXERCICES

92. Résoudre les équations suivantes :

$$x^2 - 15x + 56 = 0;$$
$$4x^2 - 3x + 7 = x^2 - 2x + 1;$$
$$(c + a - 2b)x^2 + (a + b - 2c)x + (b + c - 2a) = 0;$$
$$(x-1)(x-2) = 6;$$
$$(5x-3)^2 - 7 = 44x + 5;$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) + \left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) = \left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right);$$
$$(ax-b)(bx-a) = c^2;$$
$$(3a^2 + b^2)(x^2 - x + 1) = (3b^2 + a^2)(x^2 + x + 1).$$

93. Résoudre les équations fractionnaires suivantes :

$$\frac{x}{15} + \frac{40}{3(10-x)} = \frac{3(10+x)}{95};$$
$$\frac{x-6}{x-12} = \frac{x-12}{x-6} + \frac{5}{6};$$

$$\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+8}=0;$$
$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}=3.$$

94. Résoudre les équations :

$$(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=(a+b)^3;$$
$$\frac{3x-4}{x+1}=x^2+2x-\frac{7}{x+1};$$
$$\frac{a+b}{x+b}+\frac{a+c}{x+c}=2\frac{a+b+c}{x+b+c}.$$

95. Résoudre les équations irrationnelles :

$$3x-17=\sqrt{7x^2-50x+79};$$
$$\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1};$$
$$3x+2\sqrt{x}-1=0;$$
$$2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=5;$$
$$\sqrt{1+x+x^2}=a-\sqrt{1-x+x^2};$$
$$\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2+x}=a+b;$$
$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=b.$$

96. Résoudre l'équation :

$$\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{1-x^2};$$

on posera :

$$z=\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}$$

(J. BERTRAND).

97. Résoudre l'équation :

$$2\sqrt{8x^2-26x+16}-1=\frac{5-4\sqrt{8x^2-26x+16}}{\sqrt{8x^2-26x+16}};$$

on prendra, d'abord,

$$\sqrt{8x^2-26x+16}$$

comme inconnue auxiliaire.

98. Quelles valeurs faut-il donner à λ pour que les équations suivantes aient deux racines distinctes ?

$$x^2-8x+\lambda=0;$$
$$(a-b)^2x^2+2(a^2-b^2)x+\lambda=0;$$
$$\lambda x^2+2(\lambda+1)x+\lambda+3=0.$$

Pour quelle valeur de λ chacune de ces équations a-t-elle une racine double ?

99. Montrer que les équations suivantes ont *toujours* deux racines :

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0 \qquad (\textit{Bacc. Caen});$$

$$\frac{a^2}{x-p}+\frac{l^2}{x-q}-1=0 \qquad (\textit{Bacc. Sorbonne});$$

$$\frac{x_0^2}{a^2+x}+\frac{y_0^2}{b^2+x}-1=0;$$

et les résoudre.

100. On peut résoudre, dans certains cas, une équation du second degré, par approximations successives, de la façon suivante :

On écrit l'équation

$$ax^2+bx+c=0,$$

sous la forme

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b}.$$

Si a est petit, et qu'on calcule la racine x' qui se réduit à $-\frac{c}{b}$, quand a tend vers zéro (Voir n° 88), la quantité

$$x_1=-\frac{c}{b}$$

sera une valeur approchée de cette racine.

On posera :

$$x_2=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x_1^2;$$

puis,

$$x_3=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x_2^2;$$

et ainsi de suite.

Montrer que, lorsque $\frac{4ac}{b^2}$ est plus petit que 1, les quantités x_1, x_2, x_3, etc..., sont des valeurs approchées de la racine x' de l'équation, qui se réduit à $-\frac{c}{b}$ pour $a=0$, de plus en plus approchées.

Appliquer à l'exemple :

$$0{,}000048\,x^2-19x+1=0.$$

On trouve

$$x_3=0{,}0526315859,$$

qui est une valeur approchée de la plus petite racine, à $\frac{1}{10^{10}}$ près.

CHAPITRE II

RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS ET LES RACINES

91. Soit l'équation générale du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Nous avons vu (n° 87) que, lorsque le discriminant est positif ou nul, on peut mettre le premier membre sous la forme *identique* :

$$(1) \qquad a\left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right].$$

Désignons par x' et x'' les deux racines de l'équation (racines qui sont égales lorsque $b^2 - 4ac = 0$) :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

L'expression (1) s'écrit, alors,

$$a(x - x')(x - x'')$$

et, comme cette expression est équivalente au premier membre de l'équation, on a *l'identité* :

$$(2) \qquad ax^2 + bx + c \equiv a(x - x')(x - x'')$$

ou, en développant le second membre,

$$ax^2 + bx + c \equiv ax^2 - a(x' + x'')x + ax'x''.$$

Or, lorsque deux polynômes entiers sont équivalents, ils sont égaux terme à terme (n° 48, *Th. III*, *Cor.*). On a donc :

$$b = -a(x' + x''),$$
$$c = ax'x'';$$

et, de là, on tire les deux relations :

$$(3) \quad \begin{cases} x' + x'' = -\dfrac{b}{a}, \\ x'x'' = \dfrac{c}{a}, \end{cases}$$

qu'il est possible de vérifier par la substitution des valeurs ci-dessus de x' et de x''.

La somme des racines est donc égale au quotient, changé de signe, du coefficient de x *par le coefficient de* x^2. *Le produit des racines est égal au quotient du terme constant par le coefficient de* x^2.

Ces relations prennent une forme plus simple dans le cas où l'équation a la forme :

$$x^2 + px + q = 0;$$

on a, en effet,

$$(4) \quad \begin{cases} x' + x'' = -p, \\ x'x'' = q. \end{cases}$$

92. Application. — *Reconnaître,* a priori, *sans les avoir calculées, les signes des racines d'une équation du second degré.*

Le signe du produit $\frac{c}{a}$ des deux racines nous apprend, immédiatement, suivant qu'il est $(+)$ ou $(-)$, que les deux racines sont de même signe ou de signes contraires. Lorsque les deux racines sont de même signe, ce signe commun est évidemment celui de leur somme $-\frac{b}{a}$.

Il faut remarquer, d'ailleurs, que, lorsque les deux racines sont de signes contraires, le signe de la somme $-\frac{b}{a}$ est celui de celle des deux racines qui est la plus grande en valeur absolue.

Exemple I. — L'équation

$$x^2 - 53x + 112 = 0$$

a deux racines, puisque

$$(53)^2 - 448 > 0.$$

Ces deux racines sont de même signe, puisque leur produit 112 est positif, et elles sont toutes deux positives, puisque leur somme 53 est positive.

Remarque. — Dans ce qui précède nous avons supposé que le discriminant est positif et, par suite, que les racines existent; mais, lorsque, dans l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

le quotient $\frac{c}{a}$ est négatif, on peut affirmer que l'équation a deux

racines de signes contraires. Car, $\frac{c}{a}$ étant négatif, ac est aussi négatif et $b^2 - 4ac$ est nécessairement positif. L'équation a donc certainement deux racines qui sont, d'ailleurs, de signes contraires, puisque leur produit $\frac{c}{a}$ est négatif.

Exemple II. — L'équation

$$2x^2 + 3x - 7 = 0$$

a certainement deux racines de signes contraires, puisque le coefficient de x^2 et le terme constant sont de signes contraires. De plus, la somme $-\frac{3}{2}$ des deux racines étant négative, c'est la racine négative qui a la plus grande valeur absolue.

Résumé. — Il ne sera pas inutile de résumer les résultats, contenus dans le chapitre et les deux articles précédents, dans les deux tableaux qui suivent :

1er Tableau.

$\frac{c}{a} < 0$, deux racines de signes contraires, la plus grande *en valeur absolue* étant du signe de $\frac{-b}{a}$.

$\frac{c}{a} > 0$ $\begin{cases} b^2 - 4ac < 0, & \text{pas de racines ;} \\ b^2 - 4ac = 0, & \text{deux racines égales ;} \\ b^2 - 4ac > 0, & \text{deux racines, l'une et l'autre, du signe de } -\frac{b}{a}. \end{cases}$

2e Tableau.

$b^2 - 4ac < 0$, pas de racines.
$b^2 - 4ac = 0$, racines égales.

$b^2 - 4ac > 0$, deux racines $\begin{cases} \text{de signes contraires si } \frac{c}{a} < 0, \text{ la plus grande étant du signe de } -\frac{b}{a}; \\ \text{de même signe et du signe de } \frac{-b}{a} \text{ si } \frac{c}{a} > 0. \end{cases}$

Il conviendra d'employer, plus spécialement, le premier de ces tableaux pour les équations numériques ; mais il pourra arriver, pour certaines équations littérales, qu'il soit préférable de s'adresser au second et de commencer par le calcul du discriminant.

93. Problème I. — *Calculer deux nombres connaissant leur somme* s *et leur produit* p.

Il résulte, immédiatement, des relations entre les coefficients et les racines que les deux racines de l'équation du second degré

$$x^2 - sx + p = 0 \qquad (1)$$

sont deux nombres répondant à la question. D'ailleurs, ce sont les seuls, car, soit x l'un des deux nombres cherchés, l'autre sera $s - x$, et on devra avoir

$$x(s - x) = p$$

ou

$$x^2 - sx + p = 0.$$

L'un des deux nombres est donc l'une des racines de l'équation du second degré (1); l'autre nombre est alors nécessairement égal à l'autre racine, puisque la somme des deux racines de l'équation (1) est égale à s.

Problème II. — *Former l'équation du second degré dont les racines sont égales aux racines de l'équation du second degré*

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

augmentées du nombre h.

Soient x' et x'' les racines de l'équation (1). Les racines de l'équation cherchée sont $x' + h$ et $x'' + h$. Leur somme est donc

$$x' + x'' + 2h = -\frac{b}{a} + 2h,$$

et leur produit :

$$(x' + h)(x'' + h) = x'x'' + h(x' + x'') + h^2 = \frac{c}{a} - h\frac{b}{a} + h^2.$$

L'équation du second degré cherchée est donc :

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a} + 2h\right)x + \frac{c}{a} - h\frac{b}{a} + h^2 = 0$$

ou :

$$ax^2 + (b - 2ah)x + ah^2 - bh + c = 0 \qquad (2).$$

Remarque I. — On pourrait disposer du nombre h de façon que l'équation (2) ait une forme simple. Ainsi, si on prend

$$h = \frac{b}{2a},$$

l'équation (2) n'a pas de terme en x et devient :

$$ax^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0.$$

Cette équation s'écrit, alors,

$$x^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

et on voit, de suite, que, si $b^2 - 4ac \geqslant 0$, elle a deux racines:

$$x = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Les deux racines de l'équation (1) s'obtiennent en diminuant celles-ci de h, c'est-à-dire de $\frac{b}{2a}$, elles sont donc données par la formule :

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Remarque II. — On pourrait, par le même procédé, former l'équation du second degré ayant pour racines kx' et kx'', k étant un nombre donné, ou encore $\frac{1}{x'}$ et $\frac{1}{x''}$. Les équations ainsi obtenues sont ce qu'on appelle les *transformées : en* $x + h$, *en* kx, *en* $\frac{1}{x}$ de l'équation proposée. D'une manière générale, on appelle *transformée en* $f(x)$, $f(x)$ désignant une fonction donnée de x, l'équation qui a pour racines les valeurs numériques $f(x')$ et $f(x'')$ que prend la fonction $f(x)$ quand on y donne, successivement, à x, les valeurs x' et x'' qui sont les racines de l'équation proposée.

Les transformées en $x + h$, kx, $\frac{1}{x}$ peuvent, d'ailleurs, s'obtenir rapidement par voie directe.

Par exemple, soit x une racine de la transformée en $x + h$, $x - h$ sera une racine de l'équation proposée (1); on a donc :

$$a(x - h)^2 + b(x - h) + c = 0,$$

ce qui est la transformée cherchée qui est identique, comme il est aisé de le voir, à l'équation (2).

De même, x étant une racine de la transformée en kx, $\frac{x}{k}$ est une racine de l'équation (1) et on a :

$$a\frac{x^2}{k^2} + b\frac{x}{k} + c = 0$$

ou :

$$ax^2 + bkx + ck^2 = 0,$$

qui est l'équation transformée cherchée.

La transformée en $\frac{1}{x}$, qu'on appelle aussi *équation aux inverses des racines* de l'équation (1), est :

$$a\left(\frac{1}{x}\right)^2 + b\frac{1}{x} + c = 0$$

ou

$$cx^2 + bx + a = 0.$$

94. Sommes des puissances semblables des racines. — Soient x' et x'' les racines de l'équation

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

proposons-nous de calculer les sommes $x'^2 + x''^2$, $x'^3 + x''^3$, ... d'une manière générale $x'^n + x''^n$.

Désignons ces sommes par s_2, s_3, ... s_n :

$$s_2 = x'^2 + x''^2, \quad s_3 = x'^3 + x''^3, \quad \ldots \quad s_n = x'^n + x''^n.$$

x' et x'' étant racines de l'équation (1), on a les *identités* :

$$(2) \qquad ax'^2 + bx' + c \equiv 0,$$
$$(3) \qquad ax''^2 + bx'' + c \equiv 0.$$

Ajoutons-les, membre à membre, il vient :

$$a(x'^2 + x''^2) + b(x' + x'') + 2c \equiv 0$$

ou, en posant $\qquad x' + x'' = s_1,$

$$as_2 + bs_1 + 2c = 0.$$

Or, nous connaissons s_1 qui est égal à $-\frac{b}{a}$; cette formule nous donne donc s_2 :

$$s_2 = -\frac{bs_1 + 2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Multiplions les deux membres de l'identité (2) par x', les deux membres de l'identité (3) par x'' et ajoutons, membre à membre, il vient :

$$a(x'^3 + x''^3) + b(x'^2 + x''^2) + c(x' + x'') \equiv 0$$

ou

$$as_3 + bs_2 + cs_1 = 0.$$

Or, nous connaissons s_2 et s_1, cette formule nous donne donc s_3 :

$$s_3 = -\frac{bs_2 + cs_1}{a} = \frac{3abc - b^3}{a^3}.$$

D'une manière plus générale, multiplions les deux membres de l'identité (2) par x'^{n-2}, les deux membres de l'identité (3) par x''^{n-2} et ajoutons les identités obtenues, membre à membre, nous aurons :

$$a(x'^n + x''^n) + b(x'^{n-1} + x''^{n-1}) + c(x'^{n-2} + x''^{n-2}) \equiv 0$$

ou :

$$(4) \qquad as_n + bs_{n-1} + cs_{n-2} = 0.$$

Cette formule nous montre que, dès qu'on connaît s_{n-1} et s_{n-2}, on connaît s_n, car on a :

$$s_n = -\frac{bs_{n-1} + cs_{n-2}}{a}.$$

Puisque nous connaissons s_1 et s_2, en prenant $n = 3$, nous aurons s_3 ; connaissant s_2 et s_3, en prenant $n = 4$, nous aurons s_4 ; puis, connaissant s_3 et s_4, pour $n = 5$, nous aurons s_5 ; et ainsi de suite. On voit donc que la formule (4) nous permet, en faisant successivement $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, etc..., de calculer, de proche en proche, s_3, s_4, s_5, etc..., connaissant s_1 et s_2. Une telle formule est ce qu'on appelle une *formule de récurrence*.

Remarque I. — Dans le cas de l'équation simplifiée

$$x^2 + px + q = 0,$$

la formule de récurrence (4) devient :

$$(5) \qquad s_n = -ps_{n-1} - qs_{n-2}.$$

Les premières sommes sont :

$$s_1 = -p, \quad s_2 = p^2 - 2q, \quad s_3 = 3pq - p^3.$$

Ces sommes sont des polynômes entiers en p et q, on peut, alors, conclure qu'il en est de même pour toute autre somme. Car, si s_{n-1} et s_{n-2} sont des polynômes entiers en p et q, la formule (5) montre que s_n sera aussi un polynôme entier, puisque ce sera la somme des deux polynômes entiers $-ps_{n-1}$ et $-qs_{n-2}$. La proposition étant donc vraie pour s_2 et s_3 est vraie pour s_4; étant vraie pour s_3 et s_4, elle est vraie pour s_5; et ainsi de suite. On peut donc énonçer le théorème suivant :

Les sommes des puissances semblables, entières et positives, des racines de l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0$$

sont des polynômes entiers en p *et* q.

Remarque II. — Il serait facile de calculer les sommes des puissances entières et *négatives* des racines de l'équation. En effet, on a :

$$s_{-n} = x'^{-n} + x''^{-n} = \frac{1}{x'^n} + \frac{1}{x''^n} = \left(\frac{1}{x'}\right)^n + \left(\frac{1}{x''}\right)^n.$$

Ces sommes sont donc les sommes des puissances *positives* de l'équation qui a pour racines $\frac{1}{x'}$ et $\frac{1}{x''}$, c'est-à-dire de l'équation aux inverses des racines de l'équation proposée. Or, cette transformée est, comme nous l'avons vu (n° 93) :

$$cx^2 + bx + a = 0,$$

et on est ramené au cas précédent. On aura, en appliquant les formules précédentes :

$$cs_{-2} + bs_{-1} + 2a = 0,$$

avec
$$s_{-1} = -\frac{b}{c};$$

et, d'une manière générale :

$$cs_{-n} + bs_{-(n-1)} + as_{-(n-2)} = 0,$$

formule de récurrence qui donnera les sommes $s_{-3}, s_{-4}, s_{-5}, \ldots$, de proche en proche.

Ainsi, on a, pour les premières sommes :

$$s_{-1} = -\frac{b}{c}, \quad s_{-2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}, \quad s_{-3} = \frac{3abc - b^3}{c^3}.$$

D'ailleurs, on pourrait encore remarquer que l'on a :

$$s_{-n} = \frac{1}{x'^n} + \frac{1}{x''^n} = \frac{x'^n + x''^n}{x'^n x''^n} = \frac{s_n}{\left(\frac{c}{a}\right)^n} = \frac{a^n}{c^n} s_n;$$

ce qui prouve que, quand on connaît s_n, on a, immédiatement, s_{-n}.

Problème. — *Former la transformée en* x^3 *de l'équation*

$$x^2 + px + q = 0.$$

Soient x' et x'' les racines de cette équation. L'équation cherchée a pour racines x'^3 et x''^3; la somme de ses racines est donc :

$$x'^3 + x''^3 = 3pq - p^3$$

et le produit :

$$x'^3 x''^3 = (x'x'')^3 = q^3.$$

L'équation cherchée est donc :

$$x^2 - (3pq - p^3)x + q^3 = 0.$$

EXERCICES

101. L'identité

$$(x' - x'')^2 \equiv (x' + x'')^2 - 4x'x''$$

montre qu'on peut calculer la différence des racines d'une équation du second degré sans avoir calculé ces racines. Calculer, dans ces conditions, les différences des racines des équations suivantes :

$$x^2 + px + q = 0, \qquad \left(\frac{p^2}{4} - q > 0\right);$$
$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (b^2 - 4ac > 0);$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0;$$
$$2x^2 + 3x - 7 = 0.$$

102. Vérifier que les équations suivantes ont, chacune, deux racines et reconnaître, *a priori*, sans les avoir calculées, les signes et les grandeurs relatives de ces racines (n° 92).

$$x^2 - 100x + 6 = 0;$$
$$2x^2 - 3x + 1 = 0;$$
$$(x - 1)(x - 3) + (x + 1)(x + 2) = 6.$$

103. x' et x'' étant les racines de l'équation

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0,$$

calculer s_2, s_3, s_4 :

$$s_2 = x'^2 + x''^2, \quad s_3 = x'^3 + x''^3, \quad s_4 = x'^4 + x''^4.$$

104. Pour quelles valeurs du paramètre λ l'équation

$$x^2 - \lambda x + 2\lambda + 4 = 0$$

a-t-elle la somme des carrés de ses racines égale à m^2 ?

105. Former les transformées en $\frac{1}{x}$, x^2, $\frac{1}{x^2}$, x^3, $\frac{1}{x^3}$ de l'équation

$$x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0.$$

106. Étant donnée l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

former l'équation qui a pour racines

$$\frac{x'}{x''} \quad \text{et} \quad \frac{x''}{x'},$$

x' et x'' désignant les racines de l'équation proposée.

Former, de même, l'équation qui a pour racines

$$x' + x'' \quad \text{et} \quad x'x''.$$

107. On appelle *fonction symétrique* de plusieurs lettres une fonction, de ces lettres, qui ne change pas lorsqu'on permute ces lettres de toutes les façons possibles.

Ainsi les expressions :

$$x'^2 + x''^2 + x'x'' ;$$
$$x'^2x''^2(x' + x'') + x'^3 + x''^3 ;$$

sont des fonctions symétriques des deux lettres x' et x''.

Montrer que toute fonction symétrique *entière* des deux lettres x' et x'' est un polynôme entier par rapport aux quantités

$$x'x'', \quad x' + x'', \quad x'^2 + x''^2, \text{ etc...} \quad x'^n + x''^n .....$$

En conclure qu'on peut calculer toute fonction symétrique entière des racines x' et x'' de l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

sans connaître ces racines, en se servant des relations entre les coefficients et les racines et des expressions de $s_2, s_3, \ldots s_n$ en fonction de p et q (n° 94).

Toute fonction symétrique entière de x' et x'' est un polynôme entier en p et q.

Comme application, calculer les fonctions symétriques :

$$(x'^2 + p'x' + q')(x''^2 + p'x'' + q') ;$$
$$(x'^3 + p'x' + q')(x''^3 + p'x'' + q') ;$$
$$x'^2 + p'x' + q' + x''^2 + p'x'' + q' ;$$
$$x'^3 + p'x' + q' + x''^3 + p'x'' + q'.$$

En conclure les équations transformées de l'équation

$$x^2 + px + q = 0$$

en $\quad x^2 + p'x + q' \quad$ et $\quad x^3 + p'x + q'$.

108. Soient x et x'' les deux racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Si l'on se propose de trouver la condition que doivent satisfaire a, b, c pour que les deux racines x' et x'' vérifient une certaine relation donnée, on procédera de la façon suivante. A la relation donnée, on adjoindra les deux relations :

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}, \qquad x'x'' = \frac{c}{a},$$

et, entre les trois relations ainsi obtenues, on *éliminera* x' et x''. Pour cela, on tirera x' et x' de deux de ces relations et on portera ces valeurs dans la troisième.

Comme application, chercher la condition que doivent satisfaire a, b et c pour que l'on ait

$$\frac{x'}{x''} = m,$$

m étant un nombre donné ;

ou pour que l'on ait : $\qquad x'^2 - x''^2 = m$;

ou $\qquad \alpha x' + \beta x'' + \gamma = 0$;

ou, encore,

$$\alpha x'^2 + \beta x' + \gamma = \alpha x''^2 + \beta x'' + \gamma$$

(*Bacc. Dijon*).

Appliquer à l'exemple numérique :

$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda - 1 = 0.$$

Déterminer λ de façon que l'une des relations précédentes soit vérifiée et calculer, dans ce cas, les racines x' et x''.

CHAPITRE III

ÉTUDE DU TRINOME DU SECOND DEGRÉ

95. Signe du Trinôme. — Soit

$$ax^2 + bx + c$$

le trinôme, le plus général, du second degré. En suivant une marche identique à celle que nous avons employée (n° 87) pour la résolution de l'équation du second degré, on pourra mettre ce trinôme sous la forme suivante :

$$ax^2 + bx + c \equiv a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \qquad (1).$$

Nous distinguerons, alors, trois cas suivant le signe du discriminant $b^2 - 4ac$:

1° *Si* $b^2 - 4ac > 0$, on peut écrire l'identité (1) sous la forme (Voir n° 91) [1] :

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x')\,(x - x'') \qquad (2).$$

en posant :
$$\begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{cases}$$

Supposons, pour fixer les idées, $x' > x''$; le nombre x ne peut alors occuper que trois positions relativement aux nombres x' et x''. 1° x peut être plus grand que x', auquel cas il est, *a fortiori*, plus grand que x''; les deux différences $x - x'$ et $x - x''$ sont toutes deux positives et le trinôme est du signe de a. 2° x peut être plus petit que x' mais plus grand que x''; dans ce cas, $x - x'$ et $x - x''$ ont des signes contraires, leur produit est négatif et le trinôme a le signe contraire du signe de a. 3° Enfin, x peut être plus petit que x'', il est, alors, *a fortiori*, plus petit que x'; les deux différences $x - x'$ et $x - x''$ sont négatives, leur produit est positif et le trinôme a le signe de a.

Lorsque x est plus grand que x' ou plus petit que x'', nous dirons que x *n'est pas compris* entre les racines x' et x'' du trinôme; lorsque x est plus petit que x' mais plus grand que x'', nous dirons que x est *compris* entre les racines x' et x''.

Avec ce langage abrégé, on peut donc dire, en résumé, que :

Lorsque le trinôme du second degré a deux racines ($b^2 - 4ac > 0$), *il est du signe de son premier terme pour toute valeur de la variable* x *non comprise entre les racines et du signe contraire à celui du premier terme pour toute valeur de la variable comprise entre les racines.*

Il n'est, d'ailleurs, nul que quand la variable x a l'une des deux valeurs x' ou x''.

2° *Si* $b^2 - 4ac = 0$, l'identité (1) devient :

$$ax^2 + bx + c \equiv a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

qui montre, immédiatement, puisque $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ est une quantité

[1] On pourrait, lorsque x' est différent de x'', établir l'identité (2) en se servant du corollaire du théorème II du n° 48. En effet, le polynôme $ax^2 + bx + c$ s'annulant pour les deux valeurs différentes $x = x'$ et $x = x''$, est divisible par le produit $(x - x')\,(x - x'')$. Il ne diffère donc de ce produit que par un facteur constant qui doit être a, puisque le coefficient de x^2 est a. On a donc,

$$ax^2 + bx + c \equiv a\,(x - x')\,(x - x'').$$

toujours positive, sauf pour la valeur $x = -\frac{b}{2a}$ pour laquelle elle est nulle, que :

Le trinôme est toujours du signe de son premier terme, sauf pour la valeur $-\frac{b}{2a}$, *pour laquelle il est nul.*

3° Enfin, *lorsque* $b^2 - 4ac < 0$, on peut écrire l'identité (1) sous la forme :

$$ax^2 + bx + c \equiv a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Or, puisque, d'après l'hypothèse, $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ est une quantité positive, non nulle, on voit que la quantité entre crochets est toujours positive : puisqu'elle est la somme de deux quantités positives, dont l'une n'est certainement pas nulle. Le trinôme a donc toujours une valeur numérique différente de zéro et du signe de a. Donc :

Lorsque le trinôme n'a pas de racines ($b^2 - 4ac < 0$), *il a, pour toute valeur de la variable* x, *une valeur différente de zéro et du signe de son premier terme.*

D'après les remarques précédentes, on peut énoncer les conclusions suivantes, relatives au signe du résultat de la substitution d'un nombre dans le premier membre d'une équation du second degré.

Si le résultat est de signe contraire à celui du premier terme, les racines existent, et sont distinctes, et le nombre substitué est compris entre ces racines.

Si le résultat est du même signe que le premier terme : ou bien l'équation n'a pas de racines ; ou bien les racines sont égales ; ou bien les racines existent et sont distinctes et, de plus, le nombre substitué n'est pas compris entre les racines.

Application. — *Reconnaître la position d'un nombre par rapport aux racines d'une équation du second degré, sans avoir calculé ces racines.*

Soit

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

une équation du second degré ayant, par hypothèse, deux racines distinctes ($b^2 - 4ac > 0$), et soit α un nombre qu'il s'agit de comparer à ces racines. Désignons par $f(x)$ le trinôme du second degré, premier membre de l'équation,

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c$$

et calculons la valeur numérique que prend ce polynôme, pour $x = \alpha$:

$$f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c.$$

D'abord, si le nombre $f(\alpha)$ est égal à zéro, α est l'une des deux racines de l'équation, et on reconnaît, immédiatement, si le nombre α est égal à la plus grande ou à la plus petite racine en le comparant à la demi-somme des racines qui est $-\frac{b}{2a}$ (n° 91).

Si le nombre $f(\alpha)$ est différent de zéro, il peut se présenter deux cas :

1° $f(\alpha)$ *est du signe de* a. On en conclut, d'après ce qui précède, que α n'est pas compris entre les racines. Il reste à distinguer si α est plus grand que la plus grande racine ou plus petit que la plus petite. Pour cela, il suffit de le comparer *à un nombre compris entre les deux racines*. Par exemple, si elles sont de signes contraires, 0 est compris entre les racines. Si donc, le nombre est positif, il sera plus grand que la plus grande racine; s'il est négatif, il sera plus petit que la plus petite. Si les racines sont de même signe, on remarque que, la demi-somme $-\frac{b}{2a}$ des deux racines étant, dans tous les cas, comprise entre ces deux racines, tout nombre plus grand que la plus grande racine est aussi plus grand que la demi-somme, et tout nombre plus petit que la plus petite racine est plus petit que la demi-somme; α sera donc plus grand que la plus grande racine ou plus petit que la plus petite, suivant qu'il sera plus grand ou plus petit que $-\frac{b}{2a}$.

2° $f(\alpha)$ *est du signe contraire au signe de* a. On en conclut que α est *compris* entre les racines.

Exemple I. — Soit l'équation :

$$5x^2 - 60x + 43 = 0$$

qui a deux racines. Si, dans le premier membre, on remplace x par 1, on trouve

$$5 - 60 + 43 = -12 < 0;$$

le résultat est de signe contraire au premier terme, 1 est donc compris entre les racines.

De même, si on substitue $\frac{1}{2}$, on trouve :

$$\frac{5}{4} - 30 + 43 = \frac{57}{4} > 0,$$

$\frac{1}{2}$ n'est donc pas compris entre les racines et, d'ailleurs,

comme $$\frac{1}{2} < \frac{60}{10},$$

$\frac{1}{2}$ est plus petit que la plus petite racine.

Remarque. — *Si, en substituant, à l'inconnue* x, *dans le premier membre d'une équation du second degré, deux nombres différents, on trouve deux résultats de signes contraires, on peut affirmer que cette équation a deux racines distinctes dont l'une est comprise entre ces deux nombres.*

Car, de ce qui précède, il résulte qu'il n'y a que dans le cas où il a deux racines distinctes qu'un trinôme du second degré prend des valeurs de signes contraires. D'ailleurs, nécessairement, l'un des deux nombres donnera un résultat de substitution du signe du premier terme et, par suite, ne sera pas compris entre les racines; tandis que l'autre donnera un résultat de substitution de signe contraire au signe du premier terme et sera compris entre les racines. Il y aura donc une racine et une seule comprise entre ces deux nombres donnés.

Lorsque entre deux nombres donnés il y a une racine et une seule d'une équation, on dit que ces deux nombres *séparent une racine de l'équation.*

Ainsi, dans l'exemple précédent, les deux nombres 1 et $\frac{1}{2}$, substitués dans le premier membre de l'équation

$$5x^2 - 60x + 43 = 0,$$

ont donné des résultats, -12 et $\frac{57}{4}$, de signes contraires, on peut donc affirmer que l'équation a deux racines dont une est comprise entre 1 et $\frac{1}{2}$.

Exemple II. — Le procédé précédent pourrait servir à calculer, de proche en proche, toutes les décimales d'une racine incommensurable d'une équation. Ainsi soit, par exemple, l'équation :

$$x^2 + 3x - 7 = 0$$

qui a une racine comprise entre 1 et 2. La partie entière de cette racine est, évidemment, 1.

Pour calculer la première décimale, posons :

$$x = 1 + \frac{y}{10}.$$

La partie entière de y sera, évidemment, la première décimale de x. Or, y satisfait l'équation :

$$\left(1 + \frac{y}{10}\right)^2 + 3\left(1 + \frac{y}{10}\right) - 7 = 0$$

ou :

$$y^2 + 50y - 300 = 0.$$

Dans le premier membre de cette équation, substituons, successivement, les nombres entiers 0, 1, 2, 3, etc., jusqu'à ce que nous trouvions deux résultats consécutifs de signes contraires. Nous trouvons ainsi que la racine positive de l'équation en y est comprise entre 5 et 6. La partie entière de y est donc 5, qui est la première décimale de la racine x.

Posons, de même,

$$y = 5 + \frac{z}{10}.$$

La partie entière de z sera la première décimale de y et, par suite, la seconde décimale de x. L'équation en z est :

$$\left(5 + \frac{z}{10}\right)^2 + 50\left(5 + \frac{z}{10}\right) - 300 = 0$$

ou :

$$z^2 + 600z - 2\,500 = 0.$$

Cette équation a une racine comprise entre 4 et 5, la seconde décimale de la racine x est donc 4. L'équation proposée a donc une racine qui est :

$$x = 1,54,$$

à $\frac{1}{100}$ *ième* près. On pourrait continuer de la sorte et calculer autant de décimales que l'on voudrait.

96. Résolution des inégalités du second degré. — Une inégalité du second degré, à une inconnue, est, d'après sa définition même, une inégalité entière telle que, si l'on fait passer tous les termes dans un membre, elle prenne, toutes réductions faites, la forme

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

ou la forme

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

Comme on peut toujours, en changeant les signes des deux membres de l'inégalité (ce qui change le sens de l'inégalité), ramener la

seconde forme à la première, nous n'étudierons que la première forme.

Résoudre l'inégalité

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

c'est trouver les valeurs de x pour lesquelles le trinôme $ax^2 + bx + c$ prend des valeurs positives. D'après ce qui précède, on voit qu'il faudra d'abord examiner le signe du discriminant $b^2 - 4ac$.

1° *Si* $b^2 - 4ac > 0$, le trinôme a deux racines x' et x''. Soit, par exemple, $x' > x''$.

Si a est *positif*, le trinôme devra être du signe de son premier terme; x devra donc ne pas être compris entre les racines. On vérifiera donc l'inégalité en prenant

$$\text{soit} \quad x > x', \quad \text{soit} \quad x < x''.$$

Si a est *négatif*, le trinôme doit être du signe contraire à celui de son premier terme et x doit être compris entre les racines. On satisfait donc l'inégalité en prenant :

$$x'' < x < x'.$$

2° Si $b^2 - 4ac \leqslant 0$, le trinôme a toujours le signe de son premier terme, quelle que soit la valeur de x. Donc, si a est *positif*, l'inégalité est vérifiée pour *toutes* les valeurs de x (sauf pour $x = -\frac{b}{2a}$, dans le cas de $b^2 - 4ac = 0$). Et, si a est *négatif*, l'inégalité n'est vérifiée pour *aucune* valeur de x, elle est *impossible*.

EXEMPLES. — L'inégalité

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

est vérifiée pour

$$2 < x < 3.$$

Car, pour que le trinôme $x^2 - 5x + 6$ soit négatif, il faut que x soit compris entre les racines qui sont 2 et 3.

L'inégalité

$$x^2 + x + 1 > 0$$

est vérifiée quel que soit x, car le trinôme $x^2 + x + 1$ n'a pas de racines, puisque son discriminant est — 3.

Lorsqu'on a une inégalité de la forme

$$A\,B\,C > 0,$$

où les polynômes A, B et C sont du premier ou du second degré, on

étudie séparément les signes des trois facteurs et on prend les valeurs de x pour lesquelles le produit a le signe $(+)$. Or, chacun des facteurs A, B ou C ne peut changer de signe que s'il a des racines. On cherchera donc, d'abord, les racines des trois facteurs. On rangera ces racines par ordre de grandeur croissante et on formera ainsi une suite telle que, lorsque x est compris entre deux nombres consécutifs de cette suite, chacun des facteurs conserve un signe constant.

Pour abréger le langage, on dit, lorsque x est compris entre deux nombres α et β, que x est compris dans *l'intervalle* α, β.

Avec ce langage, on peut donc dire que, dans chaque *intervalle*, formé par deux nombres consécutifs de la suite précédente, chacun des facteurs, et, par suite, leur produit, conserve un signe constant. On a donc formé une suite d'intervalles tels que, dans chacun, le produit ABC conserve un signe constant. Pour résoudre l'inégalité, il suffira de donner à x des valeurs comprises dans les intervalles où le signe du produit est le signe $(+)$.

Il faut remarquer, d'ailleurs, que, si l'un des facteurs conserve toujours le même signe, on pourra diviser les deux membres de l'inégalité par ce facteur (n°62, *Th. II*), ce qui revient à le supprimer (à condition, bien entendu, de changer le sens de l'inégalité si le facteur est négatif).

Exemple. — Résoudre l'inégalité :

$$x(x^2-3x+2)(2x^2+7x+3)(x^2+x+1)>0.$$

Comme le quatrième facteur x^2+x+1 est toujours positif, on peut le supprimer et l'inégalité est équivalente à la suivante :

$$x(x^2-3x+2)(2x^2+7x+3)>0.$$

Le premier facteur s'annule pour $x=0$; le second pour $x=2$, et $x=1$; le troisième pour $x=-\frac{1}{2}$, $x=-3$. Ces cinq racines, rangées par ordre de grandeur croissante, sont :

$$-3<-\frac{1}{2}<0<1<2.$$

1° Lorsque $x<-3$, le premier facteur est négatif, les deux autres sont positifs, puisque x n'est pas compris entre leurs racines ; le produit est donc négatif.

2° Lorsque $-3<x<-\frac{1}{2}$, le premier facteur est négatif, le second positif (x non compris entre les racines), le troisième est négatif (x compris entre les racines) ; le produit est *positif*.

3° Lorsque $-\frac{1}{2} < x < 0$, le premier facteur est négatif, les deux autres sont positifs ; le produit est donc *négatif*.

4° Lorsque $0 < x < 1$, les trois facteurs sont positifs ; le produit est *positif*.

5° Lorsque $1 < x < 2$, le premier et le troisième facteurs sont positifs, le second est négatif ; donc le produit est *négatif*.

6° Enfin, lorsque $x > 2$, les trois facteurs sont positifs ; le produit est *positif*.

En résumé, on voit que l'inégalité n'est vérifiée que dans les trois cas suivants :

Lorsque $\qquad -3 < x < -\frac{1}{2}$,

ou lorsque $\qquad 0 < x < 1$,

ou lorsque $\qquad x > 2$.

Pour la commodité de la discussion, on la dispose souvent sous forme de tableau. Désignons par A, B, C les trois facteurs x, $x^2 - 3x + 2$, $2x^2 + 7x + 3$ et par P leur produit. Plaçons, dans une première colonne verticale, les valeurs remarquables de x et, en regard de chaque intervalle, les signes correspondants des trois facteurs A, B, C, dans les trois colonnes suivantes. Le signe du produit P, indiqué dans la dernière colonne, se déduit des trois signes des colonnes précédentes par la règle des signes. On a, ainsi, le tableau suivant :

x	A	B	C	P	
	−	+	+	−	
-3					
	−	−	+	+	*inégalité vérifiée.*
$-\frac{1}{2}$					
	−	+	+	−	
0					
	+	+	+	+	*inégalité vérifiée.*
1					
	+	+	−	−	
2					
	+	+	+	+	*inégalité vérifiée.*

En lisant la colonne qui contient les signes du produit P, on voit immédiatement dans quels intervalles il faut placer x pour que l'inégalité soit vérifiée [1].

(1) L'avantage de cette disposition provient de ce qu'on forme chaque colonne de signes séparément et qu'on ne s'occupe que d'un facteur à la fois. Ainsi, on forme la colonne B en écrivant que le facteur B est du signe de son premier terme pour toutes les valeurs de x sauf pour celles qui sont comprises entre ses racines -3 et $-\frac{1}{2}$.

Les inégalités fractionnaires de la forme

$$\frac{A}{B} > 0,$$

se ramènent immédiatement aux inégalités précédentes en multipliant les deux membres par le carré du dénominateur. Ainsi, l'inégalité

$$\frac{A}{B} > 0$$

est évidemment équivalente à l'inégalité

$$AB > 0.$$

D'ailleurs, on pourrait aussi les étudier directement, en étudiant séparément les signes du numérateur et du dénominateur.

Lorsque l'inégalité fractionnaire ne se présente pas sous la forme

$$\frac{A}{B} > 0,$$

on commence par la mettre sous cette forme, en faisant passer tous les termes dans le premier membre (n° 62) et en mettant ce premier membre sous forme de fraction rationnelle (n° 50).

Exemple. — Soit à résoudre l'inégalité :

$$1 + \frac{x-4}{x-3} > \frac{x-2}{x-1}.$$

Faisons tout passer dans le premier membre, l'inégalité s'écrit :

$$1 + \frac{x-4}{x-3} - \frac{x-2}{x-1} > 0$$

ou :

$$\frac{(x-3)(x-1) + (x-4)(x-1) - (x-3)(x-2)}{(x-3)(x-1)} > 0$$

et, enfin, toutes réductions faites :

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{(x-1)(x-3)} > 0.$$

Le numérateur, du premier membre, s'annule pour $x = 2 \pm \sqrt{3}$; le dénominateur est nul pour $x = 1$ et $x = 3$. Pour ranger ces valeurs par ordre de grandeur croissante, substituons 1 et 3 dans le numérateur. La substitution de 1, à x, dans le numérateur, donne :

$$1 - 4 + 1 = -2 < 0;$$

résultat négatif : 1 est donc compris entre les racines. La substitution de 3 donne :

$$9 - 12 + 1 = -2 < 0;$$

résultat également négatif : 3 est aussi compris entre les racines du numérateur. On a donc l'ordre suivant :

$$2 - \sqrt{3} < 1 < 3 < 2 + \sqrt{3}.$$

Désignons par N le numérateur et par D le dénominateur. On forme, facilement, le tableau suivant qui contient les signes de N et D et, par suite, du premier membre $\frac{N}{D}$ de l'inégalité, pour les divers intervalles qu'il y a lieu de considérer :

x	N	D	$\frac{N}{D}$	
$-\infty$				
	+	+	+	*inégalité vérifiée.*
$2-\sqrt{3}$				
	−	+	−	
1				
	−	−	+	*inégalité vérifiée.*
3				
	−	+	−	
$2+\sqrt{3}$				
	+	+	+	*inégalité vérifiée.*
$+\infty$				

La lecture de la colonne qui contient les signes de $\frac{N}{D}$ nous montre immédiatement que l'inégalité n'est vérifiée que dans les trois cas suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} x < 2 - \sqrt{3}, \\ 1 < x < 3, \\ x > 2 + \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

97. Variation du Trinôme du second degré. — Pour étudier la variation du trinôme du second degré

$$y = ax^2 + bx + c,$$

lorsque x varie, nous le mettrons, au moyen d'une transformation

que nous avons déjà employée plusieurs fois, sous la forme équivalente :

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right],$$

en désignant par y la valeur du trinôme, correspondante à la valeur x de la variable. Sous cette forme, on voit, immédiatement, que le trinôme y varie dans le même sens que la quantité entre crochets, ou en sens contraire, suivant que a est positif ou négatif. Désignons, en effet, par z la quantité entre crochets :

$$z = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2};$$

on aura

$$y = az.$$

A deux valeurs z' et z'' de z, correspondent, pour y, les deux valeurs az' et az''. Si on a

$$z' > z'',$$

on aura :

$$az' > az'',$$

lorsque a est positif, et

$$az' < az'',$$

lorsque a est négatif (Voir n° 22, *Th. I*).

Les deux valeurs de y sont donc rangées dans le même sens que les valeurs de z ou en sens contraire, suivant que a est positif ou négatif.

Nous sommes ainsi conduit à étudier la variation de l'expression z. Or, cette quantité z varie elle-même dans le même sens que l'expression $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, qu'on déduit de z en en retranchant la quantité *constante* $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$. Il reste donc à étudier la variation de $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

Le carré d'une quantité quelconque est le même que celui de sa valeur absolue. D'autre part, le carré d'une quantité positive (arithmétique) croît ou décroît suivant que cette quantité elle-même croît ou décroît. De là il résulte que le carré d'une quantité varie dans le même sens que sa valeur absolue. $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ varie donc dans le

même sens que la valeur absolue de $x + \frac{b}{2a}$. Or, comme la quantité $x + \frac{b}{2a}$ varie toujours dans le même sens que x, sa valeur absolue varie dans le même sens que x lorsqu'elle est positive (car alors elle est égale à sa valeur absolue); et, au contraire, sa valeur absolue varie en sens contraire de x lorsqu'elle est négative (car la valeur absolue d'une quantité négative diminue lorsque cette quantité augmente). Comme, d'ailleurs, la valeur de $x + \frac{b}{2a}$ est positive ou négative suivant que x est plus grand ou plus petit que $-\frac{b}{2a}$, on est conduit à distinguer les deux cas suivants :

1° Lorsque x croît, depuis une valeur négative très petite jusqu'à $-\frac{b}{2a}$ $\left(\text{c'est-à-dire, en langage abrégé, de } -\infty \text{ à } -\frac{b}{2a}\right)$, la quantité $x + \frac{b}{2a}$ croît et est négative, donc sa valeur absolue décroît. Il en résulte que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ décroît depuis une valeur positive très grande jusqu'à zéro (de $+\infty$ à 0), et que z décroît depuis une valeur positive très grande jusqu'à $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$.

On en conclut que :

lorsque a est *positif*, le trinôme y *décroît* de $+\infty$ à $\frac{4ac - b^2}{4a}$;

et, au contraire, que :

lorsque a est *négatif*, le trinôme y *croît* de $-\infty$ à $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

2° Lorsque x croît, à partir de la valeur $-\frac{b}{2a}$, au delà de toute limite $\left(\text{c'est-à-dire, en langage abrégé, de } -\frac{b}{2a} \text{ à } +\infty\right)$, la quantité $x + \frac{b}{2a}$ est positive et croît, donc sa valeur absolue croît. Il en résulte que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ croît, à partir de zéro, au delà de toute limite et que z croît, depuis la valeur $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$, au delà de toute limite.

Donc :

lorsque a est *positif*, le trinôme y *croît* de $\frac{4ac - b^2}{4a}$ à $+\infty$:

et, lorsque a est négatif, le trinôme y *décroît* de $\frac{4ac - b^2}{4a}$ à $-\infty$.

Résumé. — Lorsque a est *positif*, la variable x croissant de $-\infty$ à $+\infty$, le trinôme décroît, d'abord, de $+\infty$ à $\frac{4ac - b^2}{4a}$, valeur qu'il atteint pour $x = -\frac{b}{2a}$; pour croître, ensuite, de $\frac{4ac - b^2}{4a}$ à $+\infty$. Dans ce cas, comme on le voit, le trinôme ne prend jamais des valeurs inférieures à $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

Lorsque a est *négatif*, la variable x croissant de $-\infty$ à $+\infty$, le trinôme commence par croître de $-\infty$ à $\frac{4ac - b^2}{4a}$, valeur qu'il atteint pour $x = -\frac{b}{2a}$; puis, décroît de $\frac{4ac - b^2}{4a}$ à $-\infty$. Dans ce cas, le trinôme ne prend jamais des valeurs supérieures à $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

Remarque. — Lorsque, parmi toutes les valeurs que peut prendre une fonction, il y en a une qui est plus grande que toutes les autres, on dit que cette valeur est un *maximum absolu* de la fonction. De même, si, parmi toutes les valeurs que peut prendre une fonction, il y en a une qui est plus petite que toutes les autres, on dit que cette valeur est un *minimum absolu* de la fonction.

De ce qui précède, il résulte que, lorsque a est positif, le trinôme a un minimum absolu $\frac{4ac - b^2}{4a}$, qu'il atteint pour $x = -\frac{b}{2a}$; et que, lorsque a est négatif, le trinôme a un maximum absolu $\frac{4ac - b^2}{4a}$, qu'il atteint pour $x = -\frac{b}{2a}$.

On aurait pu montrer, *a priori*, l'existence de ce maximum ou de ce minimum en résolvant la question suivante : « *Pour quelles valeurs de la variable* x *le trinôme prend-il une valeur donnée* y ? » Les valeurs de x, cherchées, sont les racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = y$$

ou

$$ax^2 + bx + c - y = 0.$$

Or, cette équation n'a des racines que si on a :

$$b^2 - 4a(c - y) \geqslant 0$$

ou

$$4ay \geqslant 4ac - b^2.$$

Donc, si a est positif, il faut que l'on ait :

$$y \geqslant \frac{4ac - b^2}{4a},$$

ce qui prouve qu'il n'y a aucune valeur de x pour laquelle le trinôme prend une valeur *inférieure* à $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

Si a est négatif, il faut que l'on ait :

$$y \leqslant \frac{4ac - b^2}{4a},$$

et, dans ce second cas, il n'y a pas de valeur de x pour laquelle le trinôme prend une valeur *supérieure* à $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

98. Représentation graphique de la variation du trinôme. — Pour représenter graphiquement la variation du trinôme $ax^2 + bx + c$, traçons dans un plan deux axes rectangulaires ox et oy et construisons la courbe qui a pour équation

$$y = ax^2 + bx + c$$

(voir le nº 69). Nous distinguerons deux cas suivant le signe de a.

1° $a > 0$ —. D'après ce que nous venons de voir, x croissant de $-\infty$ à $-\frac{b}{2a}$, y décroît de $+\infty$ à $\frac{4ac - b^2}{4a}$, la courbe se compose donc d'une branche BA, *descendante*, partant d'un point très éloigné, à gauche et en haut, et aboutissant au point A de coordonnées $x = -\frac{b}{2a}$, $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ (*fig.* 29). x croissant, ensuite, de $-\frac{b}{2a}$ à $+\infty$, y croît de $\frac{4ac - b^2}{4a}$ à $+\infty$, la courbe se continue, par conséquent, par une branche *montante* AC, partant du point A et s'éloignant, indéfiniment, vers la droite, en haut.

2° $a < 0$. — Lorsque x croît de $-\infty$ à $-\frac{b}{2a}$, y *croît* de $-\infty$ à $\frac{4ac - b^2}{4a}$, la courbe représentative se compose donc d'une branche

montante BA, partant d'un point infiniment éloigné, à gauche, en bas et aboutissant au point A de coordonnées $x = -\frac{b}{2a}$, $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$

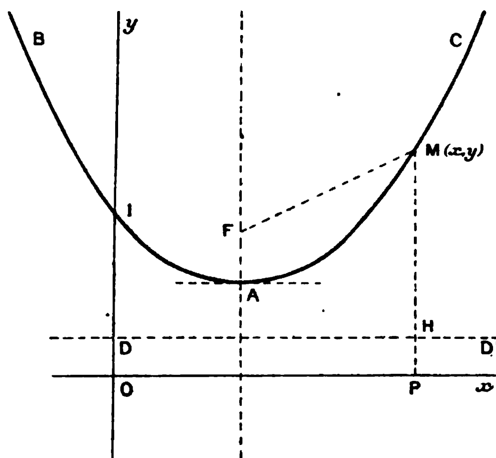


Fig. 29.

(*fig.* 30). x croissant, ensuite, de $-\frac{b}{2a}$ à $+\infty$, y décroît de $\frac{4ac - b^2}{4a}$

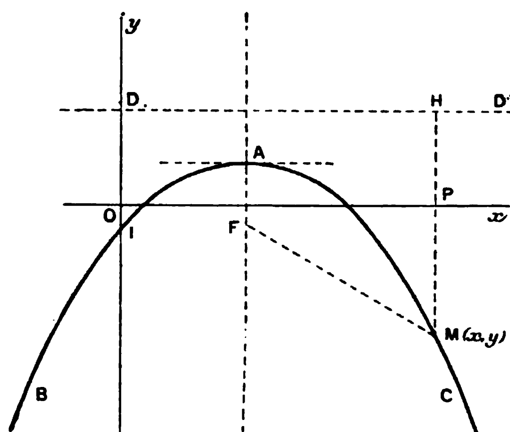


Fig. 30.

à $-\infty$, la courbe se continue, par suite, par une branche *descendante* AC, partant du point A et s'éloignant, indéfiniment, vers la droite, en bas.

Il faut remarquer que la courbe, dans les deux cas, coupe toujours l'axe des y en un point I de coordonnées $x = 0$, $y = c$. Elle ne coupe, d'ailleurs, l'axe des x que s'il existe des valeurs de x pour lesquelles le trinôme s'annule.

La forme de la courbe représentative de la variation du trinôme est tout à fait précisée par la proposition suivante :

Théorème. — *La courbe qui représente la variation du trinôme du second degré est une parabole* (¹).

Cette courbe a, en effet, pour équation

$$y = ax^2 + bx + c$$

ou

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right];$$

ce qui peut s'écrire :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y}{a} - \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

Ajoutons, aux deux membres de cette équation, l'expression :

$$\left(y - \frac{1}{4a} - \frac{4ac - b^2}{4a}\right)^2,$$

elle s'écrira, toutes simplifications faites,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y - \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)^2 = \left(y - \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}\right)^2 \quad (1).$$

Cela étant, considérons, dans le plan, le point F dont les coordonnées sont :

$$x = -\frac{b}{2a}, \quad y = \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}$$

(suivre, en même temps, sur les figures 29 et 30).

Soit M un point quelconque de la courbe, de coordonnées x et y, on a, comme on sait (Voir n° 67),

$$\overline{MF}^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y - \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)^2.$$

(¹) Nous rappelons que la parabole est le lieu des points d'un plan situés à égale distance d'un point fixe, appelé foyer, et d'une droite fixe, appelée directrice.

D'autre part, construisons, dans le plan, la parallèle à ox qui a pour équation :

$$y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a};$$

c'est la droite DD' qui coupe oy au point D d'ordonnée $\frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$ (nº 68). Abaissons, du point M, la perpendiculaire MH sur DD', qui coupe ox en P. On a, entre les *segments* déterminés par les trois points M, H et P (en prenant pour sens positif sur la droite MH le sens oy), la relation de Chasles (nº 23) :

$$\overline{HM} = \overline{PM} - \overline{PH}.$$

Or, $\overline{PM}$ est l'ordonnée y du point M; et $\overline{PH}$ est égal à $\overline{OD}$, par suite, égal à $\frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$, on a donc :

$$\overline{HM} = y - \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$$

et

$$\overline{MH}^2 = \left(y - \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}\right)^2.$$

En rapprochant les deux expressions de $\overline{MH}^2$ et $\overline{MF}^2$ de l'équation de la courbe, mise sous la forme (1), on voit que cette équation exprime que, pour tout point M de la courbe, on a :

$$\overline{MF}^2 = \overline{MH}^2,$$

ou :

$$MF = MH.$$

La courbe est donc le lieu des points M situés à égale distance du point F et de la droite DD', c'est donc une *parabole* ayant pour foyer le point F et pour directrice DD'.

Exemple. — Étudions les variations du trinôme

$$y = x^2 - 5x + 4.$$

On a :

$$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Quand x croît de $-\infty$ à $\frac{5}{2}$, $x - \frac{5}{2}$ est négatif et croît de $-\infty$ à 0, son carré $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$ décroît de $+\infty$ à 0 et y décroît de $+\infty$ a $-\frac{9}{4}$. La

courbe (*fig.* 31) se compose, d'abord, d'une branche BA, infinie, descendante jusqu'au point A de coordonnées $\frac{5}{2}$ et $-\frac{9}{4}$. Quand x croît de $\frac{5}{2}$ à $+\infty$, $x-\frac{5}{2}$ est positif et croît de 0 à $+\infty$, son carré croît de 0 à $+\infty$ et y croît de $-\frac{9}{4}$ à $+\infty$. La courbe se continue par une seconde branche infinie AC, montante à partir de A. — Pour $x=0$ on a $y=4$, la courbe coupe donc oy au point I de coordonnées 0 et 4. De plus, y s'annule pour $x=1$

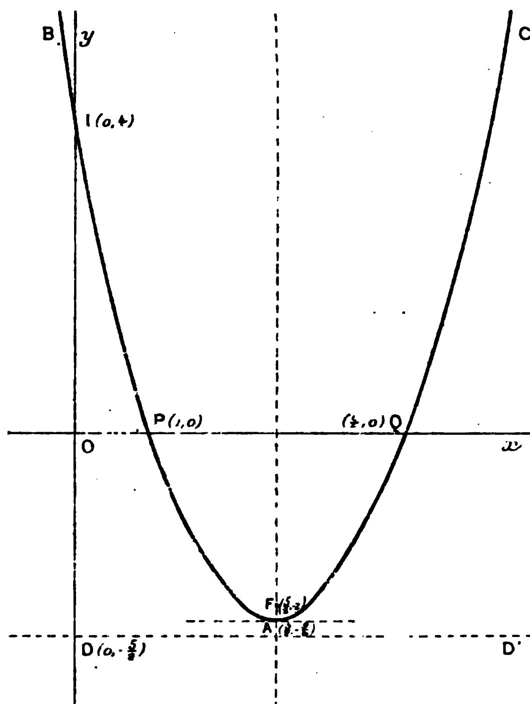


FIG. 31.

et $x=4$, la courbe coupe donc l'axe des x au point P de coordonnées 1 et 0 et au point Q de coordonnées 4 et 0. D'ailleurs, l'équation de la courbe s'écrit :

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y+2)^2=\left(y+\frac{5}{2}\right)^2.$$

Ce qui prouve que le foyer de la parabole est le point F de coordonnées $\frac{5}{2}$

et -2, et que la directrice est la droite DD′ qui a pour équation :

$$y = -\frac{5}{2}.$$

EXERCICES

109. Reconnaître les positions des nombres 3, 5, -1 par rapport aux racines des équations suivantes :

$$x^2 + 3x - 2 = 0,$$
$$2x^2 + 7x - 1 = 0,$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

110. Reconnaître que l'équation

$$\frac{\alpha^2}{a^2 + x} + \frac{\beta^2}{b^2 + x} - 1 = 0,$$

a toujours deux racines distinctes dont une est comprise entre $-a^2$ et $-b^2$.

111. Calculer, à $\frac{1}{1000}$ *ième* près, la racine positive de l'équation

$$x^2 - 17 = 0,$$

en suivant la marche indiquée dans l'*Exemple II* du n° 95.

Plus généralement, indiquer la marche à suivre pour calculer, à $\frac{1}{10^p}$ près, la racine positive de l'équation

$$x^2 - A = 0,$$

où A désigne un nombre positif. En déduire la règle (arithmétique) de l'extraction de la racine carrée d'un nombre A, à $\frac{1}{10^p}$ près.

112. Comment faut-il prendre λ pour que l'une des racines de l'équation

$$3x^2 + (\lambda - 1)x + 3\lambda + 2 = 0$$

soit supérieure à 3 et l'autre inférieure à 2 ?

113. Résoudre les inégalités conditionnelles :

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} > 0;$$
$$\frac{2x + 1}{x - 1} > \frac{x + 3}{x - 2};$$
$$\frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 3)(x - 4)} > 1 \qquad \textit{(Bacc. Besançon)};$$
$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x - 6} > \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - 3x + 2};$$
$$\frac{x}{x - a} - \frac{2a}{x + a} > \frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}.$$

114. Quelles valeurs faut-il attribuer à λ pour que l'une des inégalités suivantes soit vérifiée *quel que soit* x ?

$$x^2 + 2x + \lambda > 10$$

(*Bacc. Nancy*) ;

$$x^2 - (8\lambda - 2)x + 15\lambda^2 - 2\lambda - 7 > 0$$

(*Bacc. Clermont*) ;

$$\frac{(h+1)x^2 + hx + h}{x^2 + x + 1} > \lambda$$

(*Bacc. Sorbonne*) ;

$$\frac{2kx^2 + 2\lambda x + \lambda}{4x^2 + 6x + 3} > k \quad (k > 0)$$

(*Bacc. Nancy*).

115. Démontrer que, si a, b, c sont les trois côtés d'un triangle, le trinôme du second degré :

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$$

est toujours positif, quel que soit x

(*Bacc. Lyon*).

116. Considérons l'équation du second degré :

$$\lambda x^2 + 2(\lambda + 1)x + \lambda - 1 = 0.$$

Cherchons pour quelles valeurs de λ cette équation a deux racines; puis, λ étant ainsi limité, quels sont les signes des racines suivant les diverses valeurs que prend λ.

D'abord, pour que l'équation ait deux racines, il faut que l'on ait :

$$(\lambda + 1)^2 - \lambda(\lambda - 1) > 0,$$

ou

$$3\lambda + 1 > 0,$$

ou, enfin,

$$\lambda > -\frac{1}{3}.$$

Ceci posé, la somme S des racines et leur produit P sont donnés par les formules :

$$S = -\frac{2(\lambda + 1)}{\lambda}, \qquad P = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Déterminons les valeurs de λ, *plus grandes que* $-\frac{1}{3}$, pour lesquelles S ou P changent de signe : ce sont $\lambda = 0$, $\lambda = 1$. Les valeurs remarquables de λ, rangées par ordre de grandeur croissante, sont, alors,

$$-\frac{1}{3} < 0 < 1.$$

1° Lorsque $\lambda < -\frac{1}{3}$, l'équation n'a pas de racines.

2° Lorsque $-\frac{1}{3} < \lambda < 0$, l'équation a deux racines *positives :* car la somme S et le produit P sont positifs.

3° Lorsque $0 < \lambda < 1$, l'équation a deux racines *de signes contraires:* car le produit P est négatif; et c'est la racine négative qui a la plus grande valeur absolue, car la somme S est négative.

4° Enfin, lorsque $\lambda > 1$, l'équation a deux racines *négatives :* car le produit P est positif et la somme S est négative.

Les résultats de cette discussion peuvent être résumés dans le tableau suivant :

λ	S	P	x'	x''	
$-\frac{1}{3}$					
	+	+	+	+	
0			$+\infty$ / $-\infty$	$\frac{1}{2}$	
	−	−	−	+	$\lvert x' \rvert > \lvert x'' \rvert$
1	....	...0...	....	...0...	
	−	+	−	−	
$+\infty$					

Pour $\lambda = 0$, S et P sont infiniment grands, l'équation a une racine infiniment grande et il est évident que c'est celle qui devient négative qui devient infiniment grande puisque, lorsque λ a dépassé la valeur zéro, la racine négative est la plus grande en valeur absolue. On peut donc dire que, quand λ passe, en croissant, par la valeur zéro, une racine x' passe brusquement de $+\infty$ à $-\infty$; en entendant, par ce langage abrégé, que l'équation a une racine x' très grande et positive, lorsque λ est voisin de zéro mais plus petit, et que l'équation a une racine x' très grande en valeur absolue et négative, lorsque λ est très peu supérieur à zéro. C'est ce que nous avons indiqué dans le tableau. L'autre racine x'' est, pour cette valeur de λ, égale à $\frac{1}{2}$.

Discuter, de la même façon, lorsque λ prend toutes les valeurs possibles (de $-\infty$ à $+\infty$), les racines des équations suivantes :

$$(\lambda - 1)\, x^2 - 2\lambda x + \lambda = 0;$$
$$\lambda x^2 - \lambda x + \lambda + 1 = 0;$$
$$(\lambda - 2)\, x^2 + 2\,(2\lambda - 3)\, x + 5\lambda - 6 = 0.$$

117. — Entre quelles limites doit varier y pour que l'équation :

$$x^2 - 3xy + y^2 + 2x - 9y + 1 = 0$$

ait deux racines pour x? De même, entre quelles limites doit varier x pour que cette équation ait deux racines, en considérant y comme l'inconnue?

(*Bacc. Lille*).

Même question pour les équations :

$$x^2 + 12xy + 4y^2 + 4x + 8y + 20 = 0$$

(*Bacc. Sorbonne*);

$$5x^2 - 12xy + 4y^2 + 54x - 4y - 139 = 0$$

(*Bacc. moderne*).

118. Étudier les variations des trinômes :

$$x^2 + x + 1;$$
$$2x^2 - x + 1;$$
$$x^2 - 3x + 2;$$

et construire les courbes représentatives de la variation.

119. Résoudre l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1),$$

cela revient, au fond, à déterminer les abcisses des points d'intersection de la courbe

$$y = ax^2 + bx + c$$

avec l'axe ox. En se plaçant à ce point de vue, retrouver la condition pour que l'équation (1) ait deux racines distinctes ou une racine double.

CHAPITRE IV

ÉQUATIONS DONT LA RÉSOLUTION SE RAMÈNE A LA RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

99. Équation bicarrée. — On appelle *équation bicarrée* une équation du quatrième degré qui, toutes réductions faites, ne contient que des termes de degrés pairs.

D'après cette définition, toute équation bicarrée peut se mettre sous la forme :

$$(1) \qquad ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Soit x une racine de cette équation, posons

$$x^2 = y;$$

on aura :
$$x^4 = y^2$$

et, par suite, y sera racine de l'équation du second degré :

$$(2) \qquad ay^2 + by + c = 0$$

qu'on nomme la *résolvante* de l'équation bicarrée (1).

Il résulte, de ce qui précède, que le carré d'une racine quelconque de l'équation (1) vérifie la résolvante (2). D'ailleurs, réciproquement,

soit y une racine de la résolvante, toute racine x de l'équation

$$(3) \qquad x^2 = y$$

sera une racine de l'équation (1).

On aura donc toutes les racines de l'équation bicarrée en cherchant les racines de la résolvante, puis, en résolvant autant d'équations de la forme (3) *que la résolvante a de racines.*

Discussion. — Pour que l'équation bicarrée ait des racines, il faut, d'abord, que la résolvante en ait ; de plus, y étant une racine de l'équation (2), l'équation (3) n'aura des racines que si y est un nombre positif. L'équation bicarrée aura donc autant de *couples* de racines que la résolvante aura de racines *positives*. Nous sommes ainsi amené à la discussion suivante :

1° $b^2 - 4ac > 0$. — La résolvante a deux racines ; mais, pour que ces racines fournissent des racines pour l'équation bicarrée, il faut encore qu'elles soient positives et ceci nous conduit à distinguer trois cas :

(A). $\frac{c}{a} > 0, \quad -\frac{b}{a} > 0$. La résolvante a *deux* racines positives y' et y''.

L'équation bicarrée a donc *quatre racines* qui sont les racines des équations

$$x^2 = y', \quad x^2 = y'',$$

ce qui donne les deux couples :

$$x = \pm\sqrt{y'}, \quad x = \pm\sqrt{y''}.$$

Or, on a :

$$y' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \; y'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

l'équation bicarrée a donc les quatre racines :

$$+\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

$$-\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

$$+\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

$$-\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

On peut réunir ces quatre racines en une seule formule et dire que les racines sont données par la formule :

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

où on prend, devant les deux radicaux, toutes les combinaisons possibles des signes (+) et (—).

(B). $\frac{c}{a} > 0$, $-\frac{b}{a} < 0$. La résolvante a deux racines négatives y' et y''. L'équation bicarrée *n'a pas de racines*, car les deux équations

$$x^2 = y' \quad \text{et} \quad x^2 = y''$$

n'ont pas de racines.

(C). $\frac{c}{a} < 0$. La résolvante a une racine positive et une racine négative. A la racine négative, ne correspond aucune racine pour l'équation bicarrée. A la racine positive y', correspondent deux racines :

$$\sqrt{y'} \quad \text{et} \quad -\sqrt{y'}.$$

L'équation bicarrée a donc, dans ce cas, *deux racines*.

Dans le cas particulier où $c = 0$, la résolvante a une racine nulle et une autre égale à $-\frac{b}{a}$; les racines de l'équation bicarrée sont donc les racines des deux équations :

$$x^2 = 0, \quad x^2 = -\frac{b}{a}.$$

La première donne $x = 0$, qu'on peut considérer comme une *racine double*; la seconde a deux racines, $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$, si $-\frac{b}{a}$ est positif, et n'a aucune racine, si $-\frac{b}{a}$ est négatif.

2° $b^2 - 4ac = 0$. — La résolvante a, alors, une seule racine (double)

$$y = -\frac{b}{2a}.$$

Les racines de l'équation bicarrée sont donc les racines de l'équation :

$$x^2 = -\frac{b}{2a}.$$

(A). Si $-\frac{b}{2a}$ est positif, l'équation bicarrée a *deux racines* $+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ et $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$; et on peut considérer chacune de ces racines comme *double*, puisqu'elle provient d'une racine double de la résolvante. D'ailleurs, on voit que, lorsque $b^2 - 4ac$ s'annule, les deux racines

$$+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \quad \text{et} \quad +\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

deviennent égales à $+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. De même, les deux autres racines se confondent en $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. C'est pour exprimer ce fait qu'on dit que, dans ce cas, l'équation bicarrée a *quatre racines deux à deux confondues* ou encore *deux racines doubles*.

(B). Si $-\frac{b}{2a}$ est négatif, l'équation bicarrée n'a pas de racines.

(C). Enfin, si $b = 0$, la condition $b^2 - 4ac = 0$, entraîne $c = 0$ et l'équation bicarrée se réduit à :

$$ax^4 = 0.$$

L'équation, dans ce cas, n'a plus que la seule racine $x = 0$. Mais, comme, en faisant $b = c = 0$, la formule générale de résolution donne, pour x, quatre valeurs égales à zéro, on dit que, dans ce cas, l'équation a *quatre racines égales* ou encore *une racine quadruple*.

3° $b^2 - 4ac < 0$. — La résolvante n'a pas de racines, il en est donc de même de l'équation bicarrée.

— On peut diriger cette discussion d'une autre manière que voici :

1° Si $\frac{c}{a} < 0$, la résolvante a deux racines, l'une négative, l'autre positive ; donc l'équation bicarrée n'a que *deux* racines.

2° Si $\frac{c}{a} > 0$, il y a deux cas à distinguer :

(A). $\frac{b}{a} \geqslant 0$. L'équation résolvante ne peut avoir que des racines négatives (lorsqu'elle en a); donc, l'équation bicarrée *n'a pas* de racines.

(B). $\frac{b}{a} < 0$. Il faut, alors, examiner le signe du discriminant.

Si $b^2 - 4ac > 0$, la résolvante a deux racines positives et l'équation bicarrée a *quatre* racines.

Si $b^2 - 4ac < 0$, la résolvante *n'a pas* de racines et, par conséquent, il en est de même de l'équation bicarrée.

Si $b^2 - 4ac = 0$, la résolvante a une racine double, positive, et l'équation bicarrée a *deux racines doubles*.

3° Si $c = 0$, la résolvante a toujours au moins une racine égale à zéro et l'équation bicarrée a toujours au moins deux racines égales à zéro.

Si $\frac{b}{a} > 0$, l'équation bicarrée n'a pas d'autres racines.

Si $\frac{b}{a} < 0$, l'équation bicarrée admet, en outre, les deux racines

$$+\sqrt{-\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{-\frac{b}{a}}.$$

Si $b = 0$, la racine zéro est une racine *quadruple*.

Résumé. — Nous réunissons les résultats de la discussion précédente dans les deux tableaux suivants :

TABLEAU I.

- $b^2 - 4ac > 0$
  - $\frac{c}{a} > 0$
    - $\frac{b}{a} > 0$, pas de racines.
    - $\frac{b}{a} < 0$, quatre racines.
  - $\frac{c}{a} < 0$, deux racines.
  - $\frac{c}{a} = 0$, une racine double égale à zéro :
    - $\frac{b}{a} > 0$, pas d'autres racines.
    - $\frac{b}{a} < 0$, deux autres racines.
- $b^2 - 4ac = 0$
  - $\frac{b}{a} > 0$, pas de racines.
  - $\frac{b}{a} < 0$, deux racines doubles.
  - $\frac{b}{a} = 0$, une racine quadruple égale à zéro.
- $b^2 - 4ac < 0$, pas de racines,

TABLEAU II.

$\frac{c}{a} < 0$, deux racines.

$\frac{c}{a} > 0$ $\begin{cases} \frac{b}{a} \geqslant 0, \text{ pas de racines.} \\ \frac{b}{a} < 0 \begin{cases} b^2 - 4ac > 0, \text{ quatre racines.} \\ b^2 - 4ac = 0, \text{ deux racines doubles.} \\ b^2 - 4ac < 0, \text{ pas de racines.} \end{cases} \end{cases}$

$c = 0$, une racine double égale à zéro : $\begin{cases} \frac{b}{a} > 0, \text{ pas d'autres racines.} \\ \frac{b}{a} < 0, \text{ deux autres racines.} \\ \frac{b}{a} = 0, \text{ la racine zéro est quadruple.} \end{cases}$

Dans le cas des équations numériques, il y aura avantage à adopter le tableau II, car cette seconde manière de procéder renvoie le calcul du discriminant au moment où il devient indispensable.

EXEMPLES. — Soit à résoudre l'équation :

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

La résolvante est :

$$y^2 - 10y + 9 = 0,$$

dont les racines sont 1 et 9. Les racines de l'équation bicarrée sont donc celles des deux équations :

$$x^2 = 1 \quad \text{et} \quad x^2 = 9,$$

ce qui donne les quatre racines :

$$+1, \ -1, \ +3, \ -3.$$

Soit, encore, l'équation

$$x^4 + x^2 - 12 = 0.$$

La résolvante

$$y^2 + y - 12 = 0$$

a pour racines 3 et -4. L'équation bicarrée n'a donc que deux racines, provenant de la racine positive, ce sont $+\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

Enfin, l'équation

$$x^4 + x^2 + 1 = 0$$

n'a pas de racines, car sa résolvante

$$y^2 + y + 1 = 0$$

n'en a pas.

100. Trinôme bicarré. — L'étude du trinôme bicarré se déduit facilement de l'étude du trinôme du second degré, dont il ne diffère que par la substitution de x^2 à x.

Signe du trinôme. — La valeur numérique du trinôme bicarré :

$$(1) \qquad ax^4 + bx^2 + c,$$

pour une certaine valeur x de la variable, n'est autre chose que la valeur numérique du trinôme

$$(2) \qquad ay^2 + by + c,$$

quand on donne à la variable y la valeur x^2.

Si le trinôme (2) a deux racines distinctes, son signe, pour $y = x^2$, et, par suite, le signe du trinôme (1), dépend de la position de x^2 par rapport aux racines.

Si le trinôme (2) a une racine double ou n'a pas de racines ($b^2 - 4ac \leqslant 0$), son signe et, par suite, celui du trinôme (1), est toujours le signe de a (sauf pour les racines, qui lui donnent la valeur zéro).

Examinons, plus en détail, le premier cas.

1° Supposons que le trinôme (2) ait des racines distinctes, positives, y' et y'' ($y' > y''$) ; le trinôme bicarré (1) a, alors, quatre racines qui, rangées par ordre de grandeur croissante, sont :

$$-\sqrt{y'} < -\sqrt{y''} < +\sqrt{y''} < +\sqrt{y'}.$$

Lorsque $\qquad x < -\sqrt{y'},$

on a : $\qquad x^2 > y'$

(car x est un nombre négatif dont la valeur absolue est plus grande que $\sqrt{y'}$), x^2 n'est pas compris entre les racines du trinôme (2) et le signe de ce trinôme est celui de a.

Lorsque $\qquad -\sqrt{y'} < x < -\sqrt{y''},$

on a : $\qquad y'' < x^2 < y',$

x^2 est compris entre les racines de (2), le signe du trinôme est celui de $-a$.

Quand $\qquad -\sqrt{y''} < x < \sqrt{y''},$

on a : $\qquad x^2 < y'',$

x^2 n'est pas compris entre les racines de (2) et le signe est celui de a.

Quand $\sqrt{y''} < x < \sqrt{y'}$,

on a : $y'' < x^2 < y'$,

x^2 est compris entre les racines de (2) et le signe du trinôme bicarré est celui de $-a$.

Enfin, lorsque $x > \sqrt{y'}$,

on a : $x^2 > y'$,

x^2 n'est pas compris entre les racines du trinôme (2) et le signe est celui de $+a$.

2° Supposons que le trinôme (2) ait une seule racine positive y', l'autre étant négative. Le trinôme bicarré (1) n'a, alors, que deux racines réelles : $-\sqrt{y'}$ et $+\sqrt{y'}$. Il faut remarquer que x^2, étant un nombre positif, sera toujours supérieur à la racine négative.

Si $x < -\sqrt{y'}$,

on a : $x^2 > y'$,

le trinôme est du signe de a.

Si $-\sqrt{y'} < x < \sqrt{y'}$,

on a : $x^2 < y'$,

x^2 est compris entre les racines du trinôme (2) et le signe est celui de $-a$.

Enfin, si $x > \sqrt{y'}$,

on a : $x^2 > y'$

et le trinôme est du signe de a.

3° Lorsque le trinôme (2) a deux racines négatives, x^2, étant un nombre essentiellement positif, est nécessairement plus grand que ces deux racines et le trinôme a toujours le signe de a. Or, dans ce cas, le trinôme bicarré n'a pas de racines. On peut donc dire, en rapprochant ce cas du cas où $b^2 - 4ac \leqslant 0$, que :

Lorsque le trinôme bicarré n'a pas de racines, il est toujours du signe de son premier terme ;

et que :

Lorsque le trinôme bicarré a deux racines doubles ($b^2 - 4ac = 0$,

$-\frac{b}{2a} > 0$), *il est toujours du signe de son premier terme, sauf pour les deux racines, pour lesquelles il prend la valeur zéro.*

Remarque. — Ce qui précède nous conduit à faire une remarque analogue à celle que nous avons faite pour le trinôme du second degré (n° 95).

Si deux nombres α *et* β, *substitués dans le premier membre d'une équation bicarrée*

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

donnent des résultats de substitution de signes contraires, on peut affirmer que l'équation a des racines et qu'il y a une ou trois racines comprises entre les deux nombres α et β.

Car, comme nous l'avons vu, le trinôme bicarré ne prend des signes différents que lorsqu'il a des racines. De plus, en examinant tous les cas qui peuvent se présenter, on se convainc aisément que deux nombres α et β ne donnent des résultats de substitution de signes différents que s'ils comprennent une ou trois racines (c'est-à-dire un nombre *impair* de racines).

Application. — *Reconnaître la position d'un nombre* α *par rapport aux racines d'une équation bicarrée.*

Soit

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \qquad (1)$$

une équation bicarrée ayant deux ou quatre racines. La résolvante

$$ay^2 + by + c = 0 \qquad (2)$$

a une ou deux racines positives. On comparera, d'abord, le nombre α^2 aux racines de la résolvante. Pour cela, on substituera (n° 95) α^2 à y dans le premier membre, ce qui revient à remplacer x par α dans le trinôme bicarré.

Le signe de cette substitution, joint, au besoin, à la comparaison de α^2 à la demi-somme $-\frac{b}{2a}$ des racines de la résolvante, donne la position de α^2 par rapport aux racines de la résolvante. Connaissant cela, on en déduira, immédiatement, la position de α par rapport aux racines de l'équation bicarrée. Ainsi, soit y' une racine positive de la résolvante. Si, par exemple, on a trouvé que

$$\alpha^2 > y',$$

on en conclura

$$\alpha > \sqrt{y'}, \quad \text{si} \quad \alpha > 0 ;$$

ou

$$\alpha < -\sqrt{y'}, \quad \text{si} \quad \alpha < 0.$$

Si, au contraire, on avait trouvé que :

$$\alpha^2 < y',$$

on en conclurait que

$$-\sqrt{y'} < \alpha < \sqrt{y'}.$$

On connaît donc la position de α par rapport aux deux racines $-\sqrt{y'}$ et $+\sqrt{y'}$. On ferait de même pour les deux autres, s'il y avait lieu.

Exemple. — Quelle est la position du nombre 3 par rapport aux racines de l'équation :

$$x^4 - 50x^2 + 112 = 0,$$

qui a quatre racines ?

Remplaçons x par 3, dans le premier membre, il vient :

$$81 - 450 + 112 = -257;$$

ce résultat étant négatif, 3^2 est compris entre les racines de la résolvante. On a donc :

$$y'' < 3^2 < y'$$

et, par suite, puisque 3 est positif,

$$\sqrt{y''} < 3 < \sqrt{y'} ;$$

3 est donc compris entre les deux racines positives de l'équation bicarrée.

Décomposition du trinôme. — Lorsque le trinôme bicarré a quatre racines, il est décomposable en un produit de quatre facteurs du premier degré. On a, en effet, l'identité :

$$ay^2 + by + c \equiv a(y - y')(y - y''),$$

y' et y'' étant les racines de la résolvante. Remplaçons, dans cette identité, y par x^2, il vient :

$$(1) \qquad ax^4 + bx^2 + c \equiv a(x^2 - y')(x^2 - y'').$$

Lorsque le trinôme a quatre racines, y' et y'' sont positifs et on peut écrire l'identité (1) sous la forme :

$$(2) \quad ax^4 + bx^2 + c \equiv a(x - \sqrt{y'})(x + \sqrt{y'})(x - \sqrt{y''})(x + \sqrt{y''}).$$

Si le trinôme n'a que deux racines, une seule des racines de la résolvante, y' par exemple, est positive et on peut écrire l'identité (1) sous la forme :

$$(3) \qquad ax^4+bx^2+c\equiv a(x-\sqrt{y'})\,(x+\sqrt{y'})\,(x^2-\sqrt{y''}),$$

où le facteur (x^2-y'') est toujours positif.

Les deux décompositions (2) et (3) pourraient servir pour étudier le signe du trinôme suivant les diverses valeurs attribuées à x, il suffirait, pour cela, d'examiner, dans les divers cas, les signes des facteurs du premier degré.

Dans tous les cas, le trinôme bicarré peut être décomposé en deux facteurs du second degré.

En effet, cela résulte de l'identité (1) toutes les fois que la résolvante a deux racines. Si la résolvante n'a pas de racines, c'est, qu'en posant

$$\frac{c}{a}=q, \quad \frac{b}{a}=p,$$

on a :

$$q>0, \quad \frac{p^2}{4}-q\leqslant 0.$$

On a, alors,

$$ax^4+bx^2+c\equiv a\,(x^4+px^2+q).$$

En remarquant que x^4 et q sont les termes extrêmes dans le développement de $(x^2\pm\sqrt{q})^2$, on peut écrire les deux identités :

$$(4) \qquad ax^4+bx^2+c\equiv a\big[(x^2+\sqrt{q})^2-(2\sqrt{q}-p)\,x^2\big],$$

$$(5) \qquad ax^4+bx^2+c\equiv a\big[(x^2-\sqrt{q})^2-(-2\sqrt{q}-p)\,x^2\big].$$

Dans la première, on a, certainement,

$$2\sqrt{q}-p<0,$$

la valeur absolue de $\sqrt{q}$ étant supérieure à celle de $\frac{p}{2}$, en vertu de l'inégalité

$$\frac{p^2}{4}-q<0.$$

Il vient donc :

$$(6) \qquad ax^4+bx^2+c\equiv a\Big[(x^2+\sqrt{q})^2-\big(x\sqrt{2\sqrt{q}-p}\big)^2\Big]$$

$$\equiv a\left[x^2+x\sqrt{2\sqrt{q}-p}+\sqrt{q}\right]\left[x^2-x\sqrt{2\sqrt{q}-p}+\sqrt{q}\right],$$

Et, ainsi, se trouve réalisée la décomposition du trinôme bicarré en deux facteurs du second degré.

Exemples : On a :

$$x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + 1)^2 - x^2 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1);$$
$$x^4 + 1 \equiv (x^2 + 1)^2 - 2x^2 \equiv \left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)\left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right).$$

Remarquons que l'identité (6) subsiste toutes les fois que, q étant positif, p est négatif et qu'elle donne, dans ce cas, un moyen nouveau de résoudre l'équation bicarrée. Car, en résolvant les deux équations du second degré dans lesquelles se décompose l'équation bicarrée, on obtient la formule suivante :

$$(7) \qquad x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{q} - p} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2\sqrt{q} - p},$$

qui est surtout avantageuse dans le cas où $q = \frac{c}{a}$ est un carré parfait. Car, alors, on remplace une formule contenant des radicaux superposés par une autre qui ne contient que des radicaux simples.

Considérons, par exemple, l'équation

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 0.$$

La formule du n° 99 nous donne

$$x = \pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}.$$

La formule (7) conduit au résultat suivant :

$$x = \pm\sqrt{2} \pm 1,$$

qui est évidemment plus simple.

101. Équations réciproques. — On dit qu'une équation entière, mise sous la forme

$$f(x) = 0,$$

est *réciproque* si, le polynôme $f(x)$ étant ordonné, les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux, ou encore, si les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux et de signes contraires et s'il n'y a pas de terme à égale distance des extrêmes, dans ce dernier cas.

De cette définition, il résulte que les équations réciproques du quatrième degré sont de la forme :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$

ou de la forme :

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0.$$

Comme il est aisé de le voir, si on remplace, dans ces équations, x par $\frac{1}{x}$, on retrouve, après avoir chassé les dénominateurs, les mêmes équations. Ces deux équations sont donc *identiques* à leurs transformées en $\frac{1}{x}$. Ceci est, d'ailleurs, un fait général, et il est facile de se rendre compte que toute équation réciproque est identique à sa transformée en $\frac{1}{x}$. On en conclut que, si une équation réciproque admet un certain nombre pour racine, elle admet aussi l'inverse de ce nombre comme racine.

Nous allons montrer que les résolutions des équations réciproques du troisième, quatrième et cinquième degré se ramènent à la résolution d'équations du second degré.

1° L'équation réciproque du troisième degré :

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

admet la racine $x = -1$; le premier membre de l'équation est donc divisible par $x + 1$ et cette équation s'écrit :

$$(x + 1)\left[ax^2 + (b - a)x + a\right] = 0.$$

Les racines de l'équation sont donc : $x = -1$, et les deux racines de l'équation du second degré :

$$ax^2 + (b - a)x + a = 0.$$

2° De même, l'équation réciproque :

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$$

admet la racine $x = 1$ et, en outre, les deux racines de l'équation du second degré :

$$ax^2 + (a + b)x + a = 0,$$

obtenue en divisant le premier membre par $x - 1$.

3° Pour résoudre l'équation réciproque du quatrième degré :

$$(1) \qquad ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$

divisons les deux membres par x^2. Cette équation s'écrit alors :

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Posons :

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

on aura :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = y^2$$

ou

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

On en conclut que y est racine de l'équation du second degré :

$$(2) \qquad ay^2 + by + c - 2a = 0.$$

On aura donc toutes les racines de l'équation (1) en calculant d'abord les racines de l'équation (2), qu'on appelle la *résolvante*. Soit y une racine de cette résolvante. A cette racine correspondent deux racines de l'équation (1) qui sont données par l'équation :

$$x + \frac{1}{x} = y$$

ou

$$(3) \qquad x^2 - xy + 1 = 0.$$

L'équation (2) ayant, en général, deux racines, comme, à chacune de ces racines, correspondent deux racines de l'équation (1), fournies par l'équation (3), l'équation (1) aura, dans le cas le plus favorable, quatre racines.

Exemples. — Soit à résoudre l'équation :

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0.$$

Cette équation s'écrit, en divisant par x^2,

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0.$$

Posons : $$x+\frac{1}{x}=y,$$

et on a la résolvante :

$$6(y^2-2)-35y+62=0$$

ou $$6y^2-35y+50=0.$$

Les racines de cette résolvante sont : $\frac{5}{2}$ et $\frac{10}{3}$.

Les racines de l'équation proposée sont donc données par les deux équations :

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \quad \text{et} \quad x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3},$$

ou $$2x^2-5x+2=0 \quad \text{et} \quad 3x^2-10x+3=0,$$

dont les racines sont :

$$2 \text{ et } \frac{1}{2}, \qquad 3 \text{ et } \frac{1}{3}.$$

Soit encore l'équation :

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

qui s'écrit

$$x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1=0.$$

La résolvante est :

$$y^2+y-1=0,$$

qui a les deux racines

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Les racines de l'équation proposée sont donc les racines des deux équations :

$$2x^2+(1-\sqrt{5})\,x+2=0,$$
$$2x^2+(1+\sqrt{5})\,x+2=0.$$

Or ces deux équations n'ont pas de racines; l'équation proposée n'a donc pas de racines.

4° L'équation réciproque du quatrième degré :

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$$

s'écrit :

$$a(x^4 - 1) + bx(x^2 - 1) = 0$$

ou, encore,

$$(x^2 - 1)\left[a(x^2 + 1) + bx\right] = 0.$$

Elle admet donc les racines des deux équations du second degré :

$$x^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad ax^2 + bx + a = 0.$$

La première a pour racines $+1$ et -1 ; la seconde a ou n'a pas de racines suivant le signe de son discriminant $b^2 - 4a^2$. Cette équation réciproque a donc toujours au moins deux racines, qui sont $+1$ et -1, et au plus quatre racines.

5° L'équation réciproque du cinquième degré :

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

admet toujours la racine $x = -1$; le premier membre est donc divisible par $x + 1$. En effectuant cette division, il reste l'équation :

$$ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2 + (b - a)x + a = 0,$$

qui est réciproque du quatrième degré et que, par suite, nous savons résoudre.

6° L'équation réciproque du cinquième degré :

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0,$$

admet toujours la racine $x = 1$. Le premier membre est divisible par $x - 1$ et il reste, cette division effectuée, une équation du quatrième degré réciproque :

$$ax^4 + (a + b)x^3 + (a + b + c)x^2 + (a + b)x + a = 0,$$

que nous savons résoudre.

Remarque. — Nous venons de voir que toute équation réciproque du troisième ou du cinquième degré admet la racine 1 ou la racine -1. Le premier membre est divisible par $x - 1$ ou $x + 1$ et, en effectuant cette division, on est amené à résoudre une équation réciproque de degré pair.

Ce fait est général et il est facile de voir que *toute équation réci-*

proque de degré impair admet soit la racine 1, *soit la racine* — 1. En débarrassant l'équation de cette racine, on ramène sa résolution à celle d'une équation réciproque de degré pair.

102. Équations binômes. — Une équation *binôme* est une équation entière qui ne contient que deux termes. Toute équation binôme est donc de la forme :

$$Ax^p + Bx^q = 0.$$

Soit $p > q$, on peut mettre x^q en facteur et écrire l'équation de la façon suivante :

$$x^q \left[Ax^{p-q} + B\right] = 0.$$

Ceci montre que l'équation admet d'abord la racine $x = 0$; puis, les racines de l'équation :

$$Ax^{p-q} + B = 0.$$

Posons $p - q = m$, $-\frac{B}{A} = a$, et cette dernière équation s'écrit :

$$x^m = a.$$

Donc toute équation binôme, débarrassée de la racine *zéro*, peut être mise sous la forme :

$$x^m = a.$$

C'est cette équation qu'il s'agit de résoudre.

1° *Lorsque* m *est pair, l'équation*

$$x^m = a$$

a deux racines, si a *est un nombre positif,*
et n'a pas de racines, si a *est négatif.*

Remarquons, d'abord, que, m étant pair, on a :

$$(-x)^m \equiv x^m.$$

Par suite, si x est une racine de l'équation, $-x$ est aussi racine. Il suffit donc de chercher les racines positives de l'équation et on obtiendra toutes les racines négatives en changeant les racines positives de signe.

Supposons, d'abord, a positif. On a appris, en arithmétique, qu'il existe un nombre positif (arithmétique), et un seul, dont la puis-

sance $m^{ième}$ est égale à a. C'est ce qu'on appelle la racine $m^{ième}$ de a : $\sqrt[m]{a}$. L'équation binôme a donc, dans ce cas, deux racines, $+\sqrt[m]{a}$ et $-\sqrt[m]{a}$; et deux seulement.

Si a est négatif, l'équation n'a, évidemment, aucune racine; car, toute puissance paire d'un nombre quelconque étant positive, il ne peut exister aucun nombre x dont la puissance $m^{ième}$ soit égale à un nombre *négatif* a.

2° *Lorsque* m *est impair, l'équation*

$$x^m = a$$

a toujours une racine et une seule.

En effet, supposons, d'abord, a positif. L'équation ne peut admettre que des racines positives, car toute puissance impaire d'un nombre est de même signe que lui. Il n'y a donc qu'un nombre positif dont la puissance $m^{ième}$ puisse être égale au nombre positif a. Or, il n'y a qu'un seul nombre positif dont la puissance $m^{ième}$ est égale à a : c'est la racine $m^{ième}$ arithmétique de a. L'équation n'a donc qu'une racine qui est $+\sqrt[m]{a}$.

Si a est négatif, l'équation ne peut admettre que des racines négatives. Posons, alors,

$$x = -x';$$

on aura :

$$(-x')^m = a$$

ou

$$x'^m = -a,$$

et nous sommes ramené au cas précédent. Il n'y a qu'une racine pour x' qui est $\sqrt[m]{-a}$; par suite, l'équation proposée n'a qu'une racine :

$$x = -\sqrt[m]{-a}.$$

Exemples. — L'équation

$$x^6 - 1 = 0$$

a deux racines : $x = \pm 1$.

L'équation $x^3 + 27 = 0$

a une seule racine : $x = -\sqrt[3]{27} = -3$.

L'équation

$$x^4 + 2 = 0$$

n'a pas de racines.

103. Équations trinômes. — *Toute équation trinôme*

(1) $$ax^p + bx^q + cx^r = 0$$

peut être résolue au moyen d'une équation du second degré et d'équations binômes dans le cas où les exposants p, q, r *sont tels que l'on ait :*

$$p - q = q - r \text{ }[1].$$

Soit, en effet, m la différence $q - r$. On aura

$$q = m + r$$

et $$p = q + m = 2m + r.$$

L'équation (1) s'écrit, alors,

$$ax^{2m+r} + bx^{m+r} + cx^r = 0$$

ou, en mettant x^r en facteur,

$$x^r\left[ax^{2m} + bx^m + c\right] = 0.$$

Sous cette forme on voit que l'équation admet, d'abord, la racine $x = 0$; puis, les racines de l'équation :

(2) $$ax^{2m} + bx^m + c = 0.$$

Pour résoudre cette équation on la traite comme l'équation bicarrée qui n'en est, d'ailleurs, que le cas particulier de $m = 2$. On pose :

$$x^m = y$$

et on voit que, x étant une racine de l'équation (2), x^m est racine de l'équation du second degré :

(3) $$ay^2 + by + c = 0.$$

D'ailleurs, réciproquement, y étant une racine de l'équation (3), toute racine x de l'équation binôme :

(4) $$x^m = y$$

est une racine de l'équation (2).

On obtiendra donc toutes les racines de l'équation (2) *en résolvant l'équation* (3); *et en résolvant, ensuite, autant d'équations binômes, de la forme* (4), *que cette équation* (3) *a de racines* y.

(1) La condition $p - q = q - r$ exprime, comme nous le verrons plus tard (n° 129), que les trois exposants p, q et r forment une *progression arithmétique*.

Exemple. — Soit à résoudre l'équation :

$$x^7 - 3x^4 - 4x = 0.$$

On a, d'abord, la racine $x = 0$. En divisant par x, il reste l'équation :

$$x^6 - 3x^3 - 4 = 0.$$

Posons :

$$x^3 = y$$

et nous aurons la résolvante :

$$y^2 - 3y - 4 = 0,$$

dont les racines sont 4 et — 1. L'équation proposée a donc pour racines celles des deux équations binômes :

$$x^3 = 4 \quad \text{et} \quad x^3 = -1,$$

qui ont, chacune, une racine :

$$x = \sqrt[3]{4} \quad \text{et} \quad x = -1.$$

L'équation proposée a donc les trois racines :

$$0, \quad -1, \quad \sqrt[3]{4}.$$

EXERCICES

120. Résoudre les équations bicarrées :

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0;$$
$$4x^4 - 17x^2 + 4 = 0;$$
$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0;$$
$$a^2b^2x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = 0;$$
$$c^4x^4 + (a^2c^2 - b^2c^2)\,x^2 - a^2b^2 = 0.$$

121. Résoudre l'équation :

$$x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{3x^3}{4} - \frac{3x^2}{8} + \frac{x}{16} + \frac{1}{32} = 0,$$

sachant qu'elle admet la racine $-\frac{1}{2}$.

(École forestière).

122. Résoudre les équations :

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = n(n-1) \qquad \text{(Todhunter)};$$

$$\frac{1}{x - \sqrt{2 - x^2}} - \frac{1}{x + \sqrt{2 - x^2}} = 1 \qquad \text{(J. Bertrand)};$$

$$\frac{(1 + x)^2}{1 + x^2} + \frac{(1 - x)^2}{1 - x^2} = a \qquad \text{(J. Bertrand)};$$

$$\sqrt[4]{a + x} + \sqrt[4]{a - x} = h \qquad \text{(J. Bertrand)}.$$

123. Reconnaître la position des nombres — 3, 5, 10 par rapport aux racines des équations :

$$x^4 + 6x^2 - 7 = 0;$$
$$3x^4 - 5x^2 + 1 = 0.$$

Décomposer les trinômes premiers membres en facteurs du premier et du second degré.

124. Résoudre les équations :

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0;$$
$$2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 2 = 0;$$
$$x^6 - 35x^3 + 216 = 0;$$
$$x^{10} + 31\,x^5 = 32;$$
$$3x^3 + 42\sqrt{x^3} = 3321;$$
$$x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{2}{n}} = -2;$$
$$\frac{x}{a+x} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}} = \frac{b}{a} \quad \left(\text{on posera } \sqrt{\frac{a}{a+x}} = y\right);$$
$$\sqrt[2pq]{x^{p+q}} - \frac{1}{2c}\left[\sqrt[p]{x} + \sqrt[q]{x}\right] = 0.$$

125. Montrer que les équations du quatrième degré de la forme :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0,$$

peuvent se résoudre en posant :

$$x - \frac{1}{x} = y.$$

Si x est racine d'une telle équation, $-\frac{1}{x}$ est aussi racine. Ces équations sont dites *réciproques par rapport à* — 1 ou, encore, *réciproques de seconde espèce.* D'une manière générale, l'équation :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bqx + aq^2 = 0$$

peut être résolue, en posant :

$$x + \frac{q}{x} = y.$$

Si x est une racine de cette équation, $\frac{q}{x}$ est aussi une racine. Ces équations sont dites *réciproques par rapport à q.*

Par exemple, résoudre les équations :

$$5x^4 - 16x^3 + 2x^2 + 16x + 5 = 0;$$
$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = 0;$$
$$x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 39x + 81 = 0.$$

126. Discuter complètement les équations suivantes :

$$(\lambda - 2)x^4 + 4(\lambda + 3)x^2 + \lambda - 1 = 0,$$
$$x^4 - (3\lambda + 4)x^2 + (\lambda + 1)^2 = 0,$$
$$(3\lambda - 2)x^4 - 2\lambda x^3 + 3(2\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda - 2 = 0,$$
$$6\lambda x^4 + 2(\lambda + 1)(\lambda + 2)x^3 + (\lambda^2 + 27\lambda + 2)x^2 + 2(\lambda + 1)(\lambda + 2)x + 6\lambda = 0,$$

lorsque λ prend toutes les valeurs possibles (Voir l'exercice 116).

127. Déterminer λ de façon que les quatre racines de l'équation bicarrée :

$$x^4 - (3\lambda + 4)x^2 + (\lambda + 1)^2 = 0$$

soient en progression arithmétique. (*Bacc. Caen.*)

(x_1, x_2, x_3 x_4, étant quatre nombres, on dit qu'ils sont en progression arithmétique si on a :

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3. \qquad \text{Voir n° 129).}$$

CHAPITRE V

ÉQUATIONS SIMULTANÉES DU SECOND DEGRÉ

104. La résolution de tout système d'équations simultanées à plusieurs inconnues, composé d'*une* équation du second degré et d'un nombre quelconque d'équations du premier degré, se ramène à la résolution d'une équation du second degré à une inconnue, suivie de la résolution d'équations du premier degré.

On obtient, en effet, d'après les principes généraux que nous avons établis (nos 55, 56 et 73), un système équivalent au système proposé en résolvant les $(n - 1)$ équations, qui sont du premier degré, par rapport à $(n - 1)$ inconnues (si n désigne le nombre des inconnues et des équations) et en portant les valeurs de ces inconnues, en fonction de la dernière, x par exemple, dans l'unique équation du second degré. La valeur de l'inconnue x est, alors, fournie par une équation du second degré. En remplaçant x, successivement, par ses valeurs dans les expressions des $(n - 1)$ premières inconnues, on aura les valeurs correspondantes de ces inconnues.

Voici quelques exemples de systèmes de ce genre.

Exemple I. — Résoudre le système :

$$(1) \begin{cases} x + y = s, \\ xy = p. \end{cases}$$

De la première équation on tire :

$$(2) \qquad y = s - x$$

et, en portant dans la seconde, on a, pour déterminer x, l'équation :

$$x(s-x) = p$$

ou

$$(3) \qquad x^2 - sx + p = 0.$$

Cette équation a, en général, deux racines, x' et x'', et on a les valeurs correspondantes de y en remplaçant dans l'équation (2), successivement, x par x' et x''. On a donc deux systèmes de solutions :

$$x = x', \quad y = s - x'$$

et

$$x = x'', \quad y = s - x''.$$

Or, comme on a

$$x' + x'' = s,$$

on a, aussi,

$$s - x' = x'' \quad \text{et} \quad s - x'' = x'.$$

Les deux systèmes de solutions sont donc :

$$(4) \qquad x = x', \quad y = x'';$$
$$(5) \qquad x = x'', \quad y = x'.$$

Remarque. — La résolution du système (1) revient, au fond, au problème que nous avons déjà traité : « Trouver deux nombres connaissant leur somme s et leur produit p » (nº 93). Le problème, ainsi posé, n'a qu'une solution, car les deux systèmes de solutions (4) et (5) n'en font qu'un seul et montrent que les deux nombres cherchés sont les racines de l'équation (3). Cela tient à ce qu'il n'y a pas plus de raisons d'appeler un des deux nombres x que de l'appeler y.

Exemple II. — Résoudre le système :

$$(1) \quad \begin{cases} x - y = d, \\ xy = p. \end{cases}$$

La première équation donne :

$$(2) \qquad y = x - d$$

et, en portant dans la seconde, on trouve, pour déterminer x,

$$(3) \qquad x^2 - dx - p = 0.$$

Cette équation a, en général, deux racines x' et x'', ce qui donne les deux systèmes de solutions :

$$x = x', \quad y = x' - d;$$

et

$$x = x'', \quad y = x'' - d.$$

D'ailleurs, en remarquant que

$$x' + x'' = d,$$

ces systèmes s'écrivent :

$$(4) \qquad x = x', \quad y = -x'';$$
$$(5) \qquad x = x'', \quad y = -x'.$$

Remarque. — La résolution du système (1) revient, au fond, au problème suivant : « Trouver deux nombres connaissant leur différence d et leur produit p ». Ici, à l'encontre de ce qui se passe dans le problème précédent, les deux solutions sont bien distinctes. Cela tient à ce que les deux nombres ne jouent pas le même rôle. La lettre x ne désigne pas l'un quelconque des deux nombres, mais celui duquel il faut retrancher le second pour obtenir la différence d.

D'ailleurs, ce problème se ramène aisément au précédent de la façon suivante : le système (1) s'écrit :

$$\begin{cases} x + (-y) = d, \\ x(-y) = -p. \end{cases}$$

Ceci montre que les deux nombres x et $(-y)$ ont pour somme d et pour produit $-p$; ce sont donc les deux racines de l'équation du second degré.

$$x^2 - dx - p = 0.$$

On prendra pour x l'une des racines de cette équation et pour y l'autre racine, changée de signe. Ce qui donne bien les deux solutions différentes (4) et (5), suivant qu'on prend pour x l'une ou l'autre des deux racines.

Exemple III. — Résoudre le système :

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - r^2 = 0, \\ ax + by + c = 0. \end{cases}$$

En supposant $b \neq 0$, on tire, de la seconde équation,

$$(2) \qquad y = -\frac{ax + c}{b}$$

et, en portant cette valeur de y dans la première, on a l'équation en x,

$$(3) \qquad (a^2 + b^2)x^2 + 2acx + c^2 - b^2r^2 = 0.$$

Cette équation n'a des racines que si

$$a^2c^2 - (a^2 + b^2)(c^2 - b^2r^2) \geqslant 0,$$

ce qui s'écrit

$$c^2 \leqslant (a^2 + b^2)r^2.$$

Si cette condition est remplie, on a, pour x, deux valeurs x' et x'' et les valeurs correspondantes de y s'obtiennent en remplaçant x par x' et par x'' dans la formule (2). On a donc deux systèmes de solutions :

$$x = x', \quad y = -\frac{ax' + c}{b};$$

et

$$x = x'', \quad y = -\frac{ax'' + c}{b};$$

qui sont confondus en un seul lorsque

$$c^2 = (a^2 + b^2)\, r^2.$$

Remarque. — La résolution du système (1) a une signification géométrique intéressante. Traçons, en effet, dans un plan, deux axes rectangulaires ox et oy. Tous les points, dont les coordonnées x et y vérifient la relation

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

sont sur un cercle, de rayon r, ayant pour centre l'origine O des coordonnées. De même, tous les points, dont les coordonnées vérifient l'équation

$$ax + by + c = 0,$$

sont situés sur une droite. Résoudre le système (1) c'est donc trouver les coordonnées des points communs au cercle et à la droite. La discussion a, alors, une signification simple.

Si
$$c^2 < (a^2 + b^2)\, r^2,$$

la droite coupe le cercle en deux points.

Si
$$c^2 = (a^2 + b^2)\, r^2,$$

la droite n'a plus qu'un point commun avec le cercle, elle le rencontre en deux points confondus, elle est *tangente* au cercle.

Enfin, si
$$c^2 > (a^2 + b^2)\, r^2,$$

la droite ne rencontre pas le cercle.

EXEMPLE IV. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x + y + z = 6, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

Des deux dernières équations on tire :

$$y = 3, \quad z = 3 - x;$$

en portant ces valeurs dans la première, on a :

$$x^2 + 9 + (3 - x)^2 = 14$$

ou

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

ce qui donne, pour x, les deux valeurs 1 et 2. On a donc les deux systèmes de solutions :

$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = 2;$$
$$x = 2, \quad y = 3, \quad z = 1.$$

105. La résolution d'un grand nombre de systèmes d'équations se ramène, en dernière analyse, à la résolution d'équations du premier

et du second degré à une inconnue. Il n'est pas possible de donner un type général de ces systèmes. Dans la majorité des cas, on résoudra les équations les plus simples par rapport à un certain nombre des inconnues et on portera les valeurs de ces inconnues, en fonction des autres, dans les équations restantes. On cherchera à former une équation, à une seule inconnue, que l'on sache résoudre. On se rend aisément compte de la marche à suivre en lisant les exemples suivants :

Exemple V. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 2x^2 - y = 9, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

De la seconde équation on tire :

$$y = 3 - x.$$

En portant dans la première il vient :

$$x^3 + (3 - x)^3 + 2x^2 - 3 + x = 9$$

ou

$$11x^2 - 26x + 15 = 0,$$

ce qui donne, pour x, les deux valeurs 1 et $\frac{15}{11}$. On a donc les deux systèmes de solutions :

$$x = 1, \qquad y = 2;$$
$$x = \frac{15}{11}, \qquad y = \frac{18}{11}.$$

Exemple VI. — Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d, \\ xy = p. \end{cases}$$

En tirant y, de la seconde, on a :

$$y = \frac{p}{x}$$

et, en portant dans la première, on a l'équation bicarrée :

$$ax^4 + (bp - d)\, x^2 + c = 0.$$

Cette équation donne, en général, pour x, quatre valeurs, auxquelles correspondent quatre valeurs pour y. Il y a donc, en général, quatre solutions.

106. Certains systèmes ne peuvent être résolus, au moyen du second degré, que par *un changement d'inconnues*. Par exemple, lorsque, dans un système, deux inconnues x et y entrent *symétriquement*, c'est-à-dire lorsque le système ne change pas quand on permute x avec y et y avec x, il y a, le plus souvent, avantage à changer d'inconnues et à prendre comme nouvelles inconnues $x + y$ et xy. Lorsqu'on connaît $x + y$ et xy, on a x et y comme racines d'une équation du second degré.

Exemple VII. — Soit le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = b^2. \end{cases}$$

Prenons, comme nouvelles inconnues, $x + y$ et xy, et posons :

$$x + y = u, \qquad xy = v,$$

le système devient, en remarquant que

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy,$$
$$\begin{cases} u^2 - 2v = a^2, \\ v = b^2. \end{cases}$$

Ceci donne, tout de suite,

$$v = b^2, \quad u = \pm \sqrt{a^2 + 2b^2},$$

x et y sont donc les racines de l'une des deux équations :

$$x^2 - x\sqrt{a^2 + 2b^2} + b^2 = 0$$

ou

$$x^2 + x\sqrt{a^2 + 2b^2} + b^2 = 0.$$

Il y a donc, en général, quatre solutions.

Remarque I. — Dans cet exemple, on aurait pu avoir, facilement, x et y en calculant $(x + y)$ et $(x - y)$. On a, en effet,

$$\begin{cases} (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + 2b^2, \\ (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = a^2 - 2b^2; \end{cases}$$

d'où, en supposant $(a^2 - 2b^2)$ positif,

$$\begin{cases} x + y = \pm \sqrt{a^2 + 2b^2}, \\ x - y = \pm \sqrt{a^2 - 2b^2}; \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left[\pm \sqrt{a^2 + 2b^2} \pm \sqrt{a^2 - 2b^2}\right], \\ y = \frac{1}{2}\left[\pm \sqrt{a^2 + 2b^2} \mp \sqrt{a^2 - 2b^2}\right]; \end{cases}$$

les signes supérieurs ou inférieurs se correspondant dans les deux expressions de x et y. Il y a donc quatre solutions.

Remarque II. — Si on avait, en suivant la marche habituelle, tiré y de la seconde équation pour porter dans la première, on aurait obtenu, pour x, une équation bicarrée que nous avons ainsi évitée. Il serait intéressant de comparer les expressions de x et y précédentes à celles qu'on obtiendrait en résolvant cette équation bicarrée (Voir, n° 100).

Exemple VIII. — Soit à résoudre le système :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{r} x^2 + y^2 - r^2 = 0, \\ xy + a(x+y) + b^2 = 0. \end{array} \right.$$

Les deux équations étant symétriques en x et y, nous prendrons $x + y$ et xy comme inconnues auxiliaires. Posons :

$$x + y = u, \quad xy = v$$

et le système (1) se transforme en :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^2 - 2v - r^2 = 0, \\ v + au + b^2 = 0, \end{array} \right.$$

dans lequel la seconde équation est du premier degré. Résolvons ce système auxiliaire par la méthode ordinaire (n° 104) et on a :

$$v = -(au + b^2)$$

d'où

$$u^2 + 2au + 2b^2 - r^2 = 0.$$

On a, en général, pour u, deux valeurs u' et u'', auxquelles correspondent deux valeurs pour v : $-(au' + b^2)$ et $-(au'' + b^2)$. Il en résulte que x et y sont les solutions de l'une des deux équations du second degré :

$$x^2 - u'x - (au' + b^2) = 0$$

ou

$$x^2 - u''x - (au'' + b^2) = 0.$$

On a donc, en général, quatre systèmes de solutions.

Remarque. — Si on avait suivi, dans cet exemple, la marche ordinaire, on aurait trouvé, en tirant la valeur de y de la seconde équation du système (1) et en portant dans la première, une équation *complète* du quatrième degré en x :

$$x^4 + 2ax^3 + (2a^2 - r^2)x^2 + 2a(b^2 - r^2)x + b^4 - a^2r^2 = 0,$$

qu'on n'aurait pas su résoudre.

EXERCICES

128. Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 + x + 3y = 1, \\ 2x - y = 1 ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{84} ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 5y^2 + 12x + 92 = 0, \\ 8x - y = 3 ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x - y + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = c\,(x + y - z). \end{cases}$$

129. Trouver deux nombres connaissant leur somme, ou leur différence, a et la différence de leurs carrés b^2. Application : $a = 16$, $b^2 = 32$.

(*Bacc. Sorbonne.*)

130. Résoudre les systèmes suivants :

$$x + \frac{1}{y} = 1, \quad y + \frac{1}{x} = 4 ;$$

$$x + y = 6, \quad (x^2 + y^2)\,(x^3 + y^3) = 1440 ;$$

$$yz = a^2, \ zx = b^2, \ xy = c^2 ;$$

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - x(y + z) = a^2, \\ z^2 + x^2 - y(z + x) = b^2, \\ x^2 + y^2 - z(x + y) = c^2 \end{cases}$$ (SMITH) ;

$$a^n x^m + b^m y^n = 2\sqrt{a^m b^n x^m y^n}, \quad xy = ab$$

(J. BERTRAND) ;

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{61}{\sqrt{xy}} + 1, \quad \sqrt[4]{x^3 y} + \sqrt[4]{xy^3} = 78$$

(J. BERTRAND) ;

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a, \\ x + y + 3\sqrt[3]{bxy} = b \end{cases}$$ (J. BERTRAND) ;

$$\frac{1}{2}\,(x + y) = \sqrt{mx} + \sqrt{nx} = m + n ;$$

$$x + y = \sqrt{2a^2 - x^2} + \sqrt{2a^2 - y^2} = a\sqrt{3}$$

(*Bacc. Bordeaux*).

131. Trouver deux nombres connaissant leur somme a et sachant que le quotient de la somme de leurs cubes par la somme de leur carrés est b.

(*Concours académique, Caen*).

132. Trouver quatre nombres formant une proportion :

1° Sachant que la somme des moyens est a, la somme des extrêmes b, et la somme des carrés des quatre termes k^2. (*Bacc. Nancy*).

2° Connaissant la somme $4\,s$ des quatre nombres, la somme $4q^2$ de leurs carrés et la somme $4c^3$ de leurs cubes.

(J. BERTRAND).

133. Trouver quatre nombres, en progression arithmétique, connaissant leur somme $4a$ et la somme $\frac{1}{b}$ de leurs inverses.

Trouver cinq nombres, en progression arithmétique, connaissant leur somme $5a$ et leur produit b^5.

134. Résoudre le système de n équations à n inconnues :

$$\begin{aligned}
x_1(x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n) + 1.2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 &= 9a^2,\\
x_2(x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_n) + 2.3(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 &= 25a^2,\\
x_3(x_1 + x_2 + x_4 + \dots + x_n) + 3.4(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 &= 49a^2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\\
x_n(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1}) + n(n+1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 &= (2n+1)^2a^2.
\end{aligned}$$

(*Concours général*, 1880).

Il sera bon de ne traiter cette question qu'après avoir lu le chapitre I du livre V, relatif aux progressions arithmétiques.

135. Montrer que les trois équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned}
x^2 &= ax + by,\\
xy &= cx + dy,\\
y^2 &= \frac{cd}{b}x + \left(c - \frac{d(a-d)}{b}\right)y,
\end{aligned}$$

sont compatibles et résoudre ce système (CAYLEY).

CHAPITRE VI

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

107. La marche à suivre pour résoudre un problème du second degré ne diffère pas de celle qu'il faut suivre, et que nous avons indiquée (n°s 82 à 86), pour les problèmes du premier degré.

1° *On choisit l'inconnue ou les inconnues.* Si ces inconnues sont susceptibles d'être portées dans des sens différents, on fait, de suite, une convention sur le signe, s'il y a lieu.

2° *On met le problème en équations.* S'il y a plusieurs hypothèses possibles sur la forme du résultat, on cherche, autant que possible, à former une équation, ou un système unique, servant dans tous les cas.

Si cela n'est pas possible, on examine séparément chacun des cas.

3° *On résout*, de la façon la plus générale, les équations.

4° *On discute* le problème. Ici, la discussion peut présenter quelque chose de particulier qui ne se rencontre pas dans le cas du premier degré; car, comme on parvient à des équations du second degré, il peut arriver que ces équations n'aient pas de solutions. Il y aura donc à examiner cette question en appliquant les méthodes et les résultats que nous avons fait connaître plus haut (Voir les tableaux I et II du n° 92).

EXEMPLE I. — *Trouver la base du système de numération dans lequel le nombre* 86 *s'écrit* 321.

Soit x la base inconnue, on devra avoir :

$$3x^2 + 2x + 1 = 86$$

ou

$$3x^2 + 2x - 85 = 0.$$

Cette équation a deux racines :

$$x = 5, \quad x = -\frac{17}{3}.$$

Or, d'après la nature même de l'énoncé, le problème ne peut admettre qu'une solution *positive* et *entière* : la solution 5 est donc seule acceptable et l'autre est à rejeter.

EXEMPLE II. — [*Division en moyenne et extrême raison*]. — *Étant donnés, sur une droite indéfinie, deux points* A *et* B, *trouver, sur cette droite, un point* M *tel que l'on ait* (*fig.* 32) :

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{AB} \qquad (1).$$

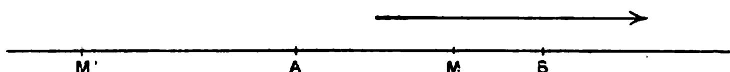


FIG. 32.

Prenons, sur la droite AB, comme sens positif, le sens de A vers B et soit

$$\overline{AB} = a.$$

Prenons $\overline{AM} = x$ pour inconnue. On a :

$$\overline{MB} = \overline{AB} - \overline{AM} = a - x,$$

et la relation (1) donne, de suite, l'équation :

$$x^2 = a(a - x)$$

ou

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Cette équation du second degré a toujours deux racines de signes contraires :

$$x' = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$x'' = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Discussion. — La première solution x' est positive et plus petite que a. A cette solution correspond, par suite, un point M compris entre A et B (*fig.* 32).

La seconde solution x'', étant négative, donne un point M′ à gauche de A. Il y a donc toujours deux points divisant un segment AB en moyenne et extrême raison, et deux seulement, l'un compris entre A et B, l'autre à l'extérieur de AB, du côté de A.

Exemple III. — *Calculer le troisième côté d'un triangle dont on connait deux côtés b et c et la surface* $\frac{1}{2}k^2$.

Soit x le côté inconnu. L'expression de la surface du triangle, en fonction des trois côtés, donne, de suite, l'équation :

$$\frac{1}{4}\sqrt{(b+c+x)(b+c-x)(x+b-c)(x-b+c)} = \frac{1}{2}k^2$$

qui devient, en élevant au carré,

$$[(b+c)^2 - x^2][x^2 - (b-c)^2] = 4k^4$$

ou :

$$(1) \qquad [x^2 - (b+c)^2][x^2 - (b-c)^2] + 4k^4 = 0.$$

En développant, on a l'équation bicarrée :

$$(2) \qquad x^4 - 2x^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2 + 4k^4 = 0.$$

Discussion. — Pour que cette équation ait des racines, il faut, d'abord, que l'on ait :

$$(b^2 + c^2)^2 - (b^2 - c^2)^2 - 4k^4 \geqslant 0$$

ou

$$b^2c^2 - k^4 \geqslant 0,$$

$$k^2 \leqslant bc.$$

Si cette condition est remplie, l'équation bicarrée a quatre racines, car la résolvante a deux racines positives, puisque la somme $2(b^2 + c^2)$ et le produit $(b^2 - c^2)^2 + 4k^4$ de ses racines sont positifs.

D'après sa nature même, le problème n'admet pour solution que des valeurs positives; on ne devra donc prendre, pour x, que les valeurs positives.

De plus, on devra pouvoir construire un triangle avec les trois longueurs b, c et x. Le côté x devra donc être plus grand que la différence et plus petit que la somme des deux autres. On devra avoir :

$$(b-c)^2 < x^2 < (b+c)^2.$$

Pour voir si ces inégalités ont lieu, il faut comparer $(b-c)^2$ et $(b+c)^2$ aux racines de la résolvante de l'équation (2). Pour cela, substituons $(b-c)^2$ et $(b+c)^2$, dans le premier membre, à x^2 ; la forme (1) montre, de suite, que, dans les deux cas, le résultat de substitution est $4k^4$, donc positif. Les deux quantités $(b-c)^2$ et $(b+c)^2$ ne sont donc pas comprises entre les racines de la résolvante. D'ailleurs, comme la demi-somme b^2+c^2 des racines de la résolvante est comprise entre $(b-c)^2$ et $(b+c)^2$, il en est de même de ses deux racines.

La seule condition à remplir est donc

$$k^2 \leqslant bc.$$

Si elle est satisfaite, le problème admet deux solutions, obtenues en prenant, pour x, les deux racines positives de l'équation (2) :

$$x = \sqrt{b^2 + c^2 \pm 2\sqrt{b^2c^2 - k^4}}.$$

Remarque I. — A propos de ce problème, on peut présenter une remarque qui sera utile dans d'autres cas.

Pour exprimer qu'avec trois nombres a, b, c on peut former un triangle, il suffit d'écrire que les trois nombres sont positifs et que la quantité sous le radical dans l'expression bien connue de la surface

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

est positive.

En effet, si les trois nombres sont positifs et si a est le plus grand, les trois facteurs p, $p-b$, $p-c$ sont positifs. La quantité sous le radical a donc le signe de $p-a$; et elle est positive ou négative suivant que le plus grand côté a est plus petit ou plus grand que la somme des deux autres.

Dans le problème précédent, la surface étant donnée, il suffisait, on le voit, d'exprimer que les trois côtés existaient et étaient positifs.

Remarque II. — On sait que l'angle opposé à un côté d'un triangle est aigu, droit ou obtus, suivant que le carré de ce côté est inférieur, égal ou supérieur à la somme des carrés des deux autres côtés. Lorsque $k^2 < bc$, il y a deux solutions distinctes x' et x''. La demi-somme des racines x'^2 et x''^2 de la résolvante étant b^2+c^2, on a :

$$x'^2 < b^2 + c^2 < x''^2.$$

Dans le triangle, correspondant à la solution x', l'angle opposé à ce côté est donc aigu; et dans le triangle, correspondant à x'', l'angle opposé à ce côté est obtus [1].

Lorsque $k^2 = bc$, les deux solutions sont confondues en une seule, pour laquelle on a :

$$x^2 = b^2 + c^2.$$

Le triangle correspondant est donc rectangle.

(1) Il serait même aisé de voir que les deux angles des deux triangles sont *supplémentaires*.

Remarque III. — Puisque le problème n'a de solution que si

$$\frac{1}{2} k^2 \leqslant \frac{1}{2} bc,$$

ceci nous prouve que tous les triangles, qui ont deux côtés communs, ont une surface au plus égale à la moitié du produit de ces deux côtés. En d'autres termes, parmi tous les triangles qui ont deux côtés constants et le troisième côté variable, celui qui a la plus grande surface est celui dont la surface est égale à la moitié du produit des deux côtés constants ; lequel est le triangle rectangle.

108. Après ces quelques exemples de problèmes à une seule inconnue, nous traiterons quelques problèmes, plus compliqués, à plusieurs inconnues.

Dans de tels problèmes, lorsqu'il y a plusieurs données littérales, on trouve, souvent, dans la discussion, plusieurs conditions pour que le problème soit possible. Ces conditions ne sont pas toujours toutes nécessaires, car il arrive, fréquemment, que certaines d'entre elles sont des conséquences des autres; ou, encore, dans certains cas, les conditions sont incompatibles entre elles. Pour apercevoir ces particularités, il sera bon, en général, de résoudre toutes ces inégalités par rapport à une même quantité qu'on appelle le *paramètre de la discussion*. Le choix du paramètre de la discussion est arbitraire, et dépend de l'ingéniosité du calculateur. En général, on prend, de préférence, pour ce paramètre, une quantité par rapport à laquelle toutes les inégalités soient faciles à résoudre.

Exemple IV. — (*Problème de Pappus.*) *Étant donné un angle droit* xoy (fig. 33) *et un point* A, *situé sur la bissectrice de cet angle, mener par le point* A *une droite* PM *telle que le segment* PM, *intercepté par l'angle* xoy, *sur cette droite, ait une longueur donnée* l.

Prenons, sur ox et oy, des sens positifs tels que A se trouve dans l'angle formé par les deux directions positives. Soit, alors,

$$\overline{OM} = x, \qquad \overline{OP} = y$$

les inconnues, et désignons par a la valeur commune des coordonnées du point A :

$$\overline{OB} = \overline{BA} = a.$$

Dans le triangle rectangle OMP on a :

$$\overline{PM}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OP}^2$$

d'où

$$l^2 = x^2 + y^2 \qquad (1).$$

L'équation de la droite PM est, en désignant par X et Y les coordonnées d'un point quelconque de la droite (Voir nos 68 et 69),

$$\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}-1=0.$$

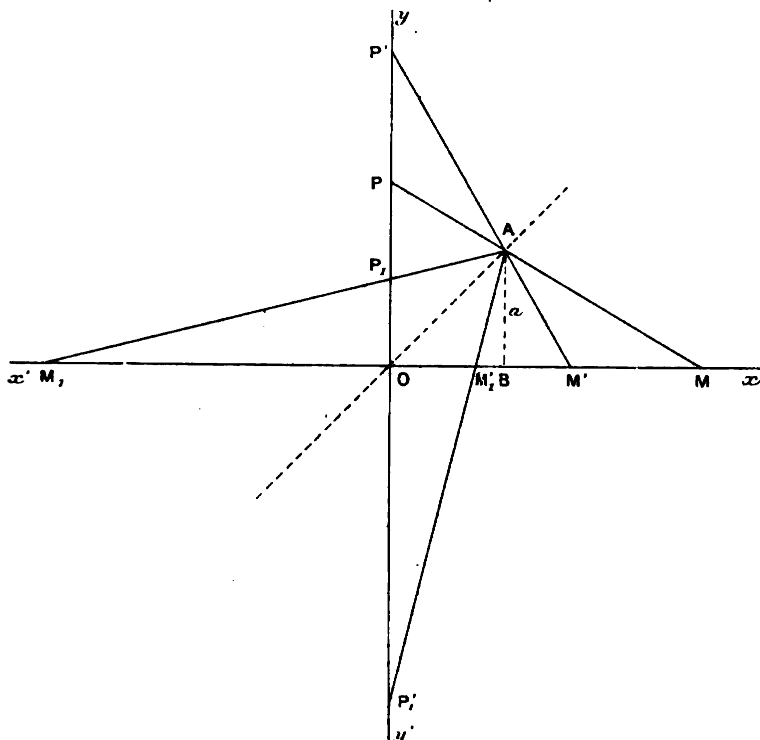


FIG. 33.

Écrivons que cette droite passe le point A, c'est-à-dire que son équation est vérifiée pour

$$X=a, \quad Y=a,$$

et on a :

$$\frac{a}{x}+\frac{a}{y}-1=0 \qquad (2).$$

Les équations du problème sont donc les deux équations (1) et (2) qui s'écrivent :

$$\begin{cases} x^2+y^2=l^2 & (1) \\ xy-a(x+y)=0 & (2). \end{cases}$$

Pour résoudre ces deux équations nous prendrons, puisqu'elles sont symétriques en x et y (n° 106), $x+y$ et xy pour nouvelles inconnues et nous poserons :

$$xy = u, \quad x + y = v;$$

nous aurons, alors, le système :

$$\begin{cases} v^2 - 2u = l^2, \\ u - av = 0. \end{cases}$$

On en tire :

$$u = av \qquad (3)$$

et

$$v^2 - 2av - l^2 = 0 \qquad (4);$$

v sera donc fourni par l'équation (4), qui donne :

$$v = a \pm \sqrt{a^2 + l^2}$$

et, aux deux valeurs de v, correspondent deux valeurs pour u :

$$u = a\left[a \pm \sqrt{a^2 + l^2}\right].$$

Connaissant u et v, on aura x et y en prenant pour x l'une des racines et pour y l'autre racine de l'équation du second degré :

$$x^2 - vx + u = 0 \qquad (5).$$

Comme, à chaque couple de valeurs de u et v correspondent deux solutions, il y a, en général, quatre solutions.

Discussion. — Il y a toujours deux valeurs pour v : l'une négative v', l'autre positive v''. A ces deux valeurs correspondent, respectivement, pour u, deux valeurs u' (négative) et u'' (positive). Pour qu'il y ait des valeurs pour x et y, il faut que l'équation (5) ait des racines, ce qui donne :

$$v^2 - 4u \geqslant 0$$

ou, à cause de (3),

$$v^2 - 4av \geqslant 0,$$
$$v(v - 4a) \geqslant 0.$$

Pour $v = v'$, la racine négative, cette inégalité est vérifiée. A la racine négative correspondent donc toujours deux solutions.

Pour que l'inégalité soit vérifiée par $v = v''$, il faut que l'on ait :

$$v'' > 4a;$$

$4a$ doit donc être plus petit que la racine positive, c'est-à-dire *compris* entre les racines. Il faut donc, qu'en substituant $4a$ dans le premier membre de l'équation (4), le résultat soit négatif. On doit donc avoir :

$$8a^2 - l^2 \leqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$l \geqslant 2a\sqrt{2}.$$

En résumé, lorsque $l > 2a\sqrt{2}$, il y a quatre solutions ;

Lorsque $l < 2a\sqrt{2}$, il n'y a que deux solutions;

Lorsque $l = 2a\sqrt{2}$, il y a deux solutions, plus une solution double.

Il nous reste, pour terminer la discussion, à examiner la forme géométrique des solutions. A la racine positive v'', correspond, pour u, une valeur également positive u''. L'équation (5) a alors deux racines positives $\left(\text{si } l > 2a\sqrt{2}\right)$. Les deux valeurs de x et y étant positives, on a deux solutions de la forme MP et M'P' (*fig.* 33) où le segment de longueur l est compris dans l'angle xoy. Il faut, d'ailleurs, remarquer que ces deux solutions sont symétriques par rapport à la bissectrice OA de l'angle xoy, car, si α et β sont les racines de l'équation (5), on obtient les deux solutions en prenant

$$\overline{OM} = x = \alpha, \qquad \overline{OP} = y = \beta;$$

et

$$\overline{OM'} = x = \beta, \qquad \overline{OP'} = y = \alpha.$$

On a donc:

$$\overline{OM} = \overline{OP'} \quad \text{et} \quad \overline{OM'} = \overline{OP}.$$

A la racine négative v', correspond, pour u, une valeur u' également négative. L'équation (5), correspondante, a, alors, deux racines de signes contraires. Soient α et $-\beta$ ces deux racines. On obtient deux solutions en prenant :

$$\overline{OM_1} = x = -\beta, \qquad \overline{OP_1} = y = \alpha;$$

et

$$\overline{OM'_1} = x = \alpha, \qquad \overline{OP'_1} = y = -\beta.$$

Dans la première solution, M_1 est sur ox' et P_1 sur oy; M_1P_1 est dans l'angle $x'oy$. Dans la seconde solution, M'_1 est sur ox, P'_1 sur oy' ; et, par suite, $M'_1P'_1$ est dans l'angle xoy' (*fig.* 33).

Ces deux solutions sont encore symétriques, par rapport à la bissectrice OA, puisque

$$\overline{OM_1} = \overline{OP'_1} \quad \text{et} \quad \overline{OM'_1} = \overline{OP_1}.$$

Remarque. — Les deux solutions situées dans les angles xoy' et $x'oy$ existent toujours. Au contraire, les deux solutions situées dans l'angle xoy n'existent que si $l > 2a\sqrt{2}$. Lorsque

$$l = 2a\sqrt{2},$$

ces deux solutions sont confondues en une seule; on a $x = y$ et l'unique solution est formée par une droite perpendiculaire, en A, à OA. Ceci nous prouve que, si on mène par le point A diverses sécantes, les portions de ces sécantes, interceptées par l'angle xoy, sont toutes supérieures ou égales à $2a\sqrt{2}$, c'est-à-dire à 2OA. La corde MP, perpendiculaire en A à OA est, la corde *minima*, puisqu'il n'y en a pas qui soit plus petite qu'elle.

EXEMPLE V. — *Inscrire dans une sphère, de rayon donné* **r**, *un cylindre dont la surface totale soit équivalente à un cercle de rayon donné* **a**.

Coupons la sphère et le cylindre par un plan passant par l'axe du cylindre. Ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle O et le cylindre suivant le rectangle générateur ABCD, inscrit dans le grand cercle (*fig.* 34). Prenons, pour inconnues, le rayon, $AI = x$, de la base du cylindre et la demi-hauteur, $OI = y$, du cylindre.

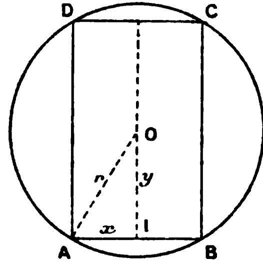


FIG. 34.

Dans le triangle rectangle AOI on a :

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

Exprimons que la surface totale du cylindre est égale à πa^2 et nous avons la seconde équation :

$$(2) \qquad 2x^2 + 4xy = a^2.$$

De l'équation (2) on tire

$$(3) \qquad y = \frac{a^2 - 2x^2}{4x}$$

et, en portant dans la première, on a, pour déterminer x, l'équation bicarrée :

$$(4) \qquad 20x^4 - 4(a^2 + 4r^2)\, x^2 + a^4 = 0.$$

Les valeurs de x, étant fournies par cette équation, on aura les valeurs correspondantes de y en portant celles de x dans l'équation (3).

Discussion. — Pour que l'équation bicarrée (4) ait des solutions, il faut, d'abord, que l'on ait :

$$4(a^2 + 4r^2)^2 - 20a^4 \geqslant 0$$

ou

$$4\left[a^2 + 4r^2 - a^2\sqrt{5}\right]\left[a^2 + 4r^2 + a^2\sqrt{5}\right] \geqslant 0.$$

Comme le dernier facteur du premier membre est certainement positif, cette condition se réduit à

$$a^2 + 4r^2 - a^2\sqrt{5} \geqslant 0$$

ou, en résolvant par rapport à a^2, que nous prenons pour paramètre de discussion,

$$(5) \qquad a^2 \leqslant r^2\left(\sqrt{5} + 1\right).$$

Cette condition remplie, l'équation bicarrée aura quatre racines, car la

résolvante a ses deux racines positives. On ne devra prendre, évidemment, pour x, que les deux racines positives :

$$x' = \sqrt{2\,(a^2 + 4r^2) - 2\,\sqrt{(a^2 + 4r^2)^2 - 5a^4}}$$

$$x'' = \sqrt{2\,(a^2 + 4r^2) + 2\,\sqrt{(a^2 + 4r^2)^2 - 5a^4}}.$$

Il faut, encore, que les valeurs correspondantes de y soient positives. Or, pour que y soit positif, il faut que x^2 soit plus petit que $\frac{a^2}{2}$. Comparons donc $\frac{a^2}{2}$ aux racines de la résolvante de l'équation (4) et, pour cela, remplaçons x^2 par $\frac{a^2}{2}$ dans le premier membre. Le résultat de substitution est :

$$4a^2\,(a^2 - 2r^2).$$

Ceci nous conduit à distinguer deux cas :

1° Si $a^2 > 2r^2$, condition qui est compatible avec la condition (5), $\frac{a^2}{2}$ n'est pas compris entre les racines de la résolvante. D'ailleurs, on a

$$\frac{a^2}{2} > \frac{a^2 + 4r^2}{10},$$

car cette inégalité s'écrit :

$$a^2 > r^2$$

et a lieu, certainement, puisque a^2 est plus grand que $2r^2$. Donc, $\frac{a^2}{2}$ étant plus grand que la demi-somme des racines de la résolvante, on a :

$$x'^2 < x''^2 < \frac{a^2}{2}$$

et les deux valeurs de y sont positives. Le problème a, alors, *deux solutions*, car les valeurs trouvées pour x et y sont positives et, certainement, plus petites que r, puisqu'elles vérifient l'équation (1).

2° Si $a^2 < 2r^2$, $\frac{a^2}{2}$ est compris entre les racines de la résolvante. La plus petite solution x' est seule acceptable et le problème n'a plus qu'une seule solution.

En résumé :

1° Si $$a^2 > r^2\left(\sqrt{5} + 1\right),$$

il n'y a pas de solutions.

2° Si $$2r^2 < a^2 < r^2\left(\sqrt{5}+1\right),$$

il y a deux solutions.

3° Si $$a^2 < 2r^2,$$

il n'y a qu'une solution, obtenue en prenant pour x la plus petite valeur positive.

Remarque. — Dans le cas particulier où :

$$a^2 = r^2\left(\sqrt{5}+1\right),$$

la résolvante a ses deux racines égales. Les deux solutions sont confondues.

D'ailleurs, puisque le problème n'a des solutions que si

$$a^2 \leqslant r^2\left(\sqrt{5}+1\right),$$

ou $$\pi a^2 \leqslant \pi r^2\left(\sqrt{5}+1\right),$$

ceci nous prouve que la surface totale πa^2 du cylindre ne peut pas dépasser la valeur $\pi r^2\left(\sqrt{5}+1\right)$. Il en résulte que : *parmi tous les cylindres inscrits dans une sphère, de rayon r, celui qui a la plus grande surface totale est celui dont la surface est égale à $\pi r^2\left(\sqrt{5}+1\right)$.*

Dans le second cas particulier, où :

$$a^2 = 2r^2,$$

on trouve, pour y, une valeur nulle. Le cylindre a, alors, une hauteur nulle; il est aplati suivant un grand cercle de la sphère.

Résumé. — Les exemples qui précèdent suffisent pour faire voir la marche à suivre dans la résolution d'un problème du second degré.

Il ne sera, cependant, pas inutile de résumer, en quelques lignes, la manière de conduire la discussion.

Tout problème du second degré se ramène, en dernière analyse, à la résolution d'une équation du second degré à une inconnue, que nous appellerons x. Il faudra, en général, exprimer d'abord que cette équation, en x, a des solutions. Ceci fait, deux cas peuvent se présenter :

1° Il n'y a pas de conditions restrictives pour l'inconnue x. Toute solution est, alors, acceptable et la discussion se réduira à examiner la forme qu'affecte le résultat, si plusieurs hypothèses sont possibles. C'est ce qui avait lieu dans l'Exemple II.

2° L'inconnue x doit satisfaire certaines conditions restrictives qui proviennent : soit de la nature même de l'énoncé, soit des

conditions d'existence des autres inconnues. Ces conditions restrictives se traduiront toujours par des inégalités que l'inconnue x devra vérifier. Ces inégalités, résolues par rapport à x, donneront des limites supérieures ou inférieures pour cette inconnue. On sera donc ramené, en somme, à exprimer que l'inconnue x vérifie des inégalités de la forme suivante :

$$x < \alpha, \quad x < \alpha', \quad x < \alpha'', \quad \ldots$$
$$x > \beta, \quad x > \beta', \quad x > \beta'', \quad \ldots$$

Il est facile de voir que toutes ces inégalités se ramèneront toujours à *deux*. Car, si α est le plus petit de tous les nombres α, α', α'',... et β le plus grand des nombres β, β', β'', ..., il suffira, pour que toutes les inégalités précédentes soient satisfaites, que l'on ait :

$$\beta < x < \alpha.$$

Donc, en dernier ressort, on n'aura jamais qu'à comparer la solution x, lorsqu'elle existe, à *un* ou *deux* nombres. Pour faire cette comparaison, on substituera ce ou ces nombres dans le premier membre de l'équation en x et on examinera les signes des substitutions. Nous énumérons, un peu plus loin, les divers cas qui pourront se présenter.

Il est bon de remarquer, de suite, que, si les données sont littérales, la comparaison des nombres α, α', α'', ..., ou des nombres β, β', β'', ... pourra donner lieu à diverses hypothèses. Cette comparaison pourra donc conduire à une discussion préliminaire. Cette discussion faite, on opèrera, pour chacun des cas qui se présenteront, comme nous venons de le dire.

Dans le second cas, celui où il y a des conditions restrictives, il pourra y avoir *souvent* avantage à procéder un peu différemment. Au lieu de commencer, comme nous l'avons conseillé, par chercher la condition pour que les racines, en x, existent, il pourra être préférable de faire, d'abord, les substitutions des limites α et β dans le premier membre de l'équation. En effet, si l'*une* de ces substitutions était du signe contraire au signe du terme en x^2, on pourrait affirmer que les racines existent et sont distinctes et il serait inutile de former le discriminant.

Voici, alors, les divers cas qui pourront se présenter.

Si les résultats des substitutions de α et β sont de signes contraires, les racines en x existent et *une seule* est comprise entre α et β (n° 95, *Rem.*). Il n'y a qu'une solution acceptable.

Si les résultats des substitutions sont de même signe, mais du signe

contraire à celui du terme en x^2, l'équation a deux racines distinctes (n° 95) et aucune d'elles n'est comprise entre α et β. Le problème n'a pas de solutions.

Si les résultats des substitutions de α et β sont de même signe, et du signe du terme en x^2, on ne peut plus rien affirmer, *a priori*, sur l'existence des racines. C'est dans ce cas seulement qu'il faudra recourir au discriminant. Si ce discriminant est négatif, il n'y a pas de solutions. S'il est positif ou nul, il y aura des racines et, ou bien les deux racines seront comprises entre α et β, ou bien aucune d'elles ne sera comprise entre α et β. On distinguera ces deux cas en regardant si la demi-somme des racines est ou n'est pas comprise entre α et β.

Nous terminerons en donnant un exemple où la remarque précédente trouvera son utilité.

EXEMPLE VI. — *Étant donné un triangle, trouver une longueur telle, qu'en augmentant ou en diminuant chacun des côtés de cette longueur, on puisse, avec les longueurs ainsi obtenues, construire un triangle rectangle.*

Soient a, b, c les longueurs des trois côtés du triangle et supposons :

$$a > b > c.$$

Désignons par x la longueur cherchée, x étant positif ou négatif suivant que la longueur devra être ajoutée ou retranchée. Dans tous les cas, les longueurs des trois côtés du nouveau triangle seront $a + x$, $b + x$, $c + x$ et on aura, évidemment,

$$a + x > b + x > c + x,$$

ce qui prouve que $a + x$ devra être l'hypoténuse. Pour qu'avec les trois longueurs $a + x$, $b + x$, $c + x$, on puisse construire un triangle rectangle, il sera donc nécessaire et suffisant que ces trois nombres soient positifs et que l'on ait :

$$(a + x)^2 = (b + x)^2 + (c + x)^2.$$

Ceci donne, pour déterminer x, l'équation :

$$x^2 + 2(b + c - a)x + b^2 + c^2 - a^2 = 0 \qquad (1).$$

Discussion. — Pour que le problème admette une solution, il faut et il suffit qu'il existe une valeur de x telle que ces trois nombres $a + x$, $b + x$, $c + x$ soient positifs. Pour cela, il suffit que l'on ait :

$$x > -c,$$

puisque c est le plus petit côté. Substituons, immédiatement, $-c$ dans le premier membre de l'équation (1) et nous trouvons :

$$(a - b)(2c - a - b).$$

Or, a étant plus grand que b, $a - b$ est positif; d'autre part, c étant le plus petit côté, $2c - a - b$ est négatif. Le résultat de substitution est négatif. On peut donc affirmer que l'équation (1) a toujours deux racines, dont une seule, la plus grande, est supérieure à $-c$ et c'est la seule acceptable. Le problème a donc toujours une solution et une seule. On voit que, dans cette discussion, le calcul du discriminant était inutile.

Il reste, pour terminer la discussion, à reconnaître dans quel cas on ajoute ou dans quel cas on retranche la longueur obtenue. Ceci revient à reconnaître le signe de la racine acceptable. Or, la somme $-2(b + c - a)$ des racines étant toujours négative (car dans un triangle un côté a est plus petit que la somme $b + c$ des deux autres côtés), la plus grande racine a un signe contraire à celui du produit.

Donc, si

$$a^2 < b^2 + c^2,$$

c'est-à-dire si l'angle opposé au côté a est aigu, la racine acceptable est positive. On *ajoute* la longueur.

Si

$$a^2 > b^2 + c^2,$$

c'est-à-dire si l'angle opposé au côté a est obtus, la racine acceptable est négative. On *retranche* la longueur.

Enfin, si

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

la plus grande racine est nulle, ce qui était à prévoir puisque le triangle donné est, lui-même, rectangle.

EXERCICES

136. Une personne, ayant acheté un objet, le revend 21 francs. Elle perd autant pour cent sur l'objet qu'il lui a coûté de francs. Quelle somme perd elle ?

137. Une lampe et une bougie sont distantes l'une de l'autre de $4^m,15$. On sait que les intensités de ces deux lumières sont entre elles comme 6 et 1. A quelle distance de la lampe, sur la ligne droite qui joint les deux lumières, doit-on placer un écran pour qu'il soit également éclairé par l'une et par l'autre?

(*Bacc. Paris*).

(On rappelle que l'éclairement d'un objet par une source lumineuse est proportionnel au carré de sa distance à la source.)

138. Trouver, sur une ligne droite PQ, un point M également éclairé par deux lumières A et B dont les intensités sont i et i'. On donne :

$$AP = a, \quad BQ = b, \quad PQ = d,$$

P et Q étant les pieds des perpendiculaires abaissées de A et B sur PQ.

(J. Bertrand).

139. Calculer la profondeur d'un puits, sachant qu'il s'est écoulé un nombre n de secondes entre l'instant où on a laissé tomber une pierre dans le puits et celui où l'on a entendu le bruit qu'elle a fait, en frappant le fond.

On rappelle que :

1° L'espace e, parcouru par un corps pesant, abandonné en chute libre, est donné par la formule :

$$e = \frac{1}{2} g t^2,$$

où $g = 9{,}80896$ et où le temps t est évalué en secondes (e est évalué en mètres).

2° Le son se propage dans l'air, d'un mouvement uniforme, avec une vitesse moyenne de 340 mètres à la seconde.

Application numérique : $n = 37$ secondes.

140. Inscrire dans un demi-cercle un trapèze de périmètre donné, $2p$.

141. Circonscrire à une circonférence donnée un trapèze de périmètre donné $2p$; ou de surface donnée $\frac{1}{2} k^2$.

142. Étant donné un triangle rectangle ABC, trouver, sur l'hypoténuse BC, un point M tel que :

1° La somme des carrés de ses distances aux trois sommets soit égale à k^2.

2° Le produit de ses distances aux deux côtés de l'angle droit soit égal à k^2.

3° La somme des carrés de ses distances aux deux côtés de l'angle droit soit égale à k^2.

(On désignera par b et c les longueurs des côtés de l'angle droit et on discutera ces trois problèmes).

143. Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle connaissant :

1° L'hypoténuse a et la somme l des deux autres côtés.

2° L'hypoténuse a et la hauteur h relative à l'hypoténuse.

3° Le périmètre $2p$ et la hauteur h relative à l'hypoténuse.

4° Le périmètre $2p$ et le rayon r du cercle inscrit (Le problème serait le même si, au lieu de r ou $2p$, on donnait l'aire $\frac{1}{2} k^2$ du triangle).

5° Un côté b de l'angle droit et la somme m^2 des carrés des projections des deux côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse.

(*Oral, Saint-Cyr*).

6° L'hypoténuse a et la bissectrice β de l'angle droit.

7° Le périmètre $2p$ et le rapport m du volume engendré par le triangle, tournant autour de l'hypoténuse, à la somme des volumes qu'il engendre en tournant, successivement, autour des deux côtés de l'angle droit (Examiner le cas particulier de $m = 1$).

8° Le volume $\frac{1}{3} \pi a^3$, engendré par le triangle en tournant autour de l'hypoténuse, et la somme $\frac{1}{8} \pi b^3$ des volumes engendrés par le triangle en tournant, successivement, autour de chacun des côtés de l'angle droit (L'équation que satisfait la longueur de l'hypoténuse est une équation trinôme du 6me degré).

On discutera ces divers problèmes.

144. Étant donné un demi-cercle, de diamètre AB, trouver, sur ce demi-cercle, un point M tel que, si P désigne la projection du point M sur AB,

1° On ait :

$$\mathrm{MP} + 2\,\mathrm{AP} = l.$$

2° On ait :

$$4\,\overline{\mathrm{MP}}^2 + \overline{\mathrm{AP}}^2 = k^2.$$

3° On ait :

$$\mathrm{AM} + \mathrm{PB} = l.$$

4° La surface engendrée par l'arc de cercle AM, augmentée du double de la surface du cercle engendré par la droite PM, lorsque la figure tourne autour de AB, soit égale à l'aire d'un cercle de rayon donné a.

(*Questions posées à l'examen oral d'admission à Saint-Cyr*).

145. Inscrire dans un cercle, de rayon donné R, un triangle isocèle tel que la somme de sa base et de sa hauteur soit égale à a. — Discuter.

146. Étant donnée une sphère, de rayon R, déterminer à quelle distance x du centre de la sphère il faut mener un plan sécant tel que :

1° L'aire de la section soit égale à la différence des aires des deux calottes que le plan détermine sur la sphère.

2° La somme de l'aire de la section et de l'aire de l'une des deux calottes soit égale à l'aire d'un cercle, de rayon donné a.

3° La somme de la surface latérale du cône circonscrit à la sphère, ayant pour base la section, et de m fois l'aire de la plus grande des deux calottes que le plan détermine sur la sphère, soit égale à l'aire d'un cercle, de rayon donné a.

(*Examen du professorat des Écoles normales*).

147. Couper une sphère donnée, de rayon R, par deux plans parallèles tels que l'aire de la zone comprise entre les deux plans ait une valeur donnée πa^2 et que le volume du segment sphérique, compris entre les deux plans, ait une valeur donnée $\frac{1}{3}\pi b^3$. — Discuter. En conclure le maximum du volume du segment, pour une valeur donnée πa^2 de l'aire de la zone.

148. On donne un cercle, de rayon R, et deux tangentes rectangulaires ox et oy à ce cercle. Mener une troisième tangente au cercle telle que la triangle OAB, qu'elle forme avec les deux premières, ait une aire donnée a^2 (On examinera les deux cas où le cercle est inscrit ou exinscrit au triangle OAB). — Discuter.

149. Étant donné un triangle isocèle ABC (AB = AC), trouver un point E sur AB, un point F sur AC et deux points D et G, sur la base BC, tels que le pentagone AFGDE ait ses cinq côtés égaux. — Discuter (Le pentagone n'est pas, nécessairement, convexe).

150. Étant donné un triangle quelconque ABC et un point P sur BC, ou sur son prolongement, on prend, sur le côté AC, le sens de A vers C comme sens positif et, sur le côté AB, le sens de B vers A pour sens positif. On demande de mener, par le point P, une sécante PQR qui coupe AB en Q et AC en R et telle que l'on ait, entre les *segments* $\overline{AR}$ et $\overline{BQ}$, la relation

$$\overline{AR} \times \overline{BQ} = m,$$

m étant un nombre donné, positif ou négatif.

151. Calculer les trois côtés d'un triangle connaissant :

1° Le rayon R du cercle circonscrit, la somme $2s$ de deux côtés et la hauteur h relative au troisième côté (On aurait un problème identique si, au lieu de connaître R ou h, on connaissait le produit k^2 des deux côtés dont on connaît la somme).

2° La différence d de deux côtés et leur moyenne géométrique k, ainsi que l'aire $\frac{1}{2}a^2$ du triangle. — Discuter.

3° Le périmètre $2p$, la moyenne géométrique k de deux côtés et la longueur β de la bissectrice de l'angle que forment ces deux côtés. — Discuter.

Faire le même problème en supposant que β soit la longueur de la bissectrice de l'angle extérieur du triangle.

4° La somme $2s$ de deux côtés, l'aire $\frac{1}{2}k^2$ du triangle et le côté a du carré inscrit qui repose sur le troisième côté. — Discuter.

5° Le périmètre $2p$, l'aire $\frac{1}{2}k^2$ du triangle et la longueur β de l'une des bissectrices. — Discuter.

Examiner le cas où on donne la longueur β d'une bissectrice d'un angle extérieur.

6° Les volumes $\frac{4}{3}\pi\alpha^3$, $\frac{4}{3}\pi\beta^3$, $\frac{4}{3}\pi\gamma^3$ engendrés par le triangle lorsqu'on le fait tourner, successivement, autour de chacun de ses trois côtés.

(J. BERTRAND).

7° Un côté a, la somme l des deux autres côtés et la somme k^2 des carrés des longueurs des bissectrices, soit des angles intérieurs adjacents au côté a, soit des angles extérieurs adjacents au même côté.

Discuter dans le cas particulier où $l = 4a$.

(*Concours d'agrégation*, 1880).

152. Calculer la hauteur et les bases d'un trapèze rectangle connaissant : la longueur l du côté oblique, l'aire a^2 du trapèze et le volume $\frac{4}{3}\pi b^3$ engendré par la révolution du trapèze autour de son côté oblique. — Discuter. Maximum et minimum de b^3. Cas particuliers : $l = a$ et $l = 3a$.

(*Concours d'agrégation*, 1883).

153. Dans les angles d'un triangle ABC sont inscrits trois cercles tangents entre eux, deux à deux, et dont les rayons sont R, R′ et R″. Les points de contact de ces cercles avec les côtés déterminent, sur ces côtés, des segments dont les longueurs, comptées à partir des sommets, sont α, β, γ.

1° Trouver la relation qui existe entre R, R′, R″ et α, β, γ.

2° Exprimer, à l'aide de R, R′, R″, les valeurs des segments des côtés compris entre les points de contact du cercle inscrit dans le triangle et les points de contact des cercles considérés.

3° Calculer le rayon r du cercle inscrit dans le triangle ABC, en fonction des rayons R, R′, R″, et démontrer que l'on a :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R'}} + \frac{1}{\sqrt{R''}}\right)r^2 - 2\left(\sqrt{R} + \sqrt{R'} + \sqrt{R''}\right)r + 2\sqrt{RR'R''} = 0.$$

(*Agrégation de l'enseignement spécial* 1888).

154. Calculer la raison d'une progression géométrique de *quatre* termes connaissant leur somme ma et la somme de leurs carrés a^2.

(On dit que quatre nombres α, β, γ, δ forment une progression géométrique, lorsqu'on a :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

La valeur commune de ces rapports est ce qu'on appelle la *raison* de la progression.) (Voir n° 131.)

155. Calculer la raison d'une progression géométrique de *trois* termes connaissant leur somme ma et la somme de leurs carrés a^2.

156. Inscrire dans une sphère donnée, de rayon R, un cône tel que le double de la surface latérale augmenté de l'aire de la base soit égal à la surface de la sphère.

En prenant pour inconnue le quotient de la distance du centre de la sphère à la base du cône par le rayon R de la sphère, on trouve une équation réciproque par rapport à (— 1) (Voir l'exercice 125).

LIVRE IV

DÉRIVÉES,
VARIATION DES FONCTIONS

CHAPITRE PREMIER

DES LIMITES

109. Définitions. — I. On dit qu'une fonction y, de la variable x, a pour *limite* b, lorsque x *tend* vers a, si, à tout nombre positif ε (d'ailleurs aussi petit qu'on le voudra), on peut faire correspondre un nombre positif α tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité

$$|x - a| < \alpha \text{ (}^1\text{)},$$

les valeurs correspondantes de y vérifient l'inégalité

$$|y - b| < \varepsilon,$$

sauf, peut-être, pour $x = a$.

Exemples. — D'après cette définition, on dit que y a pour limite *zéro*, quand x tend vers a, si, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre positif α tel que l'inégalité

$$|x - a| < \alpha$$

entraîne l'inégalité

$$|y| < \varepsilon.$$

Ainsi, toute puissance positive de x a pour limite zéro, quand x tend vers zéro; ce qu'on exprime plus brièvement en disant que *toute puissance positive de* x *tend vers zéro en même temps que* x.

(1) Rappelons que la notation $|\ |$ indique la *valeur absolue* de la quantité placée entre les deux barres.

Soit, en effet, x^n une puissance positive de x ($n > 0$); si on a

$$|x| < \varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

on aura, évidemment,

$$|x^n| < \varepsilon.$$

Le nombre α est donc, ici, égal à $\varepsilon^{\frac{1}{n}}$.

Remarque. — La définition précédente n'est, au fond, qu'une façon d'exprimer, sous une forme *précise*, le fait suivant : on peut donner à la variable x des valeurs assez voisines de la valeur a pour que les valeurs correspondantes de y diffèrent d'aussi peu qu'on le voudra de la valeur b (puisqu'on peut choisir ε aussi petit qu'on le voudra).

Lorsqu'une quantité y a pour limite b, elle finit par être supérieure à tout nombre fixe inférieur à b et par être inférieure à tout nombre fixe supérieur à b; car elle finit par être comprise entre $b + \varepsilon$ et $b - \varepsilon$, ε pouvant être aussi petit qu'on le veut.

II. On dit qu'une fonction y, de la variable x, *croît indéfiniment*, quand x *tend* vers a, si, à tout nombre positif A (d'ailleurs aussi grand qu'on le voudra), on peut faire correspondre un nombre positif α tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité

$$|x - a| < \alpha,$$

les valeurs correspondantes de y vérifient l'inégalité

$$|y| > A,$$

sauf, peut-être, pour $x = a$.

Lorsqu'une quantité y croît indéfiniment, son inverse $\frac{1}{y}$ tend vers zéro et *vice versa*.

Exemple. — *Toute puissance négative de* x *croît indéfiniment quand* x *tend vers zéro.*

Soit x^{-n} une puissance négative de x ($n > 0$).

Si on a

$$|x| < \frac{1}{A^{\frac{1}{n}}},$$

on aura

$$|x^n| < \frac{1}{A}$$

et, par suite (n° 22, *Th. III*),

$$| x^{-n} | > A.$$

Le nombre α, qui correspond à A, est donc, ici, $A^{-\frac{1}{n}}$.

Remarque. — La définition précédente exprime, sous une forme précise, le fait suivant : en donnant à x des valeurs suffisamment voisines de a, les valeurs absolues des valeurs correspondantes de y deviennent aussi grandes qu'on le voudra, c'est-à-dire, surpassent tout nombre positif A choisi à l'avance (Voir n° 52).

Lorsqu'une quantité y croît indéfiniment, elle peut le faire de deux façons : soit en étant *positive* et on dit, alors, qu'elle *croît indéfiniment par valeurs positives* ; soit en étant négative et on dit, alors, qu'elle *croît indéfiniment par valeurs négatives* (Voir n° 64).

III. On dit que la fonction y, de la variable x, a pour *limite* b, quand x *croît indéfiniment*, lorsqu'à tout nombre positif ε (d'ailleurs aussi petit qu'on le voudra) on peut faire correspondre un nombre positif A tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité

$$| x | > A,$$

les valeurs correspondantes de y vérifient l'inégalité

$$| y - b | < \varepsilon \text{ (1)}.$$

Exemple. — *Lorsque* x *croît indéfiniment, une puissance négative quelconque de* x *tend vers zéro.*

Soit x^{-n} $(n > 0)$ une puissance négative de x.

Pour que l'on ait

$$| x^{-n} | < \varepsilon,$$

il suffit que l'on ait

$$| x | > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{n}}}.$$

Le nombre A, qui correspond à ε, est donc $\varepsilon^{-\frac{1}{n}}$.

Remarque. — Au fond, la définition précédente exprime que l'on peut donner à x des valeurs suffisamment grandes en valeur absolue pour que y diffère de b d'aussi peu qu'on le voudra.

(1) Cette définition est déjà connue en arithmétique, pour le cas particulier où la variable x est un indice qui ne prend que des valeurs entières. (Voir : *Leçons d'arithmétique* de M. Tannery, n° 238, ainsi que les numéros 463 à 471.)

IV. On dit que la fonction y, de la variable x, *croît indéfiniment, en même temps que x*, lorsqu'à tout nombre positif P, donné à l'avance (d'ailleurs aussi grand qu'on le voudra), on peut faire correspondre un nombre positif A tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité

$$|x| > A,$$

les valeurs correspondantes de y vérifient l'inégalité

$$|y| > P.$$

Exemple. — *Toute puissance positive de* x *croît indéfiniment, en même temps que* x.

Soit, en effet, x^n une puissance positive de x; si on a

$$|x| > P^{\frac{1}{n}}.$$

on aura :

$$|x^n| > P.$$

Le nombre A, qui correspond au nombre P, est donc, ici, $P^{\frac{1}{n}}$.

Remarque. — Cette dernière définition exprime, sous une forme rigoureuse, le fait suivant : on peut donner à x des valeurs assez grandes pour que y prenne des valeurs aussi grandes qu'on le voudra, en valeur absolue.

Pour désigner les signes de x et y, lorsqu'ils croissent indéfiniment, on emploie, comme nous l'avons déjà indiqué, les signes abréviatifs $-\infty$ et $+\infty$ (n° 64). Ainsi, pour dire que, lorsque x croît indéfiniment par valeurs positives, y croît indéfiniment par valeurs négatives on dit, d'une façon abrégée, que, pour $x = +\infty$, on a $y = -\infty$. Mais il faut bien se garder de donner à ces signes $+\infty$ et $-\infty$ d'autre signification que celle que nous venons de leur donner. Ces signes ne représentent *aucune grandeur numérique*, car il n'y a pas de nombre plus grand ou plus petit que tous les autres [1].

110. Théorème. — *Lorsque deux fonctions, d'une même variable* x, *sont égales pour toutes les valeurs de* x, *sauf peut-être pour la valeur*

(1) La notion de *limite* paraît remonter à *Archimède* (287-212 av. J.-C.); c'est dans ses travaux que l'on rencontre, pour la première fois, la notion « de deux quantités qui comprennent entre elles une quantité donnée et qui, d'ailleurs, en diffèrent d'aussi peu qu'on le veut ». Ces idées ne se sont précisées que fort lentement, pour arriver à la forme rigoureuse actuelle.

x = a, *si l'une d'elles a une limite, quand* x *tend vers* a, *l'autre en a une qui est la même.*

Soient, en effet, deux fonctions y et z, de x, égales pour toutes les valeurs de x, sauf peut-être pour $x = a$.

Dire que y a pour limite b, quand x tend vers a, c'est, par définition, dire qu'à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre α tel que l'inégalité

$$| x - a | < \alpha$$

entraîne l'inégalité

$$| y - b | < \varepsilon,$$

sauf peut-être pour $x = a$. Or, comme on a toujours

$$z = y,$$

sauf peut-être pour $x = a$, on aura, pour les mêmes valeurs de x,

$$| z - b | < \varepsilon$$

et, par suite, z a pour limite b.

Application. — Ce théorème important nous permet de préciser la notion de la *vraie valeur* d'une fraction *indéterminée*, notion que nous avions déjà indiquée (n° 53).

Lorsqu'une fraction se présente sous une forme indéterminée, pour $x = a$, on appelle *vraie valeur* de cette fraction *la limite vers laquelle elle tend*, lorsque x tend vers a (si cette limite existe).

Cette nouvelle définition de la vraie valeur paraît, au premier abord, différer de celle que nous avions donnée plus haut (n° 53); mais le théorème précédent montre que les deux définitions coïncident. En effet, si on peut trouver une seconde fraction qui soit égale à la fraction proposée pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = a$, et si cette seconde fraction a une limite, quand x tend vers a, il en sera de même de la première. Or, cette seconde fraction n'est plus indéterminée pour $x = a$, et, si elle est *continue* (Voir plus loin, n° 114), elle aura pour limite, lorsque x tend vers a, précisément la valeur qu'elle prend pour $x = a$. Cette valeur est donc bien, d'après notre nouvelle définition, la *vraie valeur* de la fraction proposée.

Exemple. — La fraction $\frac{x^2 + 3x}{x^3 - x}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, pour $x = 0$. Or, elle est égale à la fraction $\frac{x + 3}{x^2 - 1}$ pour toutes

les valeurs de x, sauf pour $x = 0$, on a donc (d'après les théorèmes du n° 111),

$$lim. \left(\frac{x^2 + 3x}{x^3 - x}\right)_{x=0} = lim. \left(\frac{x + 3}{x^2 - 1}\right)_{x=0} = -3.$$

La vraie valeur de la fraction, pour $x = 0$, est donc -3.

111. Théorème I. — *La somme algébrique de plusieurs fonctions, d'une même variable* x, *qui ont chacune une limite, lorsque* x *tend vers* a, *a une limite, lorsque* x *tend vers* a, *qui est la somme des limites de ses termes.*

Soient, en effet, y, z et u, trois fonctions de x qui ont, respectivement, pour limites b, c et d, lorsque x tend vers a, nous allons montrer que la somme $y + z + u$ a pour limite $b + c + d$.

En effet, dire que y, z et u ont, respectivement, pour limites b, c et d, c'est dire, par définition, qu'à tout nombre positif, donné à l'avance, ε on peut faire correspondre trois nombres positifs α', α'' et α''' tels : que la condition

$$| x - a | < \alpha'$$

entraîne l'inégalité

$$| y - b | < \frac{\varepsilon}{3};$$

que l'inégalité

$$| x - a | < \alpha''$$

entraîne

$$| z - c | < \frac{\varepsilon}{3};$$

et que l'inégalité

$$| x - a | < \alpha'''$$

entraîne l'inégalité

$$| u - d | < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Désignons par α le plus petit des trois nombres α', α'', α''' ; l'inégalité

$$| x - a | < \alpha$$

entraînera, certainement, les trois inégalités

$$| x - a | < \alpha', \qquad | x - a | < \alpha'', \qquad | x - a | < \alpha'''$$

et, par suite, aussi les trois inégalités

$$|y - b| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |z - c| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |u - d| < \frac{\varepsilon}{3}$$

qui donnent, en les ajoutant, membre à membre,

$$|y - b| + |z - c| + |u - d| < \varepsilon.$$

Or, puisque la valeur absolue d'une somme est au plus égale à la somme des valeurs absolues de ses termes, on a :

$$|y + z + u - (b + c + d)| \leqslant |y - b| + |z - c| + |u - d|$$

et, par suite, pour toutes les valeurs de x pour lesquelles

$$|x - a| < \alpha,$$

on a, *a fortiori*,

$$|y + z + u - (b + c + d)| < \varepsilon.$$

Ce qui prouve que $(y + z + u)$ a une limite et que cette limite est la somme $(b + c + d)$ des limites de ses termes.

Il est clair que la démonstration que nous venons de faire pour trois fonctions se ferait de la même façon pour le cas d'un nombre quelconque de fonctions, pourvu que ce nombre soit *bien déterminé*.

Théorème II. — *Lorsque, dans un produit de plusieurs facteurs, l'un des facteurs tend vers zéro et que chacun des autres facteurs reste inférieur, en valeur absolue, à un nombre fixe, le produit tend vers zéro.*

Soit y celui des facteurs qui tend vers zéro. D'après l'hypothèse, chacun des autres facteurs restant inférieur, en valeur absolue, à un nombre fixe, leur produit reste inférieur, en valeur absolue, à un nombre fixe P. Pour que le produit total ait pour limite zéro, il faut, qu'à tout nombre positif ε, on puisse faire correspondre un nombre α tel que, si $|x - a| < \alpha$, la valeur absolue du produit soit plus petite que ε. Or, ceci est possible car, y tendant vers zéro, on peut choisir α de façon que l'inégalité

$$|x - a| < \alpha$$

entraîne l'inégalité

$$|y| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{P}}.$$

La valeur absolue du produit total, qui est égale au produit des valeurs absolues de ses facteurs, sera, alors, plus petite que

$$P.\frac{\varepsilon}{P} = \varepsilon.$$

Théorème III. — *Le produit de plusieurs fonctions, d'une même variable* x, *ayant chacune une limite, lorsque* x *tend vers* a, *a, également, une limite, lorsque* x *tend vers* a, *qui est le produit des limites de ses facteurs.*

1° *Cas de deux facteurs.* — Soient, d'abord, y et z deux fonctions de x ayant, respectivement, pour limites b et c, lorsque x tend vers a; nous allons montrer que le produit yz a pour limite bc. Pour cela, il suffit de prouver que la différence $yz - bc$ tend vers zéro. Cette différence s'écrit :

$$yz - bc \equiv y(z - c) + c(y - b).$$

Sous cette forme, on voit que cette différence est la somme de deux quantités, $y(z - c)$ et $c(y - b)$, qui ont chacune pour limite zéro, comme étant le produit d'un facteur qui est fixe, ou qui finit par rester inférieur à un nombre fixe, par un facteur qui a pour limite zéro (*Th. II*). Par suite (d'après le *Th. I*), $yz - bc$ a une limite, lorsque x tend vers a, qui est la somme des limites de ses termes, c'est-à-dire *zéro*.

Donc le produit yz a une limite, qui est le produit bc des limites de ses facteurs.

2° *Cas de plusieurs facteurs.* — Soient, maintenant, quatre facteurs y, z, t, u, fonctions de x, qui ont, respectivement, pour limites b, c, d, e, lorsque x tend vers a. D'après ce que nous venons de voir, le produit yz a une limite qui est bc. Mais, alors, on peut considérer le produit yzt comme le produit des *deux* facteurs yz et t, qui ont chacun une limite, et appliquer le premier cas. Le produit yzt a donc une limite qui est bcd. De même, le produit $yztu$ peut être considéré comme le produit des deux facteurs yzt et u, qui ont chacun une limite, il a donc une limite qui est le produit des limites des deux facteurs et, par suite, $bcde$.

On pourrait, évidemment, continuer ce raisonnement un nombre quelconque de fois (pourvu que ce nombre soit fixé) et le théorème est donc vrai pour un nombre quelconque de facteurs [1].

(1) Il faut remarquer que le théorème II n'est pas un cas particulier du théorème III, car, dans le théorème II, il n'est pas nécessaire que les facteurs, autres que celui qui tend vers zéro, aient une *limite*, il *suffit* qu'ils restent inférieurs à des nombres fixes.

Théorème IV. — *Lorsque, dans un quotient, le numérateur tend vers zéro et que le dénominateur reste supérieur, en valeur absolue, à un nombre fixe, ce quotient tend, lui-même, vers zéro.*

Soit, en effet, le quotient $\frac{y}{z}$ de deux fonctions de x.

Supposons que, quand x tend vers a, y tende vers zéro et que z reste supérieur, en valeur absolue, à un nombre positif η.

L'inégalité

$$|z| > \eta.$$

s'écrit :

$$\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{\eta}$$

et prouve que $\frac{1}{z}$ reste inférieur à un nombre fixe.

Le quotient $\frac{y}{z}$ peut donc être considéré comme le produit de deux facteurs : l'un y qui tend vers zéro; l'autre $\frac{1}{z}$ qui est limité. Ce quotient a donc, d'après le théorème II, pour limite zéro.

Théorème V. — *Lorsque, dans un quotient de deux fonctions d'une même variable* x, *le numérateur et le dénominateur ont, chacun, une limite et que la limite du dénominateur est différente de zéro, le quotient a, lui-même, une limite qui est le quotient des limites de ses termes.*

Soit $\frac{y}{z}$ un quotient de deux fonctions de x. Supposons que, lorsque x tend vers a, y ait pour limite b et z pour limite c, c étant *différent de zéro*. Nous allons montrer que $\frac{y}{z}$ a pour limite $\frac{b}{c}$. En effet, la différence $\frac{y}{z} - \frac{b}{c}$ s'écrit :

$$\frac{y}{z} - \frac{b}{c} = \frac{c(y-b) - b(z-c)}{cz}.$$

Sous cette forme, on voit que cette différence est le quotient de deux quantités : la première

$$c(y-b) - b(z-c),$$

qui a pour limite zéro, quand x tend vers a, puisqu'elle est la somme

algébrique de deux quantités qui tendent chacune vers zéro (*Th. I* et *II*) ; la seconde cz qui a une limite différente de zéro et finit, par conséquent, par être supérieure, en valeur absolue, à un nombre fixe. Donc, d'après le théorème IV, la différence $\frac{y}{z} - \frac{b}{c}$ a pour limite zéro. $\frac{y}{z}$ a, par suite, une limite qui est le quotient $\frac{b}{c}$ des limites de ses termes [1].

Théorème VI. — *Lorsqu'une fonction, d'une variable* x, *a une limite (positive ou nulle), lorsque* x *tend vers* a, *sa racine carrée admet aussi une limite qui est la racine carrée de sa limite.*

En effet, supposons que la fonction y de x ait pour limite $b\,(b > 0)$, lorsque x tend vers a. Pour des valeurs de x suffisamment voisines de a, y sera du signe de b, donc positif ; et on pourra prendre sa racine carrée arithmétique. Or, on a l'identité :

$$\sqrt{y} - \sqrt{b} \equiv \frac{y - b}{\sqrt{y} + \sqrt{b}}.$$

Cette identité montre que la différence $\sqrt{y} - \sqrt{b}$ est égale à un quotient dont le numérateur tend vers zéro et dont le dénominateur est supérieur à $\sqrt{b}$; donc, d'après le théorème IV, cette différence tend vers zéro. $\sqrt{y}$ a donc pour limite $\sqrt{b}$, quand x tend vers a.

Remarque. — Cette démonstration tombe en défaut quand b est nul. Si y a pour limite zéro, on peut déterminer α de façon que l'inégalité

$$|x - a| < \alpha$$

entraîne l'inégalité

$$|y| < \varepsilon^2,$$

ε étant un nombre positif, donné à l'avance. Mais, alors, on aura

$$\sqrt{y} < \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\sqrt{y}$ a aussi pour limite zéro.

(1) De même que le théorème II n'est pas un cas particulier du théorème III, le théorème IV n'est pas non plus un cas particulier du théorème V ; car, dans le théorème IV, il n'est pas nécessaire que le dénominateur ait une *limite*, il *suffit* qu'il soit différent de zéro et ne tende pas vers zéro. Par exemple, le théorème serait encore vrai si le dénominateur croissait indéfiniment.

Remarque générale. — Dans tous les théorèmes qui précèdent nous avons supposé que les fonctions, dont il s'agissait, tendaient vers leurs limites respectives, tandis que x tendait vers une valeur déterminée a. Tous ces théorèmes seraient encore vrais si les fonctions tendaient vers leurs limites lorsque x croît indéfiniment. Les démonstrations seraient tout à fait analogues aux précédentes.

112. Théorème I. — *Lorsque, dans une somme, un seul terme croît indéfiniment, les autres restant inférieurs, en valeur absolue, à des nombres fixes, la somme elle-même croît indéfiniment.*

Soit, en effet, y le terme de la somme qui croît indéfiniment, désignons par z la somme algébrique de tous les autres termes. Comme, par hypothèse, tous les termes de z restent finis, z restera fini et on peut assigner un nombre A, positif, que z ne dépassera pas, en valeur absolue. Or, comme on a (nº 11, *Th. I*)

$$|y+z| > |y| - |z|,$$

si nous déterminons α de façon que, pour

$$|x-a| < \alpha,$$

on ait

$$|y| > \mathrm{P} + \mathrm{A},$$

P étant un nombre positif donné, on aura, *a fortiori*,

$$|y+z| > \mathrm{P} + \mathrm{A} - \mathrm{A},$$

ou

$$|y+z| > \mathrm{P}$$

Donc $y+z$ croît indéfiniment, quand x tend vers a.

Remarque. — Le théorème précédent n'est vrai que si *un seul* des termes de la somme croît indéfiniment. S'il y avait plus d'un terme qui croisse indéfiniment, on ne pourrait plus rien affirmer, *a priori*, à moins que tous les termes qui croissent ne soient de même signe, auquel cas la somme croîtrait encore indéfiniment.

Ainsi, par exemple, la différence de deux nombres positifs, qui croissent tous les deux indéfiniment, peut avoir une limite *finie*. La somme suivante :

$$\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x}$$

est toujours égale à 1, et cependant, quand x tend vers zéro, chacun de ses termes croît indéfiniment. C'est pour désigner des faits de ce genre qu'on dit qu'il y a *indétermination de la forme* $\infty - \infty$. Ce langage abrégé n'ayant pas d'autre signification que d'indiquer qu'il s'agit d'une différence dont les deux termes croissent indéfiniment [1]. *A priori*, on ne sait rien sur de telles différences, il y a donc, en quelque sorte, indécision, indétermination sur la limite vers laquelle elles tendent, si même une telle limite existe.

Théorème II. — *Lorsque, dans un produit de plusieurs facteurs, un des facteurs croît indéfiniment, chacun des autres facteurs restant supérieur, en valeur absolue, à un nombre fixe, le produit croît indéfiniment.*

Soit, en effet, y le facteur qui croît indéfiniment lorsque x tend vers a. Soit z le produit de tous les autres facteurs. Puisque chacun des facteurs qui composent z reste supérieur à un nombre fixe, on peut assigner un nombre positif η tel que la valeur absolue de z reste supérieure à η.

D'ailleurs, comme y croît indéfiniment, on peut, étant donné un nombre positif A, déterminer un nombre positif α tel que, lorsque

$$|x-a| < \alpha,$$

on ait

$$|y| > \frac{A}{\eta};$$

comme, d'ailleurs,

$$|z| > \eta,$$

on aura, pour les mêmes valeurs de x,

$$|yz| > A.$$

Donc yz croît indéfiniment, quand x tend vers a.

Remarque. — La proposition précédente ne subsiste plus si l'un des facteurs du produit tend vers zéro. Le produit d'un facteur qui croît indéfiniment par un facteur qui tend vers zéro est *indéterminé*. C'est ce qu'on appelle *une indétermination de la forme* $\infty \times 0$.

(1) Voir plus loin, au n° 113, *Application IV*, des exemples d'indétermination de cette nature.

Par exemple, le produit d'une puissance positive de x par une puissance négative présente une indétermination de cette forme, facile à lever, lorsque x tend vers zéro. Ainsi, dans le produit

$$x^p \times x^{-q},$$

le premier facteur tend vers zéro et le second croît indéfiniment, quand x tend vers zéro. Or le produit est égal à x^{p-q} (n° 27, *Th. II*). Si $p > q$, $p - q$ est positif et x^{p-q} tend vers zéro, avec x. Si $p = q$, on a $x^{p-q} = 1$. Enfin, si $p < q$, $p - q$ est négatif et x^{p-q} croît indéfiniment, quand x tend vers zéro.

Théorème III. — *Lorsque, dans une fraction, le dénominateur tend vers zéro, le numérateur restant supérieur, en valeur absolue, à un nombre fixe, la fraction croît indéfiniment.*

Soit, en effet, $\frac{y}{z}$ une fraction. Supposons que, lorsque x tend vers a, z ait pour limite zéro et que l'on puisse déterminer un nombre positif η tel que la valeur absolue de y reste supérieure à η.

D'autre part, soit A un nombre positif quelconque, donné à l'avance; comme z tend vers zéro, on pourra déterminer le nombre α de façon que l'inégalité

$$|x - a| < \alpha$$

entraîne l'inégalité

$$|z| < \frac{\eta}{A};$$

comme, d'ailleurs,

$$|y| > \eta,$$

on aura, pour les mêmes valeurs de x,

$$\left|\frac{y}{z}\right| > A.$$

Donc $\frac{y}{z}$ croît indéfiniment, quand x tend vers a.

Remarque. — Nous avions déjà indiqué cette proposition plus haut, au n° 52, et nous avons aussi montré que, pour qu'elle subsiste, il faut, essentiellement, que le numérateur ne tende pas vers zéro. Lorsque le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers *zéro*, la fraction se présente *sous la forme indéterminée* $\frac{0}{0}$. Nous

avons montré, au n° 53, comment on pouvait, dans de nombreux cas, lever cette indétermination.

Corollaire. — *L'inverse d'une quantité qui tend vers zéro croît indéfiniment.*

Théorème IV. — *Une fraction dont le dénominateur croît indéfiniment et dont le numérateur reste inférieur, en valeur absolue, à un nombre fixe, tend vers zéro.*

Soient, en effet, y et z deux fonctions d'une même variable x. Supposons que, quand x tend vers a, y reste fini et que z croisse indéfiniment, nous allons montrer que $\frac{y}{z}$ tend vers zéro. En effet, on pourra assigner un nombre positif A tel que

$$|y| < A.$$

D'autre part, soit ε un nombre positif donné, puisque z croît indéfiniment, on pourra déterminer un nombre positif α tel que, lorsque

$$|x - a| < \alpha,$$

on ait

$$|z| > \frac{A}{\varepsilon};$$

on aura, alors, évidemment,

$$\left|\frac{y}{z}\right| < \frac{A}{\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)}$$

ou

$$\left|\frac{y}{z}\right| < \varepsilon.$$

Ce qui prouve que $\frac{y}{z}$ tend vers zéro, quand x tend vers a.

Corollaire. — *Une fraction dont le numérateur croît indéfiniment et dont le dénominateur reste inférieur, en valeur absolue, à un nombre fixe, croît indéfiniment.*

Car l'inverse de cette fraction tend vers zéro, d'après le théorème précédent, et, par suite, cette fraction, étant l'inverse d'une quantité qui tend vers zéro, croît indéfiniment (*Th. III*, *Coroll.*).

Remarque. — Le théorème précédent et son corollaire nous montrent qu'on sait ce qui arrive dans une fraction dont *un* des deux

termes croît indéfiniment; mais on ne peut rien affirmer, *a priori*, sur une fraction dont les *deux* termes croissent indéfiniment. Dans ce cas, comme il y a doute sur ce qui arrive, comme on ne sait pas, *a priori*, s'il y a une limite ou s'il n'y en a pas, on dit qu'il y a *indétermination*, et pour rappeler l'origine de cette indétermination on dit qu'il y a *indétermination de la forme* $\frac{\infty}{\infty}$.

Ainsi, par exemple, le quotient

$$\frac{x^p}{x^q}$$

de deux puissances positives de x est indéterminé, de cette forme, quand x croît indéfiniment. Cette indétermination se lève facilement car ce quotient est égal à x^{p-q}; il croît indéfiniment, il est égal à 1 ou il tend vers zéro, suivant que p est supérieur, égal ou inférieur à q.

Résumé des cas d'indétermination. — Dans les deux paragraphes précédents (111 et 112), nous avons examiné tous les cas qui peuvent se présenter pour les sommes, produits et quotients de fonctions, lorsque ces fonctions tendent vers des limites ou croissent indéfiniment. Nous avons trouvé qu'il y avait quatre cas, que nous avons nommés *cas d'indétermination*, où on ne pouvait rien affirmer, *a priori*, sur le résultat. Ce sont les cas que nous représentons par les symboles abréviatifs: $\infty - \infty$, $\infty \times 0$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

Nous ne saurions trop insister pour que le lecteur ne donne pas à ces symboles d'autre signification que celle que nous leur avons donnée.

Ces symboles n'ont aucune signification *numérique* et ne servent que pour indiquer, d'une façon très brève, un fait qu'il serait long d'énoncer correctement.

En général, et dans la majorité des cas, les indéterminations se ramènent les unes aux autres. Par des transformations simples, on remplace une expression par une expression équivalente ayant une indétermination qu'on sait lever. Nous allons, dans le paragraphe suivant, en donner des exemples.

113. Application I. — *Tout polynôme, entier en* x, *qui n'a pas de terme constant tend vers zéro en même temps que* x.

En effet, le polynôme n'ayant pas de terme constant, tous ses termes ont pour limite zéro, il en est donc de même du polynôme, d'après le théorème I (n° 111). De là on conclut, en appliquant la définition de

la limite, que, si le polynôme $P(x)$ s'annule pour $x = 0$, on peut déterminer un nombre positif α tel que, pour toutes les valeurs de x plus petites que α, en valeur absolue, on ait

$$|P(x)| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

Application II. — *Tout polynôme, entier en* x, *croît indéfiniment en même temps que* x *et, pour des valeurs suffisamment grandes de* x, *il est du signe de son terme de degré le plus élevé.*

Soit, par exemple, le polynôme

$$P(x) \equiv ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f,$$

mettons x^4 en facteur, nous aurons

$$P(x) \equiv x^4 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} + \frac{f}{x^4}\right).$$

Lorsque x croît indéfiniment, chacun des termes entre parenthèses (*Th. IV*, n° 112) tend vers zéro, sauf le premier. La quantité entre parenthèses a donc une limite a différente de zéro; le premier facteur croît indéfiniment : le produit $P(x)$ croît indéfiniment (*Th. II*, n° 112). De plus, comme la quantité entre parenthèses a pour limite a, on peut prendre x assez grand pour que cette quantité diffère de sa limite d'aussi peu qu'on le voudra et, par suite, soit du signe de a. Pour ces valeurs de x, $P(x)$ sera, alors, du signe de son terme de degré le plus élevé ax^4.

Il résulte immédiatement de ce qui précède que, si l'on donne un polynôme P :

$$P = ax^m + bx^{m-1} + \ldots,$$

on peut le mettre sous la forme :

$$P = ax^m(1 + \varepsilon),$$

ε ayant pour limite zéro lorsque x grandit indéfiniment.

Application III. — *Trouver la vraie valeur d'une fraction rationnelle en* x, *quand* x *croît indéfiniment.*

Une fraction rationnelle en x étant le quotient de deux polynômes entiers en x, se présente sous la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, lorsque x croît indéfiniment.

Considérons la fraction $\frac{P}{L}$ où l'on a :

$$P = ax^m + bx^{m-1} + \dots,$$
$$L = a'x^n + b'x^{n-1} + \dots.$$

Nous avons vu que l'on peut écrire

$$P = ax^m (1 + \varepsilon), \quad L = a'x^n (1 + \varepsilon'),$$

ε, ε' tendant vers zéro lorsque x croît indéfiniment. On a donc

$$\frac{P}{L} = \frac{ax^m}{a'x^n} \times \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon'} = \frac{ax^m}{a'x^n} (1 + \varepsilon'').$$

Puisque $\frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon'}$ a pour limite 1, il en est de même de $1 + \varepsilon''$, et l'on peut dire que ε'' tend vers zéro, lorsque x croît indéfiniment.

Si m est supérieur à n, on peut écrire

$$\frac{P}{L} = \frac{a}{a'} x^{m-n} (1 + \varepsilon'').$$

Si m est égal à n, on a :

$$\frac{P}{L} = \frac{a}{a'} (1 + \varepsilon'').$$

Si m est inférieur à n, on a :

$$\frac{P}{L} = \frac{a}{a'x^{n-m}} (1 + \varepsilon'').$$

On arrive, alors, à cette conclusion :

Si le degré du numérateur est plus élevé que le degré du dénominateur, la fraction croît indéfiniment en même temps que x.

Si les degrés des deux termes sont égaux, la fraction a une limite différente de zéro, qui est le quotient des coefficients des termes de degré le plus élevé au numérateur et au dénominateur.

Enfin, si le degré du numérateur est plus petit que le degré du dénominateur, la fraction a pour limite zéro.

On peut, d'ailleurs, trouver encore la limite de la fraction en divisant ses deux termes par la plus haute puissance de x qui figure dans l'un des deux termes. En faisant, ensuite, croître x indéfini-

ment, les deux termes, mis sous cette forme, auront, chacun, une limite finie, dont l'une au moins sera différente de zéro.

EXEMPLES. — Soit la fraction

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2 + 1}.$$

Quand x croît indéfiniment, le numérateur étant de degré supérieur au degré du dénominateur, la fraction croît indéfiniment.

Soit encore la fraction

$$\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + x^2 + 5}.$$

Quand x croît indéfiniment, la fraction a pour limite $\frac{1}{3}$; car, les deux termes étant de même degré, la fraction a une limite qui est égale au quotient des coefficients des termes de degré le plus élevé.

Application IV. — On lève *souvent* les indéterminations de la forme $\infty - \infty$ en multipliant et divisant l'expression, dont il s'agit, par la quantité conjuguée. Nous allons en montrer quelques exemples.

EXEMPLE I. — *Trouver la vraie valeur de l'expression*

$$x + 2 - \sqrt{x^2 - 5x + 1},$$

pour $x = +\infty$ (1).

Cette expression s'écrit, en multipliant et divisant par la quantité conjuguée :

$$\frac{9x + 3}{x + 2 + \sqrt{x^2 - 5x + 1}}.$$

Pour $x = +\infty$, cette nouvelle expression se présente sous la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Divisons, haut et bas, par x, elle s'écrit :

$$\frac{9 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x} + \sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}}.$$

(1) Nous rappelons que « *pour* $x = +\infty$ » est une façon abrégée de dire « *lorsque* x *croît indéfiniment par valeurs positives* ». — Il faut, d'ailleurs, remarquer que, pour $x = -\infty$, cette expression n'est pas indéterminée car les deux termes x et $-\sqrt{x^2 - 5x + 1}$, qui croissent indéfiniment, étant *tous les deux* négatifs, la somme croît indéfiniment par valeurs négatives (Voir n° 112, *Th. I, Rem.*).

Le numérateur, quand x croît indéfiniment, a pour limite 9; le dénominateur a pour limite $1 + \sqrt{1} = 2$ (car la limite du radical est la racine carrée de la limite de la quantité placée sous ce radical). La fraction a donc pour limite $\frac{9}{2}$, qui est sa vraie valeur.

Exemple II. — *Trouver la limite de l'expression*

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2},$$

quand x *croît indéfiniment par valeurs positives* (1).

On a :

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}}.$$

Dans la nouvelle expression, le numérateur est fixe et le dénominateur croît indéfiniment, en même temps que x. La limite de l'expression est donc zéro (*Th. IV*, n° 112.).

EXERCICES

157. Démontrer que, si y a pour limite b, $\sqrt[n]{y}$ a pour limite $\sqrt[n]{b}$.

On écrira l'identité :

$$\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{b} \equiv \frac{y-b}{\sqrt[n]{y^{n-1}} + \sqrt[n]{by^{n-2}} + \sqrt[n]{b^2y^{n-3}} + \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}},$$

et la démonstration sera identique à celle du théorème VI du n° 111.

158. Trouver les limites vers lesquelles tendent les expressions suivantes :

$$\frac{2x^2 - 5x + 6}{3x^2 + x + 1};$$

$$\frac{x^2+1}{x-1};$$

$$\sqrt{x^2+a} - \sqrt{x^2+b};$$

$$\sqrt{x^2+ax+b} - \sqrt{x^2+a'x+b'};$$

$$\sqrt[n]{x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots} - \sqrt[n]{x^n + a'x^{n-1} + b'x^{n-2} + \ldots}$$

$$x - a - \sqrt{x^2 - 2ax + b};$$

$$x + a - \sqrt{x^2 + bx + c};$$

$$x + a - \sqrt[n]{x^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots},$$

lorsque x croît indéfiniment.

(1) Dans cette expression, on ne pourrait pas faire $x = -\infty$ car, pour des valeurs de x négatives et suffisamment grandes, en valeur absolue, les quantités placées sous les radicaux seraient négatives et les expressions n'auraient plus de sens.

159. Trouver la limite de l'expression

$$\sqrt[3]{\frac{x^5 - x^4 - 3x^2 + x + 2}{x^2 - x - 1}} - x + 1 - \frac{1}{3x},$$

lorsque x croît indéfiniment (NIEWENGLOWSKI).

160. Chercher la limite de l'expression

$$\frac{(x-y)a^m + (a-x)y^m - (a-y)x^m}{(x-y)(a-x)(a-y)},$$

lorsque x et y tendent vers a. (ROUCHÉ).

Pour rechercher cette limite, on posera :

$$x - a = h, \quad y - a = th$$

et on fera tendre h vers zéro (t étant supposé avoir une limite quelconque).

CHAPITRE II

CONTINUITÉ

114. Définition. — On dit qu'une fonction d'une variable x est *continue*, pour $x = a$, si :

1° Elle a une valeur bien déterminée pour $x = a$;

2° Elle a pour *limite*, lorsque x tend vers a, précisément la valeur qu'elle prend pour $x = a$.

Par exemple, la fonction $\sqrt{x}$ est une fonction continue de x, pour toute valeur *positive* a de x; car, pour $x = a$, elle a une valeur bien déterminée $\sqrt{a}$ et, lorsque x tend vers a, $\sqrt{x}$ a pour limite $\sqrt{a}$ (n° 111, *Th.* VI), qui est précisément la valeur qu'elle prend pour $x = a$.

Tous les théorèmes sur les limites, que nous avons établis au n° 111, ont leur correspondant dans les fonctions continues. Nous ferons seulement la démonstration pour le premier théorème, et nous nous contenterons d'énoncer les autres dont les démonstrations sont identiques.

Théorème I. — *La somme algébrique de plusieurs fonctions continues est une fonction continue.*

Soient, en effet, y, z, t, u quatre fonctions continues de la variable x, pour $x = a$. Soient b, c, d, e les valeurs que prennent ces fonctions pour $x = a$. Dire qu'elles sont continues, pour $x = a$, c'est dire que, lorsque x tend vers a, y, z, t et u ont, respectivement, pour limites b, c, d et e. Or, pour $x = a$, la somme $y + z + t + u$ prend la valeur $b + c + d + e$, et, d'après le théorème I du n° 111, $y + z + t + u$ a pour limite $b + c + d + e$ qui est la somme des limites de chacun des termes. Donc $y + z + t + u$ est une fonction continue de x, pour $x = a$.

Théorème II. — *Le produit de plusieurs fonctions continues de* x, *pour* x = a, *est une fonction continue de* x, *pour* x = a.

(Voir le *Théorème III*, du n° 111).

Corollaire. — *Toute puissance entière et positive d'une fonction continue est elle-même une fonction continue.*

Application I. — *Tout polynôme entier en* x *est une fonction continue de* x, *pour toute valeur de* x.

En effet, tout polynôme entier en x est une somme de termes de la forme Ax^p. Chacun de ces termes est une fonction continue, car c'est une puissance d'une fonction continue. Le polynôme est donc une fonction continue, comme étant la somme de plusieurs fonctions continues.

Théorème III. — *Le quotient de deux fonctions continues de* x, *pour* x = a, *est une fonction continue de* x, *pour* x = a, *pourvu que, pour cette valeur, le dénominateur ne soit pas nul.*

Car, la limite du dénominateur étant différente de zéro, on peut appliquer le théorème V du n° 111.

Théorème IV. — *La racine carrée d'une fonction continue de* x, *pour* x = a, *est une fonction continue de* x, *pour* x = a.

On applique le théorème VI du n° 111.

Application II. — *Toute fraction rationnelle en* x *est une fonction continue de* x, *pour toute valeur de la variable qui n'annule pas le dénominateur.*

Car une fraction rationnelle, étant le quotient de deux polynômes entiers en x, est le quotient de deux fonctions continues.

Donc, d'après le théorème III, c'est une fonction continue de x, pour toute valeur de x qui n'annule pas le dénominateur.

Application III. — *La racine carrée d'un polynôme entier en* x *est une fonction continue de* x, *pour toute valeur de la variable qui rend la quantité sous le radical positive.*

Cette proposition est une application directe du théorème IV.

EXEMPLES. — Les fonctions suivantes :

$$ax^2 + bx + c, \quad \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c},$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}, \quad (x+1)(x+2)(x+3),$$

$$\frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{x^2 - 2x + 1}, \quad \frac{x^2-3}{x+3},$$

sont continues, sauf pour les valeurs qui annulent les dénominateurs ou qui rendent les expressions sous les radicaux négatives.

115. Définitions. — Lorsqu'une quantité variable passe d'une valeur à une autre, on dit qu'elle a subi un *accroissement* égal à l'excès de la valeur finale sur la valeur initiale. Ainsi, si la variable x passe de la valeur a à la valeur a', on dit qu'elle a reçu *l'accroissement* $a' - a$. Soit h, l'accroissement, on aura, par définition,

$$a' - a = h$$

ou

$$a' = a + h.$$

La valeur finale est égale à la valeur initiale augmentée de l'accroissement.

Soit y une fonction de la variable x et soient b et b' les deux valeurs de y, lorsqu'on donne à x, respectivement, les valeurs a et a'. La variable x ayant reçu l'accroissement $a' - a$, la fonction y aura subi l'accroissement $b' - b$ qu'on appelle *l'accroissement de la fonction correspondant à l'accroissement* a' — a *de la variable.*

Remarquons, de suite, qu'un accroissement peut être positif ou négatif.

EXEMPLES. — Considérons la fonction :

$$y = x^2 - 5x + 2.$$

Pour $x = 3$, on a $y = -4$;

pour $x = 2{,}5$, on a $y = -4{,}25$.

L'accroissement de la variable, lorsqu'elle passe de la valeur 3 à la valeur 2,5, est :

$$h = 2{,}5 - 3 = -0{,}5$$

et l'accroissement correspondant de la fonction est :

$$k = -4{,}25 + 4 = -0{,}25.$$

Considérons encore la fonction :

$$y = x^3 + 1.$$

Donnons à x la valeur 1, on a :

$$y = 2.$$

Donnons à x l'accroissement 2 : la nouvelle valeur de x sera $1 + 2 = 3$ et la valeur correspondante de la fonction sera $y = 28$. L'accroissement de la fonction, correspondant à l'accroissement 2 de la variable, est donc

$$28 - 2 = 26.$$

Soit le trinôme du second degré :

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Donnons à x un accroissement h et désignons par k l'accroissement correspondant de la fonction. La nouvelle valeur de la variable est $x + h$, la valeur correspondante de la fonction est $y + k$ et on a :

$$y + k = a(x + h)^2 + b(x + h) + c.$$

Par suite,

$$k = y + k - y = a(x + h)^2 + b(x + h) + c - ax^2 - bx - c,$$

ou

$$k = h(2ax + b + ah).$$

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de la variable* x *soit continue, pour* x $= a$, *est que, si on donne à la variable* x *un accroissement* h, *à partir de la valeur* a, *l'accroissement, correspondant,* k *de la fonction tende vers zéro en même temps que* h.

Cette proposition est une conséquence directe de la définition de la continuité (n° 114). En effet, soit b la valeur de la fonction y, pour $x = a$. Dire que la fonction est continue, c'est dire que y a pour limite b quand x tend vers a et, par conséquent, que $y - b$, c'est-à-dire k, tend vers zéro, quand $x - a$, c'est-à-dire h, tend vers zéro. D'ailleurs, réciproquement, si $k = y - b$ tend vers zéro en même temps que $h = x - a$, y a pour limite b quand x tend vers a et la fonction est *continue*.

L'énoncé de ce théorème peut donc servir de définition de la continuité, définition qui, au fond, ne diffère pas de celle que nous avons donnée en premier lieu.

Cette nouvelle manière d'envisager la continuité nous montre mieux comment une fonction continue se comporte. Puisque k tend vers zéro en même temps que h, on peut prendre h assez petit pour que k soit aussi petit qu'on le voudra, en valeur absolue. En d'autres termes, lorsqu'une fonction est continue, pour $x = a$, on peut faire

varier x, à partir de a, assez peu pour que la fonction ait varié d'aussi peu qu'on le voudra. Une fonction continue varie donc par degrés insensibles et ne peut pas sauter brusquement d'une valeur à une autre.

Une fonction peut être *discontinue*, pour une certaine valeur de la variable, ou bien parce qu'elle n'a pas une valeur bien déterminée, pour cette valeur de la variable, ou bien parce que, pour cette valeur, elle passe brusquement d'une valeur à une autre.

Exemples. — La fonction $\frac{1}{x}$ est continue pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$. Pour cette valeur elle est discontinue, car elle n'a pas une valeur bien déterminée. Quand x passe, en croissant, par la valeur zéro, $\frac{1}{x}$, d'abord infiniment grand et négatif, devient, ensuite, infiniment grand et positif; on dit que, quand x passe par la valeur zéro, $\frac{1}{x}$ passe brusquement de $-\infty$ à $+\infty$, pour indiquer que $\frac{1}{x}$ est d'abord négatif et ensuite positif.

Voici encore un exemple intéressant de fonction présentant des discontinuités : Désignons par y la *partie entière* de x. y est évidemment une fonction de x, puisqu'à chaque valeur de x correspond une valeur pour y. Faisons croître x à partir de zéro. Quand x croît de 0 à 1, sa partie entière est 0, on a donc, sans cesse, $y = 0$; x continuant à croître de 1 à 2, sa partie entière est 1 et on a $y = 1$; quand x est compris entre 2 et 3, on a $y = 2$, etc...

On voit que quand x passe par la valeur 1, la valeur de y saute brusquement de 0 à 1; quand x passe par la valeur 2, la valeur de y saute de 1 à 2, etc... D'une manière générale, chaque fois que x passe par une valeur entière, y subit un accroissement brusque d'une unité. Cette fonction y est donc discontinue pour toute valeur *entière* de la variable x.

La courbe représentative d'une fonction continue se compose d'un trait *continu* qu'on peut tracer sans lever la main. Au contraire, pour une valeur de x pour laquelle la fonction est discontinue, il faudra arrêter le trait, lever la main et reprendre le trait plus loin.

Exemples. — Tout polynôme étant une fonction continue, le binôme $ax + b$ et le trinôme $ax^2 + bx + c$ sont des fonctions continues. Leurs courbes représentatives sont des courbes formées d'un seul trait continu. Car, comme nous l'avons vu, la courbe représentative de la variation de $ax + b$ est une droite indéfinie (nos 68 à 70) et la courbe représentative de la variation du trinôme $ax^2 + bx + c$ est une parabole (n° 98).

La courbe représentative de la fonction

$$y = \frac{1}{x}$$

est une hyperbole, admettant l'axe des y comme asymptote (*fig.* 35).

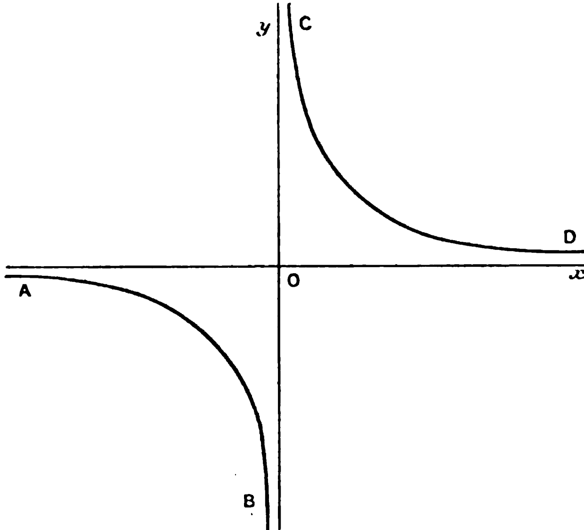


Fig. 35.

Lorsque x croît de $-\infty$ à 0, on a une branche de courbe AB, qu'on peut tracer d'un trait continu, qui part asymptote à ox pour descendre asymptote à oy. Pour $x = 0$, il faut lever la main et, x variant de 0 à $+\infty$, on a une seconde branche de courbe CD qui part asymptote à oy, en haut, et descend pour devenir asymptote à ox (1).

La courbe représentative de la fonction y de x, où y désigne la partie entière de x, se compose d'une suite de portions de droites parallèles à ox (*fig.* 36). x variant de 0 à 1, on a $y = 0$; ce qui donne une portion OA de l'axe des x. x variant de 1 à 2, on a $y = 1$; on a, alors, une portion BC d'une parallèle à ox. x variant de 2 à 3, on a une portion DE d'une autre parallèle à ox, etc... La courbe représen-

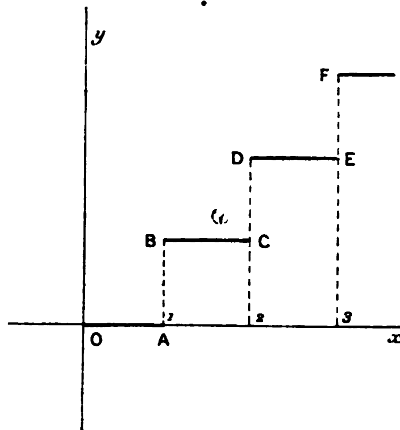


Fig. 36.

(1) Nous définirons plus loin, exactement, ce qu'il faut entendre par « branche de courbe *asymptote* à une droite ». On peut dire, en gros, qu'une branche de courbe infinie est asymptote à une droite quand elle se rapproche indéfiniment de cette droite sans jamais l'atteindre.

tative de la variation de cette fonction se compose donc des portions de droites OA, BC, DE, etc.,.. Pour $x = 1, 2, 3...$, la plume, qui trace la courbe, doit sauter de A en B, de C en D, de E en F, etc...

Lorsqu'une fonction est continue, pour toutes les valeurs de la variable comprises dans une intervalle, on conçoit que, comme elle ne peut varier que par degrés insensibles, elle ne puisse *passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.* Ainsi, si une fonction prend, pour $x = 1$, la valeur 2 et, pour $x = 3$, la valeur 5, si, de plus, elle est continue, pour toutes les valeurs de x comprises entre 1 et 3, il y aura, certainement, au moins une valeur de x, comprise entre 1 et 3, pour laquelle la fonction prendra, par exemple, la valeur 4 comprise entre 2 et 5.

Une fonction continue ne peut changer de signe qu'en s'annulant, car elle ne peut passer d'une valeur positive à une valeur négative sans passer par la valeur intermédiaire zéro.

Au contraire, une fonction qui présente des discontinuités peut passer d'une valeur à une autre sans passer par les valeurs intermédiaires. Ainsi, la fonction $\frac{1}{x}$ passe du négatif au positif sans s'annuler, mais en devenant infiniment grande (pour $x = 0$, qui est une valeur de discontinuité). La fonction y, qui est la partie entière de x, passe brusquement d'une valeur entière à la suivante sans passer par aucune des valeurs intermédiaires.

EXERCICES

161. Démontrer, directement, que les fonctions suivantes

$$x^2 + px + q;$$
$$\sqrt{x^2 + 1};$$
$$\frac{x^2 + a^2}{x^2 + b^2}$$

sont continues pour toutes les valeurs de x, en prouvant que l'accroissement de la fonction tend vers zéro en même temps que l'accroissement de la variable.

162. Démontrer, rigoureusement, que le trinôme du second degré ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par les valeurs intermédiaires.

CHAPITRE III

DÉRIVÉES DES FONCTIONS SIMPLES

116. Définition. — Étant donnée une fonction d'une variable, donnons à cette variable un accroissement h, à partir de la valeur x, et soit k l'accroissement correspondant de la fonction. Si le rapport $\frac{k}{h}$ a une limite lorsque h tend vers zéro, cette limite est appelée la *dérivée* de la fonction, pour la valeur x de la variable.

D'une façon plus brève, *la dérivée d'une fonction est la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, lorsque l'accroissement de la variable tend vers zéro.*

Il résulte, immédiatement, de cette définition, qu'une fonction n'admet une dérivée, pour une valeur x de la variable, que si elle est continue pour cette valeur de la variable. Car, si $\frac{k}{h}$ a une limite A, on a :

$$\frac{k}{h} = A + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro avec h, et, par suite,

$$k = h(A + \varepsilon);$$

k tend donc vers zéro avec h.

Cette condition qui est *nécessaire* n'est, d'ailleurs, pas suffisante. Car, lorsque k et h tendent vers zéro, simultanément, on ne peut rien affirmer pour le rapport $\frac{k}{h}$ (n° 112, *Th. III*, *Rem.*), on est dans un cas d'indétermination de la forme $\frac{0}{0}$ et le rapport peut ne pas avoir de limite. Cependant, lorsque, k tendant vers zéro, le rapport $\frac{k}{h}$ *croît indéfiniment*, on dit encore qu'il y a une dérivée, mais que cette dérivée est *infiniment grande* [1].

[1] Il n'y a réellement pas de dérivée que dans le cas où le rapport $\frac{k}{h}$ n'a pas de limite, sans croître indéfiniment.

Exemples. — *La dérivée de x est 1.*

Car si on prend

$$y = x, \quad \text{on a} \quad k = h;$$

donc $\frac{k}{h} = 1$, et, par suite, $lim. \left(\frac{k}{h}\right) = 1.$

La dérivée de $ax + b$ est a.

Car, si

$$y = ax + b,$$

$$k = a(x + h) + b - ax - b = ah;$$

$$\frac{k}{h} = a, \quad \text{donc,} \quad lim. \left(\frac{k}{h}\right) = a.$$

La dérivée de $ax^2 + bx + c$ est $2ax + b$.

Car, soit

$$y = ax^2 + bx + c;$$

on a :

$$k = h\,[2ax + b + ah],$$

d'où

$$\frac{k}{h} = 2ax + b + ah.$$

Quand h tend vers zéro, ah tend aussi vers zéro et on a :

$$lim. \left(\frac{k}{h}\right) = 2ax + b.$$

La dérivée de $\sqrt{x}$ est $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, pourvu que x soit différent de zéro.

Car, si

$$y = \sqrt{x},$$

on a :

$$k = \sqrt{x + h} - \sqrt{x},$$

et

$$\frac{k}{h} = \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}.$$

Quand h tend vers zéro, $\sqrt{x + h}$ a pour limite $\sqrt{x}$ et le dénominateur a pour limite $2\sqrt{x}$. Donc,

$$lim. \left(\frac{k}{h}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pour $x = 0$, $\frac{k}{h}$ croît indéfiniment, lorsque h tend vers zéro. On peut donc dire que, pour $x = 0$, $\sqrt{x}$ a une dérivée infiniment grande.

Notation. — Pour désigner la dérivée d'une fonction de la variable x on fait précéder cette fonction du symbole D_x. Ainsi, $D_x y$, $D_x f(x)$, désignent les dérivées de y et de $f(x)$.

Lorsque cela ne peut donner lieu à aucune ambiguïté, on emploie, de préférence, la notation plus simple qui consiste à affecter la fonction d'un *accent*.

Ainsi, y', $f'(x)$ désignent encore les dérivées de y et de $f(x)$.

Si

$$y = ax^2 + bx + c,$$

on écrira

$$y' = 2ax + b,$$

ou encore

$$D_x\,(ax^2 + bx + c) = 2ax + b.$$

De même,

$$D_x\,(x) = 1;$$

$$D_x\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Définition. — Lorsqu'une fonction de x admet une dérivée, pour toute valeur de x, cette dérivée est aussi une fonction de x qui peut elle-même admettre une dérivée. Cette *dérivée de la dérivée* est ce qu'on appelle la *dérivée seconde* de la fonction.

De même, la dérivée seconde peut admettre une dérivée qu'on appelle la *dérivée troisième*, etc..... On conçoit, qu'en continuant de la sorte, on pourrait définir une *dérivée quatrième*, une *dérivée cinquième*, d'une manière générale une *dérivée* n^{ième} ou *dérivée d'ordre* n. Par opposition, on appelle, alors, la dérivée, proprement dite, *dérivée première*, pour la distinguer des autres.

Exemples. — La dérivée première de $ax^2 + bx + c$ est $2ax + b$, sa dérivée seconde est $2a$.

La dérivée seconde de $\sqrt{x}$ est la dérivée de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, qui est, comme nous le verrons, $-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$.

Notation. — On désigne la dérivée seconde en faisant précéder la fonction du signe $D^2_{x^2}$, la dérivée $m^{ième}$ en faisant précéder la fonction du signe $D^m_{x^m}$. Ainsi, $D^2_{x^2}y$, $D^2_{x^2}f(x)$, sont les dérivées secondes de y et $f(x)$.

Lorsque cela ne peut donner lieu à aucune ambiguïté, on désigne, plus simplement, la dérivée seconde en affectant la fonction de deux accents. Ainsi, y'', $f''(x)$ sont les dérivées secondes de y et $f(x)$. Pour la dérivée $n^{ième}$ on place n en indice supérieur, entre parenthèses : $y^{(n)}$, $f^{(n)}_{(x)}$.

Ainsi, si

$$y = ax^2 + bx + c,$$
$$y'' = 2a,$$

ou, encore,

$$D^2_{x^2}(ax^2 + bx + c) = 2a;$$

$$D^2_{x^2}\left(\sqrt{x}\right) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

Remarque. — Dans la suite, nous aurons, fréquemment, à parler d'accroissements de fonctions et de variables. Pour éviter toute confusion, et pour ne pas employer un trop grand nombre de lettres nouvelles, nous emploierons une notation très usitée pour désigner les accroissements. L'accroissement d'une quantité, à partir d'une certaine valeur, sera représenté par la lettre ou le symbole qui représente cette quantité précédé de la lettre majuscule grecque Δ. Ainsi, Δx, Δy, Δu, désignent les accroissements de x, y et u. Avec cette notation, la dérivée de la fonction y de x est la limite du quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, lorsque Δx tend vers zéro.

117. Théorème I. — *La dérivée d'une constante est égale à zéro.*

Car, si une fonction y de x est *constante*, c'est-à-dire conserve toujours la même valeur, l'accroissement Δy de la fonction, qui correspond à un accroissement quelconque Δx de la variable, est toujours nul. On a donc,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv 0 \quad (\Delta x \neq 0)$$

et, par suite (n° 110)

$$y' = \mathit{lim.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 0.$$

Théorème II. — *Lorsque plusieurs fonctions d'une même variable admettent, chacune, une dérivée, leur somme admet, également, une dérivée qui est la somme des dérivées de ces fonctions.*

Soient, en effet, u, v, w trois fonctions de la variable x admettant, par hypothèse, des dérivées u', v', w', pour la valeur x de la variable. Nous allons montrer que leur somme

$$y = u + v + w$$

admet une dérivée qui est la somme $u' + v' + w'$ des dérivées.

En effet, donnons à x un accroissement Δx et soient $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ les accroissements correspondants des trois fonctions u, v, w. Ceci veut dire que, pour la valeur $x + \Delta x$ de la variable, ces trois fonctions prennent, respectivement, les valeurs $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$ et, par suite, y prend la valeur

$$u + \Delta u + v + \Delta v + w + \Delta w.$$

L'accroissement de y, correspondant à l'accroissement Δx de la variable, est donc :

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v + w + \Delta w - (u + v + w)$$

ou :

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w.$$

On a donc,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Or, par hypothèse, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta w}{\Delta x}$ ont, respectivement, des limites u', v', w', lorsque Δx tend vers zéro, on en conclut (nº 111, *Th. I*) que leur somme $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a une limite qui est la somme des limites. y admet donc une dérivée :

$$y' = u' + v' + w'.$$

Théorème III. — *Lorsque plusieurs fonctions admettent, chacune, une dérivée, le produit de ces fonctions admet une dérivée qui est la somme des produits obtenus en remplaçant, dans le produit considéré, successivement, chacune des fonctions par sa dérivée.*

1° *Cas de deux facteurs.* — Soient, d'abord, u et v deux fonctions de x admettant des dérivées u' et v'. Nous allons montrer que le produit

$$y = uv$$

admet une dérivée qui est :

$$y' = uv' + vu'.$$

Donnons, en effet, à x un accroissement Δx, il en résultera pour u et v des accroissements Δu et Δv. Ceci veut dire que, pour la valeur $x + \Delta x$, les fonctions u et v prennent les valeurs $u + \Delta u$ et $v + \Delta v$; par suite, le produit prend la valeur

$$(u + \Delta u)(v + \Delta v).$$

L'accroissement du produit y, correspondant à l'accroissement Δx de x, est donc :

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

ou :

$$\Delta y = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,.\,\Delta v.$$

Divisons par Δx, et il vient :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}.\Delta v.$$

Lorsque Δx tend vers zéro, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ ont, par hypothèse, des limites v' et u'. Par suite, $u\frac{\Delta v}{\Delta x}$ et $v\frac{\Delta u}{\Delta x}$ ont, respectivement, pour limites, uv' et vu'. Le troisième terme $\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$ se compose de deux facteurs : le premier qui a une limite finie u', le second qui tend vers zéro. Car v, admettant une dérivée, est une fonction continue (n° 116) et, par suite, son accroissement Δv tend vers zéro en même temps que Δx (n° 115, *Th.*). Le troisième terme a donc pour limite zéro. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ étant la somme de trois termes, ayant chacun une limite, a une limite (n° 111, *Th. I*) qui est la somme des limites de ses termes. Donc, y admet une dérivée qui est :

$$y' = uv' + vu'.$$

2° *Cas de plusieurs facteurs.* — Le théorème, étant vrai pour le cas de deux facteurs, s'étend facilement, de proche en proche, au cas de plusieurs facteurs.

Soient u, v, w trois fonctions de x, admettant des dérivées u', v', w'. D'après ce qui précède, le produit uv admet une dérivée qui est $uv' + vu'$. Or, on peut considérer le produit

$$y = uvw = (uv)\,w.$$

comme un produit de deux facteurs uv et w qui admettent chacun une dérivée. y admet donc une dérivée fournie par la règle précédente :

$$y' = (uv)w' + (uv)'w,$$

ou, en remplaçant $(uv)'$ par sa valeur,

$$y' = uvw' + uv'w + u'vw.$$

Le théorème, étant vrai pour trois facteurs, s'étendra au cas de quatre facteurs, en considérant le produit $uvws$ de quatre facteurs comme le produit des deux facteurs uvw et s, et en appliquant la règle établie pour deux facteurs ; et, ainsi de suite, de proche en proche.

Corollaire I. — *La dérivée du produit d'une fonction par une constante est égale au produit de la dérivée de la fonction par la constante.*

Car la dérivée d'une constante étant *nulle* (*Th. I*), on a, en appliquant la règle précédente,

$$(\mathrm{A}f(x))' = \mathrm{A}f'(x).$$

Corollaire II. — *Lorsqu'une fonction admet une dérivée, toute puissance entière et positive de cette fonction admet une dérivée que l'on obtient en multipliant cette puissance par son exposant, en diminuant, ensuite, son exposant d'une unité et en multipliant le tout par la dérivée de la fonction.*

En d'autres termes, on a :

$$(u^m)' = mu^{m-1}u'.$$

En effet, u^m (m entier et positif) est le produit de m facteurs égaux à u. D'après le théorème précédent, on obtient sa dérivée en faisant la somme des m produits obtenus en remplaçant, successivement, chaque facteur par sa dérivée. Or, chaque fois qu'on remplace un facteur u par sa dérivée, il reste un produit de $(m-1)$ facteurs égaux à u et d'un facteur égal à u'. La dérivée de u^m est donc égale à la somme de m termes égaux à $u^{m-1}u'$. Donc :

$$(u^m)' = mu^{m-1}u'.$$

Théorème IV. — *Lorsque deux fonctions admettent, chacune, une dérivée, leur quotient admet une dérivée, pourvu que le dénominateur soit différent de zéro. Cette dérivée est la fraction qui a pour numé-*

rateur l'excès du produit de la dérivée du numérateur par le dénominateur sur le produit de la dérivée du dénominateur par le numérateur, et pour dénominateur le carré du dénominateur du quotient proposé.

En d'autres termes, soient u et v deux fonctions admettant des dérivées u' et v', on a :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Donnons à x un accroissement Δx; soient Δu, Δv, les accroissements respectifs de u et v. Pour la valeur $x + \Delta x$ de la variable, le quotient

$$y = \frac{u}{v}$$

aura la valeur

$$\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

L'accroissement du quotient, qui correspond à l'accroissement Δx de x, est donc

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

ou

$$\Delta y = \frac{\Delta u . v - \Delta v . u}{(v + \Delta v) v}.$$

Divisons par Δx et nous aurons :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - \frac{\Delta v}{\Delta x} u}{(v + \Delta v) v}.$$

Lorsque Δx tend vers zéro, Δv tend aussi vers zéro, car v admettant une dérivée est nécessairement une fonction continue (nos 116 et 115). $v + \Delta v$ a donc pour limite v et le dénominateur de la fraction $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a une limite, différente de zéro, v^2. D'ailleurs, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ ont, par hypothèse, des limites u' et v', le numérateur a donc pour limite

(n° 111) $u'v - v'u$. Le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a, par suite (n° 111, *Th. V*) une limite qui est :

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Corollaire. — *Toute puissance entière, négative, d'une fonction qui admet une dérivée, admet aussi une dérivée donnée par la même règle que pour la puissance positive (Th. III, Cor. II).*

En effet, on a :

$$u^{-m} = \frac{1}{u^m}.$$

En appliquant le théorème précédent, on a :

$$(u^{-m})' = \frac{-(u^m)'}{u^{2m}} = -\frac{m \cdot u^{m-1} \cdot u'}{u^{2m}} = -\frac{mu'}{u^{m+1}}$$

d'où :

$$(u^m)' = -m \cdot u^{-m-1} \cdot u'.$$

Donc, pour obtenir la dérivée de u^{-m}, on multiplie cette fonction par l'exposant $-m$, on diminue l'exposant de u d'une unité, et on multiplie le tout par la dérivée u' de u; ce qui est la même règle que celle du corollaire II du théorème III.

Théorème V. — *Lorsqu'une fonction admet une dérivée, la racine carrée de cette fonction admet également une dérivée, pourvu que cette fonction soit différente de zéro. Cette dérivée est le quotient de la dérivée de la fonction par le double de sa racine carrée.*

Soit u une fonction de x admettant une dérivée, on a :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u \neq 0).$$

En effet, soit Δu l'accroissement de u, correspondant à un accroissement Δx de la variable. $y = \sqrt{u}$ subira un accroissement Δy qui est la différence de ses valeurs pour x et $x + \Delta x$.

Donc

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

ou

$$\Delta y = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

Divisons par Δx, il vient :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}.$$

Lorsque Δx tend vers zéro, Δu tend également vers zéro (car u, admettant une dérivée, est une fonction continue), $\sqrt{u+\Delta u}$ a pour limite (nº **111**, *Th. VI*) $\sqrt{u}$ et le dénominateur a une limite, différente de zéro, $2\sqrt{u}$. D'ailleurs, par hypothèse, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ a une limite u', donc $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a une limite qui est :

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

118. Dérivée de x^m. — *La dérivée de x^m est mx^{m-1}, m étant un entier positif ou négatif.*

Car, d'après les corollaires des théorèmes III et IV, la dérivée de x^m est égale au produit de mx^{m-1} par la dérivée de x, qui est égale à 1.

EXEMPLES :

$$(x^2)' = 2x; \quad (x^3)' = 3x^2.$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = - \quad x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

Dérivée d'un polynôme entier. — Tout polynôme entier en x est une somme de termes de la forme Ax^p. Or, la dérivée de Ax^p est égale au produit de A par la dérivée de x^p (*Th. III, Cor. I*), c'est donc pAx^{p-1}. La dérivée du terme constant est égale à zéro. La dérivée du polynôme est la somme des dérivées de chacun de ses termes (nº 117, *Th. II*), on en conclut donc la règle suivante :

La dérivée d'un polynôme entier en x *s'obtient en multipliant chaque terme par l'exposant de* x *dans ce terme et diminuant, ensuite, l'exposant de* x *d'une unité.*

Cette règle peut encore s'appliquer au terme constant, qui peut être considéré comme contenant x à l'exposant *zéro*.

EXEMPLES :

$$D_x (ax^2 + bx + c) = 2ax + b;$$
$$D_x (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c;$$
$$D_x (x^4 - 3x^2 + x) = 4x^3 - 6x + 1;$$
$$D_x (x^6 - 5x^4 + 3x^2 + 7) = 6x^5 - 20x^3 + 6x.$$

Puisque, dans la dérivation du polynôme, on diminue l'exposant de x dans chaque terme d'une unité, on diminue, par là même, le degré du polynôme d'une unité. Donc :

La dérivée d'un polynôme entier de degré m *est un polynôme entier de degré* (m — 1).

Si on prend encore une fois la dérivée, on diminue, encore une fois, le degré du polynôme d'une unité et, par suite, *la dérivée seconde est un polynôme de degré* (m — 2).

D'une manière générale, *la dérivée $p^{ième}$ est un polynôme de degré* $(m - p)$. En particulier, la dérivée $m^{ième}$ est un polynôme de degré $(m - m)$, c'est-à-dire de degré zéro.

La dérivée $m^{ième}$ est donc une constante.

La dérivée $(m + 1)^{ième}$ est, alors, égale à zéro, et il en est de même de toutes les dérivées suivantes. Donc :

Toutes les dérivées d'un polynôme de degré m, *d'ordre supérieur à* m, *sont nulles.*

EXEMPLES. — Soit

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

on a :

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c,$$
$$y'' = 6ax + 2b,$$
$$y''' = 6a,$$
$$y^{IV} = 0, \quad y^{V} = 0, \text{ etc...}$$

De même soit :

$$y = 2x^2 + 5x - 6;$$

on a :

$$y' = 4x + 5,$$
$$y'' = 4,$$
$$y''' = 0, \quad y^{IV} = 0, \text{ etc...}$$

Dérivée d'une fraction rationnelle. — Une fraction rationnelle, étant le quotient de deux polynômes entiers, puisque nous savons calculer la dérivée d'un polynôme, nous obtiendrons, de suite, la

dérivée de la fraction en appliquant le théorème IV (n° 117) :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Exemples :

$$D_x\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2};$$

$$D_x\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right) = \frac{a(a'x+b') - a'(ax+b)}{(a'x+b')^2} = \frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2};$$

$$D_x\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right) = \frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)^2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2};$$

$$D_x\left(\frac{x^2-5x+6}{2x^2+3x+7}\right) = \frac{(2x-5)(2x^2+3x+7)-(4x+3)(x^2-5x+6)}{(2x^2+3x+7)^2}$$
$$= \frac{12x^2-10x-53}{(2x^2+3x+7)^2};$$

$$D_x\left(\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\right) = \frac{(2ax+b)(a'x^2+b'x+c')-(2a'x+b')(ax^2+bx+c)}{(a'x^2+b'x+c')^2}$$
$$= \frac{(ab'-ba')x^2+2(ac'-ca')x+bc'-cb'}{(a'x^2+b'x+c')^2}.$$

Pour prendre la dérivée d'une expression fractionnaire rationnelle compliquée, on commence, ce qui est toujours facile (n° 50), par la mettre sous forme de fraction rationnelle. Ainsi, pour prendre la dérivée de l'expression

$$y = \frac{\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x+1}{x-1}}{x^2},$$

on la met, d'abord, sous la forme :

$$y = \frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{x^2(x^2-1)}$$

ou

$$y = \frac{2x^2+2}{x^4-x^2}.$$

On a, alors,

$$y' = \frac{4x(x^4-x^2)-(4x^3-2x)(2x^2+2)}{(x^4-x^2)^2}$$

ou :

$$y' = \frac{-4x^5-8x^3+4x}{(x^4-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{4x(1-2x^2-x^4)}{x^4(x^2-1)^2}.$$

Dérivées d'expressions irrationnelles. — Toute expression irrationnelle, ne contenant que des radicaux du second degré, s'obtient en combinant la variable x et des constantes par voie d'addition, de multiplication, de division ou d'extraction de racine carrée. Or, les propositions démontrées au n° 117, nous permettent de calculer la dérivée dans chacun de ces cas, nous pouvons donc calculer la dérivée de toute expression de cette nature.

Exemples. — Soit

$$y = \sqrt{x}.$$

On a

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pour calculer y'', nous considérons y' comme un quotient :

$$y'' = -\frac{1}{2}\frac{(\sqrt{x})'}{x}$$

et, en remplaçant $(\sqrt{x})'$ par sa valeur,

$$y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

Calculons encore y''' ; on a :

$$y''' = \frac{1}{4}\frac{(x\sqrt{x})'}{x^3}.$$

Or, d'après la règle de la dérivée du produit, on a :

$$(x\sqrt{x})' = \sqrt{x} + x(\sqrt{x})' = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}}.$$

D'où,

$$y''' = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}.$$

Soit encore,

$$y = \sqrt[4]{x}.$$

On peut écrire :

$$y = \sqrt[2]{\sqrt[2]{x}}.$$

Donc, en appliquant le théorème V (n°117) au cas de $u = \sqrt{x}$, on a :

$$y' = \frac{(\sqrt[2]{x})'}{2\sqrt[2]{\sqrt[2]{x}}} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt[2]{x}}}{2\sqrt[4]{x}},$$

$$y' = \frac{1}{4\sqrt[2]{x} \,.\, \sqrt[4]{x}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^2} \,.\, \sqrt[4]{x}}$$

$$y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$$

Voici d'autres exemples :

$$D_x\left(\sqrt{ax^2 + bx + c}\right) = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}};$$

$$D_x\left[\frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right] = \frac{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})'\sqrt{x} - (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})\,(\sqrt{x})'}{x}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})\,(x - \sqrt{x^2-1})}{2x\sqrt{x}\,(x^2-1)}.$$

EXERCICES

163. Démontrer que, si u est une fonction de x admettant une dérivée, $\sqrt[n]{u}$ admet également une dérivée qui est :

$$\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} = \frac{1}{n}\, u^{\frac{1}{n} - 1} \,.\, u'$$

(Voir *Exercice* 157); on en conclut que la dérivée de $u^{\frac{p}{q}}$ est $\frac{p}{q}\, u^{\frac{p}{q} - 1}\, u'$.

164. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \qquad \frac{\dfrac{1}{x} - 1}{\dfrac{1}{x} + 1} - x\sqrt{1 - x^2};$$

$$\sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}}; \qquad \sqrt{\frac{x^2 + px + q}{3x^2 + p}}; \qquad \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}};$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}; \qquad \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}.$$

165. Calculer les dérivées, de tous les ordres, des fonctions suivantes :

$$(x-a)^p, \quad \frac{1}{x-a},$$

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} \equiv \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right];$$

trouver l'expression générale de la dérivée $m^{\text{ième}}$ de chacune de ces fonctions.

166. Supposons qu'on ait développé et ordonné, suivant les puissances décroissantes de x, l'expression $(x+a)^m$ et soit :

$$(1) \qquad (x+a)^m \equiv x^m + A_1^{(m)}ax^{m-1} + A_2^{(m)}a^2x^{m-2} + A_3^{(m)}a^3x^{m-3} + \dots$$
$$\dots + A_{m-1}^{(m)}a^{m-1}x + a^m$$

ce développement, en désignant, d'une façon générale, par $A_p^{(m)}$ le coefficient de $a^p x^{m-p}$.

Si on remarque que la dérivée de $(x+a)^m$ s'écrit :

$$m(x+a)^{m-1} \equiv m[x^{m-1} + A_1^{(m-1)}ax^{m-2} + A_2^{(m-1)}a^2x^{m-3} + \dots$$
$$\dots + A_{m-2}^{(m-1)}a^{m-2}x + a^{m-1}],$$

avec la même notation, on obtiendra, en identifiant cette expression de la dérivée avec celle qu'on obtient en prenant la dérivée du second membre de l'identité (1), des formules de récurrence permettant de calculer les coefficients

$$A_1^{(m)},\ A_2^{(m)},\ A_3^{(m)} \dots A_{m-1}^{(m)},$$

connaissant les coefficients

$$A_1^{(m-1)},\ A_2^{(m-1)},\ A_3^{(m-1)}, \dots A_{m-2}^{(m-1)}.$$

Par suite, connaissant le développement de $(x+a)^2$, on aura celui de $(x+a)^3$; puis celui de $(x+a)^4$; et ainsi de suite, de proche en proche.

Trouver les expressions générales des coefficients

$$A_1^{(m)},\ A_2^{(m)}, \dots A_{m-1}^{(m)}.$$

(Voir l'*Exercice* 25).

CHAPITRE IV

APPLICATION DES DÉRIVÉES A L'ÉTUDE DE LA VARIATION DES FONCTIONS

119. Définitions. — I. On dit qu'une fonction $f(x)$ est *croissante, pour* $x = a$, si on peut déterminer un nombre positif ε assez petit pour que, pour toutes les valeurs de h (positives ou négatives) plus petites en valeur absolue que ε, l'on ait :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0.$$

Ceci revient à dire que la valeur $f(a)$ de la fonction, pour $x = a$, est plus petite que les valeurs qu'elle prend lorsque x est compris entre a et $a+\varepsilon$ et plus grande que les valeurs qu'elle prend de $a-\varepsilon$ à a.

II. Une fonction $f(x)$ est dite *décroissante, pour* $x = a$, lorsqu'on peut déterminer un nombre positif ε, assez petit, tel que, pour toutes les valeurs de h (positives ou négatives) plus petites en valeur absolue que ε, l'on ait :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0.$$

Ceci revient à dire que $f(a)$ est plus grand que les valeurs que prend la fonction quand x est compris entre a et $a+\varepsilon$ et plus petit que les valeurs de la fonction de $a-\varepsilon$ à a.

Remarque. — Il résulte, immédiatement, des définitions précédentes que, lorsqu'une fonction est croissante dans un intervalle, c'est-à-dire lorsqu'elle varie dans le même sens que la variable (Voir n° 31), elle est croissante pour toutes les valeurs comprises dans cette intervalle.

Mais, réciproquement, il n'est pas évident qu'une fonction qui est croissante, pour toutes les valeurs de x comprises dans un intervalle (a, b), varie dans le même sens que la variable, dans cet intervalle.

Il est, cependant, assez naturel d'*admettre* cette réciproque ; c'est ce que nous ferons dans cette étude élémentaire [1].

Nous *admettrons*, de même, que, lorsqu'une fonction est décroissante, pour toutes les valeurs de x comprises dans un intervalle, elle varie, dans cet intervalle, en sens contraire de la variable.

Théorème I. — *Lorsqu'une fonction* $f(x)$ *admet une dérivée positive, pour* $x = a$, *elle est croissante pour* $x = a$.

Par définition de la dérivée, on a

$$lim. \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right] = f'(a),$$

quand h tend vers zéro. On peut donc poser

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \alpha,$$

[1] Voici, d'ailleurs, comment on peut démontrer cette réciproque.

Soit $f(x)$ une fonction croissante pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle de a à b ($a < b$). Soient α et β deux nombres *quelconques*, compris dans cet intervalle. Il suffit de prouver que, si $\alpha < \beta$, on a aussi $f(\alpha) < f(\beta)$. D'après notre hypothèse, la fonction est croissante pour $x = \alpha$ et on peut déterminer un nombre positif ε tel que, pour toutes les valeurs de x comprises entre α et $\alpha + \varepsilon$, la fonction prenne des valeurs plus grandes que $f(\alpha)$. Si donc β est inférieur ou égal à $\alpha + \varepsilon$, la proposition est démontrée. Si non, posons

$$\alpha + \varepsilon = x_1.$$

La fonction étant croissante pour $x = x_1$, on pourra déterminer un nombre ε_1, positif, tel que pour les valeurs de x comprises entre x_1 et $x_1 + \varepsilon_1$, la fonction prenne des valeurs supérieures à $f(x_1)$ et, *a fortiori*, supérieures à $f(\alpha)$. Si β est inférieur ou égal à $x_1 + \varepsilon_1$, la proposition est démontrée. Si non, nous poserons, encore,

$$x_1 + \varepsilon_1 = x_2$$

et nous continuerons de la sorte. Il suffit de montrer, qu'au bout d'un certain nombre d'opérations, on parviendra à un nombre x_n tel que β soit inférieur ou égal à $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$ car, alors, on aura

$$f(\beta) > f(x_n) > f(x_{n-1}) > \cdots > f(x_1) > f(\alpha).$$

Supposons, en effet, qu'en continuant de la sorte on ne trouve jamais un nombre x_{n+1} supérieur ou égal à β. C'est qu'alors les nombres $x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}$, qui vont toujours en croissant et qui restent inférieurs à β, auraient une limite ξ, lorsque n croît indéfiniment, plus petite que β, et qu'on ne pourrait dépasser en raisonnant comme nous l'avons fait. Ceci est, évidemment, impossible, car, ξ étant compris dans l'intervalle (a,b), la fonction $f(x)$ serait croissante, pour $x = \xi$, et on pourrait déterminer un nombre positif η tel que la fonction prenne entre ξ et $\xi - \eta$ des valeurs inférieures à $f(\xi)$ et entre ξ et $\xi + \eta$ des valeurs supérieures à $f(\xi)$. Donc dès que x_n, qui a pour limite ξ, deviendrait supérieur à $\xi - \eta$, on pourrait prendre pour x_{n+1} une valeur égale ou supérieure à ξ ce qui est contraire à l'hypothèse. On pourrait donc dépasser le nombre ξ, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de l'existence de ξ. La limite ξ, inférieure à β, ne pouvant exister, il faut nécessairement qu'il existe un indice n tel que le nombre :

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$$

soit supérieur ou égal à β.

la quantité α tendant vers zéro en même temps que h. On peut, alors, déterminer un nombre positif ε tel que, lorsque h est, en valeur absolue, plus petit que ε, la valeur absolue de α soit plus petite que $f'(a)$ (qui est positif, par hypothèse). Pour toutes ces valeurs de h, le quotient

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

sera du signe de $f'(a)$ et, par suite, positif.

La fonction est donc croissante pour $x=a$.

Réciproque du théorème I. — *Lorsqu'une fonction est croissante, pour* x = a, *et qu'elle admet une dérivée, pour* x = a, *cette dérivée est positive ou nulle.*

Par définition de la croissance, pour $x=a$, on peut déterminer un nombre positif ε tel que, lorsque

$$|h| < \varepsilon,$$

l'on ait

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0,$$

$f(x)$ étant la fonction proposée. Or, quand h tend vers zéro, le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a, par hypothèse, une limite $f'(a)$. Ce quotient étant toujours positif, sa limite $f'(a)$ ne peut être que positive ou nulle [1].

Théorème II. — *Lorsqu'une fonction* f(x) *admet une dérivée négative, pour* x = a, *elle est décroissante pour* x = a.

Réciproque du théorème II. — *Lorsqu'une fonction est décroissante, pour* x = a, *et qu'elle admet une dérivée, pour* x = a, *cette dérivée est négative ou nulle.*

Les démonstrations de ces propositions sont identiques à celles des propositions précédentes.

Exemples. — La dérivée de $2x+1$ est 2. Cette dérivée est toujours positive, la fonction est donc croissante pour toute valeur de x.

La fonction x^2-2x+3 a pour dérivée $2(x-1)$. Cette dérivée est positive lorsque $x>1$ et négative lorsque $x<1$. La fonction est croissante

(1) En effet, si la limite d'une quantité variable est négative, on peut toujours faire atteindre à cette quantité une valeur assez voisine de sa limite pour qu'elle soit du signe de cette limite et, par suite, négative. Une quantité toujours positive ne saurait donc avoir une limite négative.

pour les valeurs de x plus grandes que 1 et décroissante pour les valeurs plus petites que 1.

La fonction $\frac{1}{x}$ a pour dérivée $-\frac{1}{x^2}$, qui est toujours négative. Cette fonction est donc toujours décroissante.

120. Définitions. — I. On dit qu'une fonction est *maxima*, pour $x = a$, si on peut déterminer un nombre positif ε tel que la valeur que prend la fonction pour $x = a$ soit plus grande que toutes les autres valeurs qu'elle prend lorsque x reste compris entre $a - \varepsilon$ et $a + \varepsilon$.

La valeur de la fonction, pour $x = a$, est ce qu'on appelle *un maximum* de cette fonction.

II. Une fonction est dite *minima*, pour $x = a$, si on peut déterminer un nombre positif ε tel que la valeur que prend la fonction pour $x = a$ soit plus petite que toutes les autres valeurs qu'elle prend lorsque x reste compris entre $a - \varepsilon$ et $a + \varepsilon$.

La valeur de la fonction, pour $x = a$, est ce qu'on appelle *un minimum* de cette fonction.

Au fond, ces deux définitions reviennent à dire que lorsqu'une fonction est maxima (ou minima), pour $x = a$, sa valeur, pour $x = a$, est plus grande (ou plus petite) que toutes les valeurs *voisines*.

Théorème. — *Lorsqu'une fonction est maxima ou minima, pour* x = a, *et qu'elle admet une dérivée, pour cette valeur de la variable, cette dérivée est nulle.*

En effet, la fonction étant maxima, pour $x = a$, $f(a - h)$ est plus petit que $f(a)$ lorsque h est positif et plus petit que ε, on a donc

$$f(a - h) - f(a) < 0$$

et, par suite,

$$\frac{f(a - h) - f(a)}{-h} > 0.$$

Au contraire, dans les mêmes conditions $(0 < h < \varepsilon)$, on a :

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} < 0.$$

Lorsque h tend vers zéro, les deux quotients

$$\frac{f(a - h) - f(a)}{-h} \quad \text{et} \quad \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

ont, par hypothèse, une limite commune $f'(a)$. Ces deux rapports étant de signes contraires, leur limite commune $f'(a)$ ne peut être que nulle, et on a :

$$f'(a) = 0.$$

La démonstration serait la même dans le cas du minimum.

Réciproquement, si la dérivée s'annule, en passant du signe $(+)$ *au signe* $(-)$, *quand* x *passe en croissant par* a, *la fonction est maxima pour* x = a.

Car la dérivée étant positive de $a - \varepsilon$ à a, la fonction est croissante (*Th. I*) et la dérivée étant négative de a à $a + \varepsilon$ la fonction est décroissante (*Th. II*).

De même, *si la dérivée s'annule en passant du signe* $(-)$ *au signe* $(+)$, *quand* x *passe en croissant par* a, *la fonction est minima pour* x = a.

Exemples. — La fonction

$$y = 3 + 4x - x^2$$

a pour dérivée

$$y' = 4 - 2x.$$

Lorsque x est plus petit que 2, la dérivée est positive, la fonction croît; lorsque x est plus grand que 2, la dérivée est négative, la fonction décroît; et, pour $x = 2$, la dérivée est nulle. La fonction est donc maxima pour $x = 2$. La valeur du maximum est :

$$y = 3 + 8 - 4 = 7.$$

La fonction

$$y = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

a pour dérivée

$$y' = 3x^2 - 4x + 1.$$

Cette dérivée s'annule pour $x = 1$ et $x = \frac{1}{3}$; elle est négative quand x est compris entre $\frac{1}{3}$ et 1, positive quand x est plus grand que 1 et elle s'annule pour $x = 1$. La fonction est donc minima pour $x = 1$. Le minimum est

$$y = 1 - 2 + 1 + 1 = 1.$$

On pourrait, d'ailleurs, remarquer que, pour $x = \frac{1}{3}$, la fonction est maxima.

Remarque I. — La dérivée d'une fonction s'annule, comme nous venons de le voir, lorsque cette fonction est maxima ou minima. Ce ne sont pas les seules circonstances où la dérivée s'annule acciden-

tellement. Lorsqu'une fonction est croissante ou décroissante, dans un intervalle, sa dérivée peut s'annuler dans cet intervalle (n° 119, *Récip. des Th. I* et *II*). Ainsi, la fonction $(x-a)^3$ a pour dérivée $3(x-a)^2$. Cette dérivée est toujours positive, sauf pour $x=a$, valeur pour laquelle elle est *nulle*. La fonction n'est cependant ni maxima ni minima pour $x=a$, car elle est croissante de $-\infty$ à a et de a à $+\infty$. Elle est donc toujours croissante de $-\infty$ à $+\infty$. Ce qui distingue le cas du maximum et du minimum, c'est que la dérivée s'annule *en changeant de signe*. Ainsi, dans l'exemple précédent, la dérivée s'annule, pour $x=a$, mais sans changer de signe, puisqu'elle est toujours positive, quand x est différent de a.

Remarque II. — Nous avons défini ce qu'on devait entendre par *maximum absolu* et *minimum absolu* (n° 97). Il est facile de voir qu'un maximum absolu est aussi un maximum, au sens plus général que nous venons de donner à ce mot. Car, si, parmi toutes les valeurs que peut prendre une fonction, il y en a une qui est plus grande que toutes les autres, cette valeur sera, *a fortiori*, plus grande que les valeurs voisines.

Pour distinguer les maxima et minima qui ne sont pas absolus de ceux qui le sont, on les nomme, souvent, maxima et minima *relatifs*.

Ainsi, dans les deux exemples précédents, la fonction $3+4x-x^2$ a un maximum absolu pour $x=2$ (Voir n° 97), tandis que la fonction x^3-2x^2+x+1 n'a qu'un maximum relatif pour $x=\frac{1}{3}$ et un minimum relatif pour $x=1$, car, comme nous le verrons plus loin (n° 122, *Exemple II*), cette fonction peut prendre toutes les valeurs possibles, de $-\infty$ à $+\infty$.

121. Signification géométrique de la dérivée. — Rappelons, d'abord, qu'en géométrie analytique, toute équation du premier degré en x et y représente une droite (Voir les n°s 68 à 71). Si on résoud cette équation par rapport à y et qu'on la met sous la forme

$$y=ax+b,$$

le coefficient a, de x, est ce qu'on appelle le *coefficient angulaire*. La parallèle menée par l'origine à cette droite a, comme nous le savons (n° 68), pour équation

$$y=ax.$$

Le coefficient b est ce qu'on appelle *l'ordonnée à l'origine*, car c'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe oy $(x=0)$. b fixe donc *la position d'un point* de la droite. Le coefficient angu-

laire a fixe, ensuite, la *direction* de la droite, car, quand on connaît a, on connaît la parallèle menée par l'origine à cette droite.

La grandeur du coefficient angulaire de la droite, renseigne sur la grandeur de l'angle que fait cette droite avec l'axe ox. En effet, pour construire la parallèle $y = ax$, menée par l'origine des coordonnées, à la droite, on construit le point A dont les coordonnées sont 1 et a (*fig.* 37), c'est-à-dire qu'on prend, sur ox, $\overline{OB} = 1$, puis, sur la parallèle BC à oy, $\overline{BA} = a$. Si a est positif, le point A est au-dessus de ox et, lorsque a varie de 0 à $+\infty$, le point A parcourt BC, depuis B, en s'éloignant indéfiniment du côté de C. Donc, quand a varie de 0 à $+\infty$, l'angle xOA croît depuis 0 jusqu'à 90°; car, quand A s'éloigne indéfiniment, la droite OA tend à prendre la position oy parallèle à BC. Si a est négatif, le point A est en A' au-dessous de ox. Convenons, alors, de considérer l'angle xOA' comme négatif, c'est-à-dire convenons de considérer comme négatifs les angles situés au-dessous de ox. Avec cette convention, quand a croît de $-\infty$ à 0, le point A', d'abord infiniment éloigné sur BC, vers le bas, se déplace dans le sens BC, pour arriver en B. La droite OA' part donc de la position oy' pour arriver à la position ox, et l'angle A'Ox varie de $-90°$ à 0.

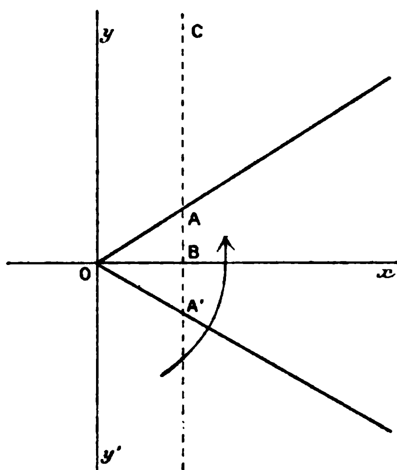


Fig. 37.

En résumé, quand a croît de $-\infty$ à $+\infty$, la demi-droite OA tourne toujours dans le même sens depuis la position oy' jusqu'à la position oy et l'angle xOA (avec notre convention de signe) croît de $-90°$ à $+90°$. En d'autres termes, l'angle xOA varie dans le même sens que a [1].

[1] En trigonométrie, le coefficient angulaire a un sens très précis. En effet, dans le triangle rectangle OBA (fig. 37) on a :

$$\overline{BA} = \overline{OB}.tg\alpha,$$

en désignant par α l'angle xOA. Or,

$$\overline{BA} = a, \quad \overline{OB} = 1;$$

donc,

$$a = tg\alpha.$$

Le coefficient angulaire d'une droite est donc égal à la tangente trigonométrique de l'angle que fait cette droite avec l'axe ox.

Une droite de coefficient angulaire *nul* est *parallèle à ox*.

Quand le coefficient angulaire *croît indéfiniment*, la droite tend à devenir *parallèle à oy*.

Lorsque le coefficient angulaire est égal à $+1$, le point A est sur la bissectrice de l'angle *xoy* et la droite est *parallèle à la bissectrice de l'angle* xoy.

Lorsque le coefficient angulaire est égal à -1, la droite est *parallèle à la bissectrice de l'angle* xoy'.

Théorème. — *Lorsqu'une fonction admet une dérivée, pour une certaine valeur de la variable,* $x = x_0$, *et qu'on représente la variation de cette fonction par une courbe, cette courbe admet une tangente au point d'abcisse* x_0 *et le coefficient angulaire de cette tangente est la valeur de la dérivée de la fonction, pour* $x = x_0$.

Rappelons, d'abord, la définition de la tangente. Soit C (*fig.* 38) une courbe et M un point de cette courbe. Soit M' un point, pris sur

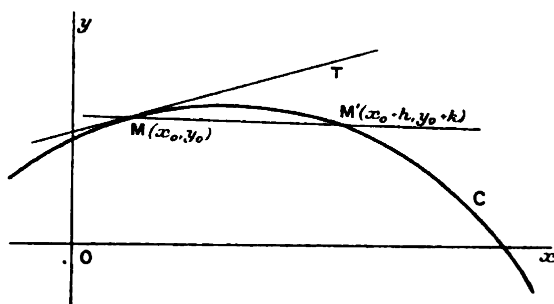


FIG. 38.

la courbe, très voisin du point M. Joignons MM'. Si, lorsque le point M' se rapproche indéfiniment du point M, en suivant la courbe C, la droite MM' a une limite MT, cette limite est ce qu'on appelle la *tangente*, à la courbe, *au point* M.

Cela étant, soit y une fonction de la variable x. Soit y_0 la valeur de y, pour $x = x_0$, et M le point correspondant de la courbe C qui représente la variation de la fonction (*fig.* 38). Donnons à x un accroissement h et soit k l'accroissement correspondant de y. Pour $x = x_0 + h$ on aura $y = y_0 + k$. Soit M' le point de la courbe de coordonnées $x_0 + h$ et $y_0 + k$. Cherchons le coefficient angulaire a de la droite MM'.

Soit

$$y = ax + b$$

l'équation de la droite MM'. Puisque les deux points M et M' sont sur cette droite, on a

$$y_0 = ax_0 + b$$

et

$$y_0 + k = a(x_0 + h) + b;$$

d'où, en retranchant la première égalité de la seconde,

$$k = ah,$$

ou

$$a = \frac{k}{h}.$$

Le coefficient angulaire de la droite MM' est donc $\frac{k}{h}$. Or, quand h tend vers zéro, k tend vers zéro (car y est une fonction continue, puisqu'elle admet une dérivée), donc le point M' se rapproche indéfiniment du point M. D'ailleurs, par hypothèse, le coefficient angulaire $\frac{k}{h}$ de MM' a une limite, quand h tend vers zéro, qui est la valeur y_0' de la dérivée de y, pour $x = x_0$. Il en résulte que la droite MM' a une limite, quand M' se rapproche indéfiniment du point M, et que cette limite MT a pour coefficient angulaire y'_0, c'est-à-dire la valeur de la dérivée de la fonction, pour $x = x_0$.

Corollaire I. — *Lorsqu'une fonction est maxima ou minima, et qu'elle admet une dérivée, la tangente, au point correspondant de la courbe représentative, est parallèle à* ox.

Car, si la dérivée (et, par suite, la tangente) existe, cette dérivée est *nulle*. Le coefficient angulaire de la tangente est donc nul et cette tangente est parallèle à ox.

Corollaire II. — *Lorsque la dérivée d'une fonction est infiniment grande, la tangente, à la courbe représentative, est parallèle à oy.*

Car le coefficient angulaire de la tangente étant infiniment grand, cette tangente est parallèle à oy.

Le théorème que nous venons d'établir est du plus haut intérêt, puisqu'il permet de construire, en chaque point de la courbe représentative de la fonction, la tangente en ce point. Le tracé de la courbe est, dans ces conditions, très exactement déterminé.

122. Marche à suivre pour étudier la variation d'une fonction. — Pour étudier la variation d'une fonction, on commence par rechercher dans quels intervalles il faut faire varier la variable x pour que la fonction ait des valeurs bien déterminées et soit continue.

Ces intervalles déterminés, on calcule la dérivée de la fonction (si

elle en a une). On recherche, ensuite, dans les intervalles de continuité, les valeurs pour lesquelles la dérivée est nulle et celles pour lesquelles elle devient infiniment grande. On range ces valeurs particulières de la variable par ordre de grandeur croissante et on forme, ainsi, des intervalles consécutifs dans chacun desquels la dérivée conserve un signe constant. Le signe de la dérivée, dans ces intervalles, donne le sens de la variation de la fonction.

On calculera les valeurs particulières de la fonction : ses maxima et minima, ses valeurs pour $x = +\infty$ ou $x = -\infty$; et, enfin, on construira la courbe représentative de la variation.

Pour avoir une détermination plus exacte de la courbe représentative, il sera bon de calculer la valeur que prend y pour $x = 0$, ce qui donnera le point où la courbe coupe l'axe oy. De même, on calculera, *lorsque cela sera possible*, les valeurs de x pour lesquelles y s'annule, et on aura, ainsi, les points d'intersection de la courbe avec ox.

Nous allons d'abord donner des exemples de fonctions qui sont toujours continues quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Exemple I. — *Étudier la variation de la fonction*

$$y = 3 + 4x - x^2.$$

Cette fonction est bien déterminée et continue pour toute valeur de x. Sa dérivée est :

$$y' = 4 - 2x,$$

qui change de signe pour $x = 2$.

Quand x croît de $-\infty$ à 2, la dérivée est positive, la fonction croît depuis $-\infty$ à un maximum 7. x croissant de 2 à $+\infty$, la dérivée est négative, la fonction décroît depuis 7 jusqu'à $-\infty$. Car il faut remarquer que, pour $x = \pm\infty$, le polynôme est du signe de son terme de degré le plus élevé $-x^2$ et infiniment grand (n° 113, *App. II*).

x	y'	y
$-\infty$		$-\infty$
	$+$	croît
2	0	7 (*max.*)
	$-$	décroît
$+\infty$		$-\infty$

Il est, toujours, commode, pour la lecture des résultats, de les résumer dans un tableau.

Dans ce tableau, les valeurs de la variable x sont inscrites, de haut en bas, dans la colonne x, par ordre de grandeur croissante. Dans la colonne y' sont inscrits, en regard de chaque intervalle, les signes correspondants de la dérivée y'. Enfin, la colonne y indique, pour chaque intervalle, le sens de la variation de la fonction et donne les valeurs remarquables de cette fonction.

La courbe représentative est, comme nous le savons (n° 98), une parabole. Cette parabole coupe l'axe des y au point $x = 0$, $y = 3$ et coupe l'axe des x en deux points dont les abcisses sont : $2 \pm \sqrt{7}$ (*fig.* 39).

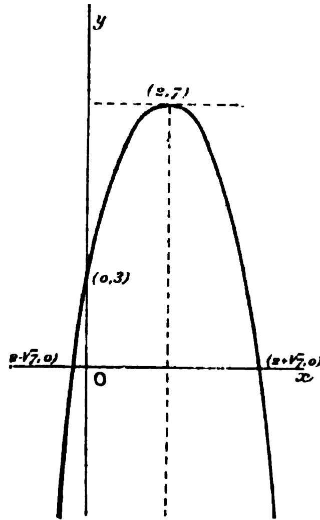


Fig. 39.

Exemple II. — *Étudier la variation de la fonction*

$$y = x^3 - 2x^2 + x + 1.$$

Cette fonction est bien déterminée et continue pour toute valeur de x. Sa dérivée est

$$y' = 3x^2 - 4x + 1.$$

Cette dérivée *s'annule* pour $x = 1$ et $x = \frac{1}{3}$.

Nous avons donc trois intervalles à considérer : $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ et $(1, +\infty)$ dans chacun desquels la dérivée conserve un signe constant.

x croissant de $-\infty$ à $\frac{1}{3}$, la dérivée est positive, la fonction croît. D'ailleurs, pour $x = -\infty$ (n° 113, *App.* II), le polynôme est infiniment grand et du signe de son terme de degré le plus élevé x^3, donc négatif. Pour $x = \frac{1}{3}$, il est, maximum, égal à $\frac{31}{27}$. Donc, y croît de $-\infty$ à $\frac{31}{27}$.

Quand x croît de $\frac{1}{3}$ à 1, la dérivée est négative : la fonction décroît de $\frac{31}{27}$ à un minimum 1.

Enfin, x croissant de 1 à $+\infty$, la dérivée est positive et la fonction croît de 1 à $+\infty$ (car, pour $x = +\infty$, x^3 est positif).

La discussion se résume dans le tableau suivant :

x	y'	y
$-\infty$		$-\infty$
	$+$	croît
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{31}{27}$ (*max.*)
	$-$	décroît
1	0	1 (*min.*)
	$+$	croît
$+\infty$		$+\infty$

Construisons la courbe représentative de la variation.

x croissant de $-\infty$ à $\frac{1}{3}$, on a une branche de courbe ascendante AB (*fig.* 40), partant de l'infini, à gauche en bas, et montant au maximum (relatif) B $\left(\frac{1}{3}, \frac{31}{27}\right)$. Cette branche coupe l'axe des x et l'axe des y. x variant de $\frac{1}{3}$ à 1, la courbe redescend de B au minimum C (1, 1); pour remonter, quand x croît de 1 à $+\infty$, de C jusqu'à l'infini à droite, en haut.

Aux points B et C la tangente est horizontale (parallèle à ox), puisque $y' = 0$. Quand x croît indéfiniment, y' croît indéfiniment, donc les branches infinies BA et CO tendent à devenir parallèles à oy, puisque la tangente à ces branches tend à devenir parallèle à oy quand le point de contact s'éloigne indéfiniment.

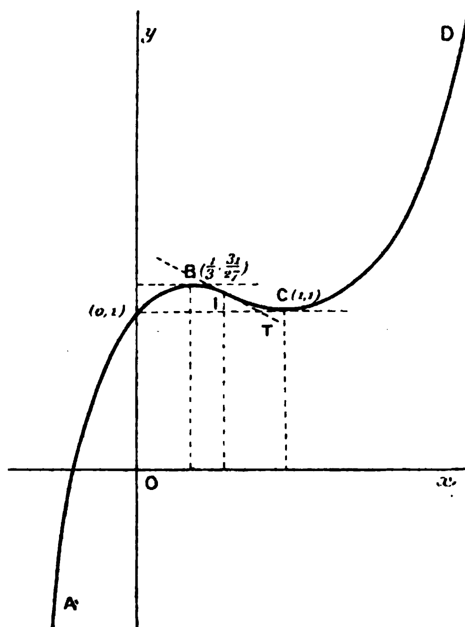


FIG. 40.

Remarque I. — La courbe ne coupe qu'*une seule fois* l'axe ox. Il n'y a donc qu'une seule valeur de x qui annule y. En d'autres termes, l'équation du troisième degré

$$x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$$

n'a qu'une seule racine, qui est *négative*.

Remarque II. — La courbe a un *point d'inflexion* I, entre les deux points B et C. Ce point est facile à déterminer.

D'une façon générale, on peut voir que, chaque fois que la dérivée seconde y'' s'annule, en changeant de signe, la courbe a une *inflexion* au point correspondant, c'est-à-dire *traverse sa tangente*. En effet, le signe de y'' indique dans quel sens varie la dérivée y'. Or, y' varie dans le même sens que l'angle de la tangente à la courbe avec ox, puisque y' est le coefficient angulaire de cette tangente (Voir n°121); donc l'angle que fait la tangente à la courbe, avec ox, croît ou décroît suivant que y'' est positif ou négatif. Si y'' s'annule, en changeant de signe, l'angle de la tangente avec ox change le sens de sa variation.

Ainsi, dans l'exemple actuel, on a

$$y'' = 2\,(3x - 2).$$

Quand x croît de $-\infty$ à $\frac{2}{3}$, y'' est négatif; l'angle que fait la tangente avec ox décroît, la tangente tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour $x = \frac{2}{3}$, la tangente cesse de tourner dans ce sens et, quand x croît de $\frac{2}{3}$ à $+\infty$, l'angle que fait la tangente avec ox croît, la tangente tourne dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre. Ce changement dans le sens de la rotation de la tangente produit, comme il est aisé de le voir sur une figure, une inflexion. Donc, ici, la courbe a une inflexion au point I dont les coordonnées sont :

$$x = \frac{2}{3}, \qquad y = \frac{29}{27}.$$

Exemple III. — Variation du trinôme bicarré.

Soit $$y = ax^4 + bx^2 + c$$

un trinôme bicarré. — Il est continu, pour toute valeur de x, et admet une dérivée :

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\,(2ax^2 + b).$$

On voit, de suite, qu'il y a lieu de distinguer deux cas suivant que a et b sont de même signe ou non. [Nous n'examinerons que le cas où a est *positif*, car le cas de *a négatif* est tout à fait analogue.]

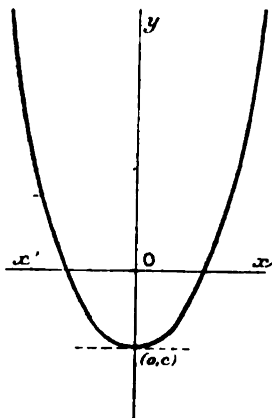


Fig. 41.

1° Soit $b \geqslant 0$. — La dérivée y' ne s'annule que pour $x = 0$, car le facteur $2ax^2 + b$ reste toujours positif.

Pour $x = \pm\infty$, le trinôme est du signe de son terme de degré le plus élevé ax^4, donc positif.

Lorsque x croît de $-\infty$ à 0, la dérivée est négative, y décroît de $+\infty$ à c, qui est un minimum absolu. x croissant de 0 à $+\infty$, y reprend toutes les valeurs précédentes en sens inverse et croît de c à $+\infty$.

La courbe représentative (*fig.* 41) a la forme d'une parabole ayant pour axe oy (mais ce n'est pas une parabole). Elle coupe ou ne coupe pas ox suivant que le trinôme a ou n'a pas de racines, c'est-à-dire suivant que c est négatif ou positif.

2° Soit $b < 0$. — La dérivée y' s'annule pour trois valeurs différentes de x :

$$x = 0, \qquad x = +\sqrt{-\frac{b}{2a}}, \qquad x = -\sqrt{-\frac{b}{2a}}.$$

Quand x croît de $-\infty$ à $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, la dérivée est négative, la fonction y

décroît de $+\infty$ à $\frac{4ac - b^2}{4a}$, qui est un minimum absolu. x croissant de $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ à 0, la dérivée est positive et y croît de $\frac{4ac - b^2}{4a}$ à c, qui est un maximum relatif.

Lorsque x croît, à partir de zéro, le trinôme reprend, en sens inverse, toutes les valeurs précédentes, car, si on donne à x des valeurs égales et de signes contraires, le trinôme prend la même valeur. Ainsi, x croissant de 0 à $+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, y décroît de c à $\frac{4ac - b^2}{4a}$; et x croissant de $+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ à $+\infty$, y croît de $\frac{4ac - b^2}{4a}$ à $+\infty$.

Cette discussion se résume dans le tableau suivant :

$(a > 0)$

x	y'	y
$-\infty$		$+\infty$
	$-$	décroît
$-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	0	$\frac{4ac - b^2}{4a}$ (*min. abs.*)
	$+$	croît
0	0	c (*max. relat.*)
	$-$	décroît
$+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	0	$\frac{4ac - b^2}{4a}$ (*min. abs.*)
	$+$	croît
$+\infty$		$+\infty$

La courbe représentative est symétrique par rapport à oy; car, si un point M, de coordonnées x et y (*fig.* 42), appartient à la courbe, le point M′ de coordonnées $-x$ et y, qui est le symétrique par rapport à oy, appartient aussi à la courbe.

x variant de $-\infty$ à $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, on a une branche de courbe infinie AB descendant d'un point très éloigné, à gauche en haut, au minimum B.

Puis, x croissant de $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ à 0, la courbe remonte du minimum B à un maximum C, sur oy.

x croissant, ensuite, à partir de zéro, on a la branche CB'A' symétrique de la précédente par rapport à oy (1).

Les tangentes en B, C et B' sont parallèles à ox.

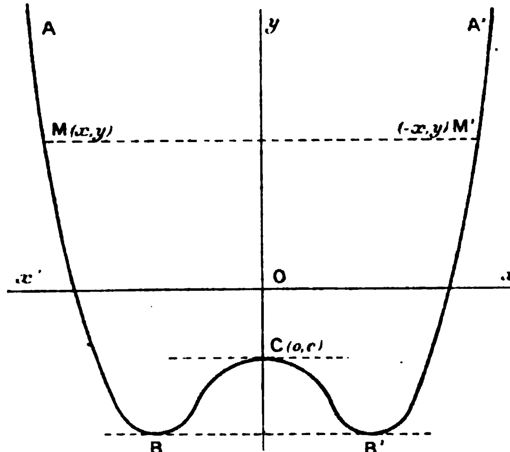


Fig. 42.

123. Exemple IV. — *Étudier la variation de la fonction*

$$y = \frac{x+1}{x-1}.$$

Cette fonction est continue, pour toutes les valeurs de x, *sauf pour* $x = 1$. Elle admet une dérivée qui est :

$$y' = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

Cette dérivée est toujours *négative*, donc la fonction est toujours *décroissante*.

Pour $x = \pm \infty$, la fraction se présente sous la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Mais nous savons (n° 113, *App. III*) que, quand x croît indéfiniment, y tend vers 1, qui est le rapport des coefficients des termes de degré le plus élevé.

Donc, x croissant de $-\infty$ à 1, y décroît de 1 à $-\infty$; car, quand x

(1) Dans la figure 42 nous avons représenté la courbe coupant ox en deux points. Suivant les grandeurs numériques des coefficients a, b, c, la courbe peut : ou bien ne pas rencontrer l'axe ox, ou le couper en deux points ou le couper en quatre points. Car, $\frac{b}{a}$ étant négatif, le trinôme bicarré peut avoir, suivant les cas, 0, 2 ou 4 racines.

tend vers 1 par des valeurs plus petites que 1, la fraction croît indéfiniment par valeurs négatives.

Lorsque x passe par la valeur 1, y change de signe et passe brusquement de $-\infty$ à $+\infty$.

Enfin, quand x croît de 1 à $+\infty$, y décroît de $+\infty$ à 1.

Cette discussion se résume dans le tableau suivant :

x	y'	y
$-\infty$		1
	$-$	décroît
1		$-\infty$ / $+\infty$
	$-$	décroît
$+\infty$		1

Dans ce tableau, nous avons tracé une barre horizontale en face de la valeur 1, de x, pour indiquer que, pour $x = 1$, y' et y n'ont pas des valeurs bien déterminées.

Pour construire la courbe représentative, traçons (*fig.* 43) la droite AB qui a pour équation

$$y = 1.$$

Soit N un point de la courbe et NR la perpendiculaire à ox, qui coupe AB en H. On a, évidemment,

$$\overline{NH} = \overline{RH} - \overline{RN} = 1 - y.$$

Or, lorsque x croît indéfiniment, y tend vers 1. Ceci prouve que, lorsque le point R s'éloigne, indéfiniment, sur $x'x$, la distance NH, du point N de la courbe à la droite AB, tend vers zéro. On dit, alors, que la droite AB est *asymptote* à la branche de courbe infinie.

Pour $x = -\infty$, le point R est infiniment éloigné dans la direction ox' : on a donc une branche de courbe asymptote à AB à gauche (d'ailleurs au-dessous, car $y < 1$). Lorsque x croît de $-\infty$ à 1, y décroît de 1 à $+\infty$ et la branche de courbe NM, asymptote à AB, descend.

Pour nous rendre compte de ce qui se passe lorsque x tend vers 1, traçons d'abord la droite DEC, parallèle à oy, qui a pour équation

$$x = 1.$$

Donnons à x une valeur plus petite que 1, mais très voisine de 1, y aura une valeur négative très grande en valeur absolue et nous obtiendrons un

point M très éloigné vers le bas. Soit P le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur ox et Q le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur CD; P est à gauche de E. Lorsque x tend vers 1, le point P se rapproche de plus en plus du point E, et, comme on a, évidemment,

$$PE = MQ,$$

la distance MQ, du point M à la droite CD, tend vers zéro, D'ailleurs, puisque y croît indéfiniment, MP croît indéfiniment. Donc, lorsque x tend vers 1 en

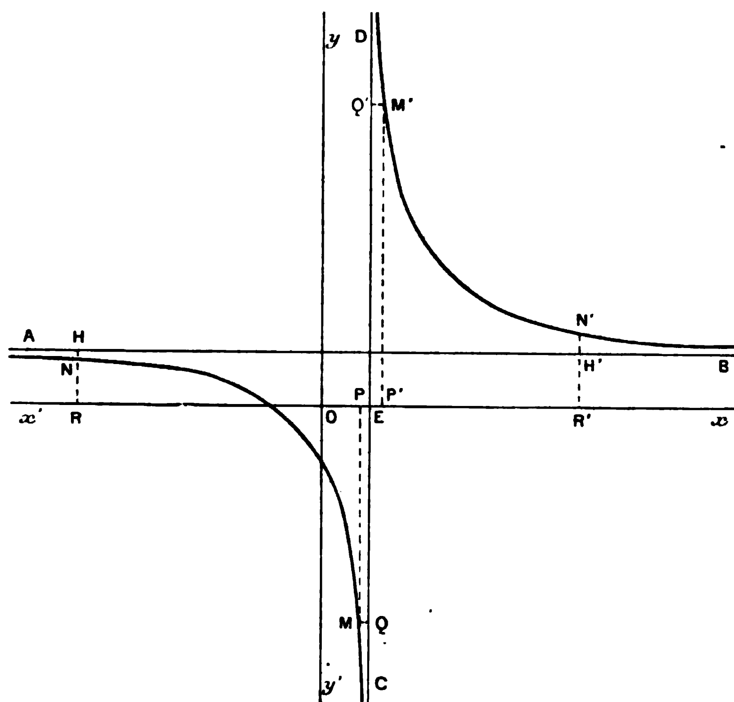


Fig. 13.

croissant, le point M descend, en s'éloignant indéfiniment, tandis que sa distance à CD tend vers zéro : la branche de courbe est *asymptote* à CD.

Supposons, ensuite, qu'on donne à x une valeur $\overline{OP'}$ un peu supérieure à 1. Le point P' sera à droite de E et on aura un point M' de la courbe très éloigné vers le haut, car y est très grand et positif. Si on fait tendre x vers 1, en *décroissant*, le point P' tendra vers E et la distance M'Q' de M' à CD tendra vers zéro. Comme M'P' croît indéfiniment, le point M' s'éloignera indéfiniment. On a donc une branche de courbe *asymptote* à CD en haut et à gauche : x croissant, à partir de 1, la branche descend asymptote à CD.

Lorsque x croît indéfiniment ($x = +\infty$) la branche de courbe devient, en

descendant, asymptote à AB. En effet, soit N′ le point de la courbe qui correspond à une valeur positive très grande de x. Soient H′ et R′ les points d'intersection de la parallèle à oy, menée par N′, avec AB et ox. On a :

$$\overline{H'N'} = \overline{R'N'} - \overline{R'H'} = y - 1.$$

Donc, lorsque x croît indéfiniment, H′N′ tend vers zéro, puisque y tend vers 1. Le point N′ s'éloigne indéfiniment tandis que sa distance à AB tend vers zéro. Le point N′ décrit une branche de courbe infinie, dite asymptote à AB.

En résumé, la courbe représentative se compose de deux branches de courbe MN et M′N′ toutes deux descendantes, toutes deux infinies et toutes deux asymptotes aux droites AB et CD. (Cette courbe est, d'ailleurs, une hyperbole.)

Remarque. — L'étude de la variation d'une fraction quelconque de la forme

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'} \qquad (a' \neq 0),$$

conduit à des résultats tout à fait semblables aux précédents. La courbe a toujours deux asymptotes : l'une, parallèle à oy, qui a pour équation

$$a'x + b' = 0,$$

l'autre, parallèle à ox, qui a pour équation

$$y = \frac{a}{a'}.$$

La fonction *varie toujours dans le même sens*, car sa dérivée

$$y' = \frac{ab' - ba'}{(a'x + b')^2}$$

conserve toujours le signe de $ab' - ba'$.

Il n'y a exception que si $ab' - ba' = 0$, mais, alors, on a :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},$$

et la fonction y est *constante* et égale à $\frac{a}{a'}$.

L'exemple précédent nous a montré une courbe qui a des branches infinies telles que, lorsqu'un point s'éloigne indéfiniment sur une telle branche, sa distance à une droite fixe (parallèle à ox ou non) tende vers zéro. Cette droite fixe est ce que nous avons appelé une *asymptote*. Ceci nous conduit à dire quelques mots sur ce sujet.

Définition. — On dit qu'une branche de courbe C, qui a des points infiniment éloignés, est *asymptote* à une droite AB (*fig.* 44) lorsque la distance MH, d'un point quelconque M de cette branche de courbe à la droite AB, tend vers zéro, lorsque le point M s'éloigne indéfiniment sur la branche de courbe.

1° *Si la droite* AB *n'est pas parallèle à* oy, *il faut et il suffit, pour qu'elle soit asymptote, que la différence* MM' *entre l'ordonnée du point* M

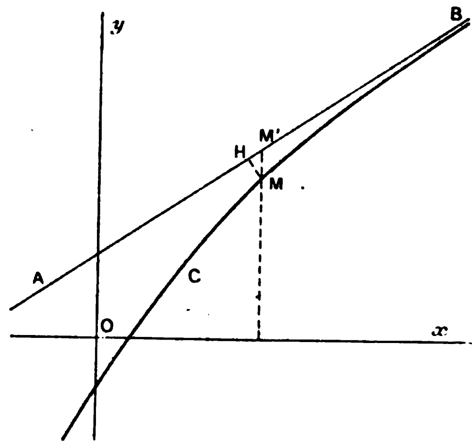


Fig. 44.

de la courbe et l'ordonnée du point M' *de cette droite, qui a même abcisse, tende vers zéro quand* M *s'éloigne indéfiniment* (*fig.* 44).

En effet, le triangle MM'H reste toujours semblable à lui-même et, par conséquent, le rapport $\frac{MM'}{MH}$ reste constant. Soit k sa valeur, on a :

$$MM' = k \,.\, MH.$$

Ce qui prouve que MM' tend vers zéro en même temps que MH, et réciproquement.

2° *Si la droite* AB *est parallèle à* oy, *son équation est de la forme*

$$x = a,$$

et, pour qu'une branche soit asymptote à cette droite, il faut et il suffit, que y *croisse indéfiniment, quand* x *tend vers* a.

Soit, en effet, AB une asymptote parallèle à *oy* (*fig.* 45), MH la distance d'un point M de la branche de courbe à l'asymptote ; MH est parallèle à *ox*. Abaissons MP perpendiculaire sur *ox*, on a :

$$MH = PA.$$

Or,

$$\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA} = x - a.$$

Donc, pour que MH tende vers zéro, il faut et il suffit que $x - a$ tende vers zéro. Lorsque le point M s'éloigne indéfiniment, y croît indéfiniment et x tend vers a.

Réciproquement, si y croît indéfiniment, lorsque x tend vers a, le point M s'éloigne indéfiniment, MH tend vers zéro et M décrit une branche de courbe asymptote à la droite AB.

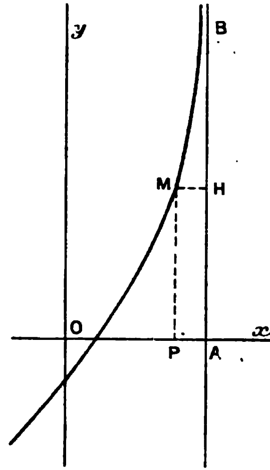


FIG. 45.

D'ailleurs, il faut remarquer que le signe de y indique à quelle extrémité de la droite BA la courbe est asymptote.

124. Exemple V. — *Étudier la variation de la fonction*

$$y = \frac{x-1}{x^2 - 2x + 5}.$$

Comme le dénominateur n'a pas de racines, cette fraction est finie et continue pour toute valeur de x et admet une dérivée :

$$y' = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 - 2x + 5)^2}.$$

Cette dérivée s'annule pour $x = 3$ et $x = -1$, qui sont les racines du numérateur : elle est donc négative quand x n'est pas compris entre ces racines et positive quand x est compris entre les racines -1 et 3.

La valeur de la fraction, pour $x = \pm \infty$, est égale à zéro (n° 113, *App. III*) ; car le numérateur est de degré inférieur au degré du dénominateur.

Lorsque x croît de $-\infty$ à -1, la dérivée est négative ; la fonction décroît depuis zéro jusqu'à un minimum (absolu) $-\frac{1}{4}$.

x croissant, ensuite, de -1 à 3, la dérivée est positive ; y croît du minimum $-\frac{1}{4}$ à un maximum (absolu) $+\frac{1}{4}$.

Enfin, x variant de 3 à $+\infty$, la dérivée est négative ; y décroît de $\frac{1}{4}$ à zéro.

Voici le tableau qui résume cette discussion :

x	y'	y
$-\infty$		0
	$-$	décroît
-1	0	$-\frac{1}{4}$ (*min*)
	$+$	croît
3	0	$+\frac{1}{4}$ (*max*)
	$-$	décroît
$+\infty$		0

La courbe représentative (*fig.* 46) se compose, d'abord, d'une branche infinie qui part asymptote à l'axe des x, puisque y tend vers *zéro* quand x

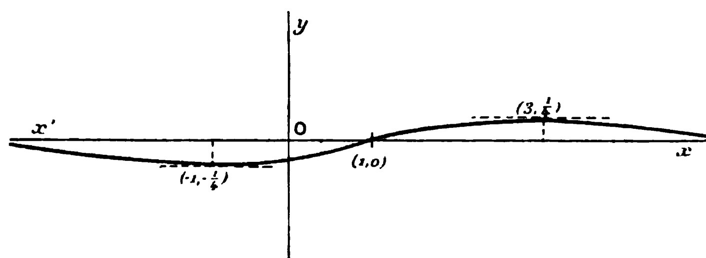


Fig. 46.

croît indéfiniment, et qui descend jusqu'au minimum $\left(x = -1, y = -\frac{1}{4}\right)$. La courbe remonte, ensuite, jusqu'à un maximum $\left(x = 3, \quad y = \frac{1}{4}\right)$ en coupant l'axe des y au point $x = 0$, $y = -\frac{1}{5}$ et l'axe des x au point $x = 1$, $y = 0$. Enfin la courbe redescend pour redevenir asymptote à ox, puisque y tend vers 0, quand x croît indéfiniment (n° 123, 1°).

Exemple VI. — *Étudier la variation de la fonction*

$$y = \frac{4x^2 - 12x + 5}{x^2 - 3x + 2}.$$

Le dénominateur de cette fraction s'annule pour $x = 1$ et $x = 2$, cette fraction est donc continue, pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 1$ et $x = 2$. Elle admet une dérivée qui est :

$$y' = \frac{6x - 9}{(x^2 - 3x + 2)^2}.$$

Cette dérivée s'annule pour $x = \frac{3}{2}$. Les valeurs remarquables, pour x, sont donc, par ordre de grandeur croissante : $1, \frac{3}{2}$ et 2.

Les deux termes de la fraction étant de même degré, y a pour limite 4, qui est le rapport des coefficients des termes en x^2, lorsque x croît indéfiniment (nº 113, *App. III*).

Cela étant, lorsque x croît de $-\infty$ à 1, la dérivée est négative; y décroît de 4 à $-\infty$ car, pour $x = 1$, le numérateur de y est négatif (-3) et, pour une valeur de x un peu plus petite que 1, le dénominateur est voisin de zéro et *positif* (1).

Quand x passe par la valeur 1, y passe, brusquement, de $-\infty$ à $+\infty$, car le dénominateur change de signe.

x croissant de 1 à $\frac{3}{2}$, la dérivée est toujours négative et la fonction décroît de $+\infty$ à un minimum relatif qui est 16.

Lorsque x croît de $\frac{3}{2}$ à 2, la dérivée est positive; y croît de 16 à $+\infty$ car, pour $x = 2$, le numérateur de y a la valeur négative -15 et, pour une valeur de x un peu plus petite que 2, le dénominateur est voisin de zéro et négatif.

Quand x passe par la valeur 2, y passe, brusquement, de $+\infty$ à $-\infty$, puisque le dénominateur s'annule en changeant de signe.

Enfin, x croissant de 2 à $+\infty$, la dérivée est positive et y croît depuis $-\infty$ pour tendre vers la valeur 4.

Voici le tableau qui résume cette discussion :

x	y'	y
$-\infty$		4
	$-$	décroît
		$-\infty$
1		
		$+\infty$
	$-$	décroît
$\frac{3}{2}$	0	16 (*min.*)
		croît
	$+$	
		$-\infty$
2		
		$+\infty$
	$+$	croît
$+\infty$		4

(1) Lorsque y croît indéfiniment, le sens même de sa variation indique s'il croît par valeurs positives ou négatives. Si y *décroît* indéfiniment, y est *négatif* ($-\infty$); si y *croît* indéfiniment, y est *positif* ($+\infty$).

La courbe représentative part asymptote à la droite $y = 4$ (fig. 47) et descend pour devenir asymptote à la droite $x = 1$ (parallèle à oy); puis repart asymptote à cette même droite, mais en haut (le mécanisme est le même que dans l'exemple IV).

La courbe descend jusqu'au minimum ($x = \frac{3}{2}$, $y = 16$) pour remonter

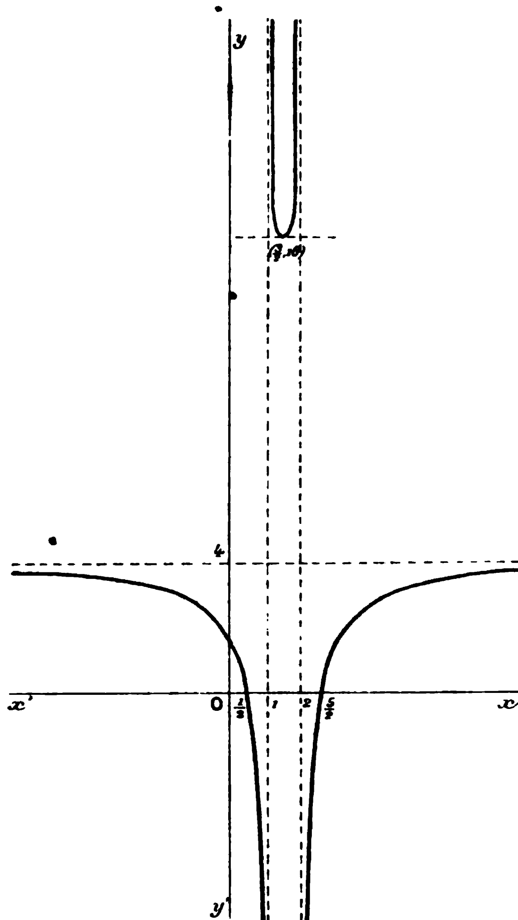


FIG. 47.

et devenir asymptote à la parallèle $x = 2$, à oy (puisque pour $x < 2$, mais voisin de 2, on a : $y = +\infty$).

La courbe repart, ensuite (Voir l'*Exemple IV*), asymptote à cette même droite, mais en bas, pour remonter et devenir asymptote à la parallèle $y = 4$, à ox.

Pour $x = 0$, on a $y = \frac{5}{2}$, ce qui donne le point d'intersection de la courbe avec oy.

Les points où la courbe coupe l'axe des x sont les points pour lesquels y est nul, leurs abcisses sont les racines $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$ du numérateur.

EXEMPLE VII. — *Soit la fraction*

$$y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}.$$

Cette fonction est continue pour toute valeur de x, sauf pour la valeur $x = 1$, qui annule le dénominateur. Sa dérivée est :

$$y' = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x - 1)^2}.$$

Le numérateur de cette dérivée n'a pas de racines. Cette dérivée est donc toujours positive et la fonction est toujours *croissante*.

Quand x croît indéfiniment, y croît aussi indéfiniment, puisque le dénominateur est le degré inférieur à celui du numérateur (n° 113, *App. III*). De plus, lorsque x est infiniment grand, chacun des termes de y est du signe de son premier terme. Le numérateur est du signe de x^2, donc positif; le dénominateur est du signe de x. Donc, quand x est infiniment grand, y est du signe de x. Pour $x = +\infty$, $y = +\infty$; $x = -\infty$, $y = -\infty$.

Ceci posé, lorsque x croît de $-\infty$ à 1, y croît de $-\infty$ à $+\infty$, car, lorsque x tend vers 1 par des valeurs plus petites que 1, y croît indéfiniment par valeurs positives.

Quand x passe par la valeur 1, y passe, brusquement, de $+\infty$ à $-\infty$, car le dénominateur change de signe.

Enfin, x croissant de 1 à $+\infty$, y croît de $-\infty$ à $+\infty$.

Le tableau de la variation est le suivant :

x	y'	y
$-\infty$		$-\infty$
	$+$	croît
1		$+\infty$ / $-\infty$
	$+$	croît
$+\infty$		$+\infty$

Pour construire la courbe représentative (*fig.* 48), nous allons, d'abord, montrer qu'il existe une asymptote qui a pour équation :

$$y = x - 1.$$

En effet, cherchons la partie entière du quotient du numérateur de y

par son dénominateur (nos 47 et 48). L'opération de la division nous conduit à l'identité (no 47, *Rem. I*).

$$x^2 - 2x \equiv (x - 1)(x - 1) - 1.$$

De là, on conclut qu'on peut mettre y sous la forme suivante :

$$y = x - 1 - \frac{1}{x - 1}.$$

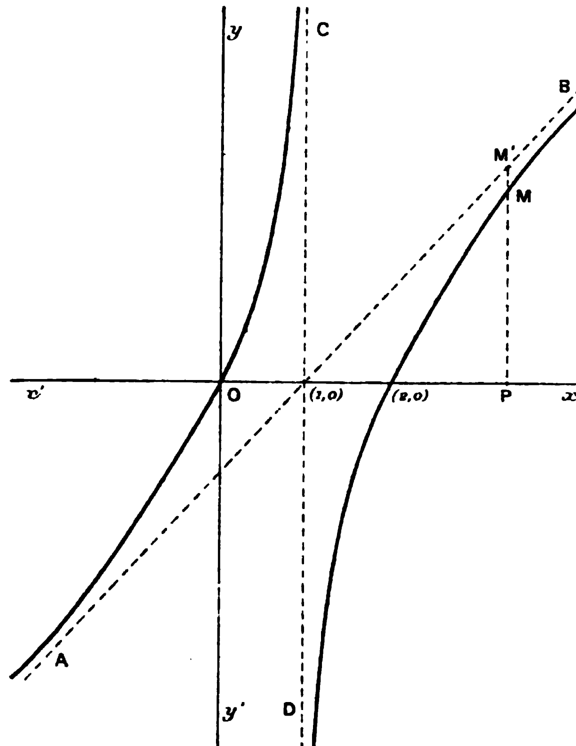


Fig. 48.

Ceci posé, traçons la droite AB qui a pour équation

$$y = x - 1.$$

Soit M un point de la courbe, d'abcisse x. Soit M' le point de la droite AB de même abcisse (*fig.* 48); le segment $\overline{MM'}$ est égal à l'excès de l'ordonnée du point de la droite sur l'ordonnée du point de la courbe,

$$\overline{MM'} = \overline{PM'} - \overline{PM},$$

et, par conséquent,

$$\overline{MM'} = \frac{1}{x - 1}.$$

Quand x croît indéfiniment, $\overline{MM'}$ tend vers zéro, donc (n° 123, 1°) la droite AB est asymptote à la courbe. De plus, le signe du segment $\overline{MM'}$ nous renseigne sur la position relative des points M et M'. Pour $x = +\infty$, $\overline{MM'}$ est positif : M' est au-dessus de M et la courbe est au-dessous de son asymptote. Pour $x = -\infty$, $\overline{MM'}$ est négatif : M' est au-dessous de M et la courbe est au-dessus de son asymptote.

La courbe est, alors, facile à tracer.

x croissant de $-\infty$ à 1, on a une branche de courbe qui part asymptote en A à la droite AB, au-dessus, et monte pour devenir asymptote à la droite CD (*fig.* 48) qui a pour équation

$$x = 1.$$

Quand x passe par la valeur 1, la courbe devient brusquement asymptote à CD en bas, à droite.

x croissant de 1 à $+\infty$, la courbe monte pour redevenir asymptote à AB, à droite, en dessous.

On a ainsi une courbe à deux branches infinies (hyperbole).

Remarque. — La fraction que nous venons d'étudier est un exemple numérique d'une fraction de la forme

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'} \qquad (a', a \neq 0),$$

et nous avons vu que la courbe représentative avait une asymptote non parallèle aux axes. Ceci est un fait général pour toutes les fonctions de cette forme. Pour trouver l'asymptote, on divise le numérateur par le dénominateur. En égalant y à la partie entière du quotient, on a l'équation d'une droite qui est l'asymptote.

Ainsi, soit $\alpha x + \beta$ le quotient de $ax^2 + bx + c$ par $a'x + b'$ et R le reste de la division (qui est une constante). On a l'identité

$$ax^2 + bx + c \equiv (a'x + b')(\alpha x + \beta) + R$$

et, par suite,

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'} = \alpha x + \beta + \frac{R}{a'x + b'}.$$

Sous cette forme, on voit que la différence entre l'ordonnée d'un point M de la courbe et du point M' de la droite

$$y = \alpha x + \beta,$$

qui à même abcisse, est égale à $\frac{R}{a'x + b'}$.

Quand x croît indéfiniment, cette différence tend vers zéro, la courbe est donc asymptote à cette droite (n° 123, 1°).

125. Nous terminerons cette série d'exemples en donnant quelques exemples de fonctions à variation *limitée*, c'est-à-dire dans lesquelles on ne peut pas donner à x toutes les valeurs possibles (de $-\infty$ à $+\infty$).

EXEMPLE VIII. — *Étudier la variation de la fonction*

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Cette fonction n'est définie que pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, qui sont les seules valeurs pour lesquelles la quantité sous le radical est positive. Pour toutes ces valeurs, la fonction est continue et admet une dérivée (n° 114, *App. III* et n° 117, *Th. V*), qui est :

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Cette dérivée est du signe contraire à celui de x, car le radical est essentiellement positif.

Quand x croît de -1 à 0, la dérivée est positive, la fonction croît de 0 à 1. Quand x croît de 0 à $+1$, la dérivée est négative, la fonction décroît de 1 à 0.

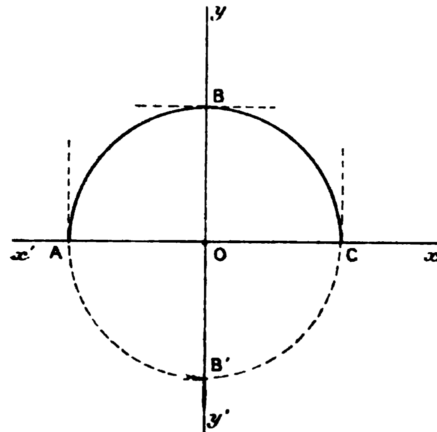


FIG. 49.

La courbe représentative est symétrique par rapport à oy, car lorsqu'on change x en $-x$ son équation ne change pas. Par suite, si le point (x, y) est sur la courbe, le point $(-x, y)$, symétrique par rapport à oy, est aussi sur la courbe.

Pour $x = 1$ et $x = -1$, y' est infiniment grand, la tangente est parallèle à oy. Pour $x = 0$, la tangente est parallèle à ox. La courbe se compose donc d'une branche AB qui part de A, sur ox, pour monter au maximum B, puis d'une branche BC symétrique de la branche BA, par rapport à oy (*fig.* 49).

Remarque. — La courbe représentative est un demi-cercle ABC. Car, pour tout point de la courbe, on a

$$y^2 + x^2 - 1 = 0,$$

ce qui est l'équation d'un cercle de rayon 1, ayant pour centre l'origine. Mais, si tous les points de la courbe représentative sont situés sur ce cercle, réciproquement, tous les points de ce cercle n'appartiennent pas à la courbe représentative, qui ne se compose que du demi-cercle situé au-dessus de ox ($y > 0$). Le demi cercle AB'C a pour équation

$$y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

EXEMPLE IX. — *Étudier la variation de la fonction*

$$y = x\sqrt{\frac{a + x}{a - x}},$$

a désignant une constante positive.

Cette fonction n'est bien déterminée que si la quantité sous le radical est positive ; ce qui nécessite que x soit compris entre $-a$ et $+a$. Pour toutes ces valeurs de x, la fonction est continue et admet une dérivée :

$$y' = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + x\,\frac{\dfrac{2a}{(a-x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}}$$

ou :

$$y' = \frac{a^2 + ax - x^2}{(a-x)^2\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}}.$$

Cette dérivée s'annule pour deux valeurs de x (les racines du numérateur)

$$x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5}+1\right), \quad x = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right),$$

mais, comme nous ne prenons que les valeurs de x comprises entre $-a$ et $+a$, il n'y a qu'une seule des deux valeurs qui est acceptable, c'est la racine négative. Le dénominateur de la dérivée étant toujours positif, la dérivée est du signe de son numérateur.

x croissant de $-a$ à $-\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$, la dérivée est négative (car x n'est pas compris entre les deux racines du numérateur); la fonction décroît, depuis 0 jusqu'à un minimum : $-\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{\sqrt{5}-2}$ (1).

Quand x croît de $-\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ à $+a$, la fonction croît, à partir du minimum, au delà de toute limite ; car lorsque x tend vers a, le dénominateur de y tend vers zéro.

(1) La valeur de la fonction, au minimum, est :

$$y = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{\frac{a-\frac{a}{2}\sqrt{5}+\frac{a}{2}}{a+\frac{a}{2}\sqrt{5}-\frac{a}{2}}},$$

ce qui s'écrit :

$$y = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}.$$

En multipliant, sous le grand radical, les deux termes de la fraction par la quantité conjuguée du dénominateur, $\sqrt{5}-1$, on obtient

$$y = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{\sqrt{5}-2}.$$

La discussion se résume dans le tableau suivant :

x	y'	y
$-a$		0
	$-$	décroit
$-\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$	0	$-\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}-2}$ (*min.*)
	$+$	croit
$+a$		$+\infty$

La courbe représentative part du point A ($x = -a$, $y = 0$), sur ox. La tangente en ce point est parallèle à oy, car y' est infiniment grand. La courbe descend au minimum B, où la tangente est horizontale (*fig.* 50). Puis, elle remonte, passe à l'origine des coordonnées ($x = 0$, $y = 0$), et devient asymptote à la droite $x = a$ (puisque, lorsque x tend vers a, y croit indéfiniment (n° 123, 2°).

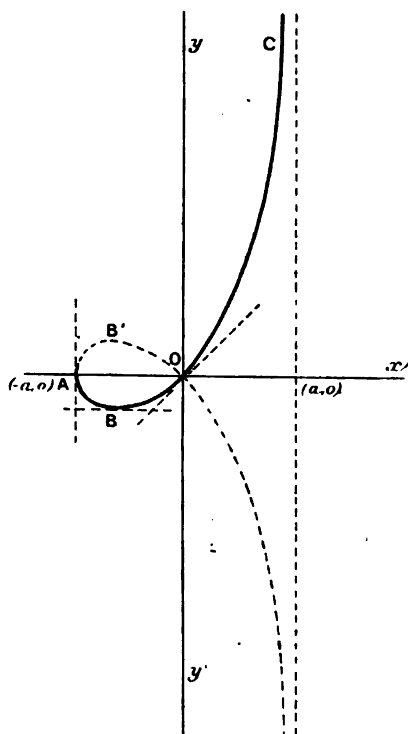


FIG. 50.

Pour $x = 0$, la dérivée a la valeur 1, le coefficient angulaire de la tangente à la courbe, au point O, est donc 1 et cette tangente est la bissectrice de l'angle xoy.

Remarque. — Si on construisait la courbe

$$y = -x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}},$$

on trouverait une courbe AB'OC', symétrique de la précédente par rapport à ox. Ces deux courbes réunies forment une courbe unique qu'on appelle la *strophoïde droite* et qui a pour équation :

$$y^2 = x^2\,\frac{a+x}{a-x}$$

ou

$$x(x^2+y^2) + a(x^2-y^2) = 0.$$

Cette équation, qui est du second degré en y, fait bien correspondre, à chaque valeur de x, deux valeurs égales et de signes contraires, pour y, qui sont les deux fonctions que nous avons étudiées.

EXEMPLE X. — *Étudier la variation du volume d'un cône circonscrit à une sphère donnée, de rayon* R.

Le cône est parfaitement défini dès qu'on connait son rayon de base x. Nous prendrons donc ce rayon de base pour variable. On remarque, de suite, que, pour que la sphère soit *inscrite* dans le cône, et non exinscrite, il faut que le rayon de base x soit plus grand que le rayon R de la sphère. x est donc une variable qui ne variera que de R à $+\infty$.

La hauteur du cône, comme il est facile de le voir, est :

$$\frac{2Rx^2}{x^2 - R^2};$$

le volume V du cône est donc donné par la formule :

$$V = \frac{2\pi R}{3} \cdot \frac{x^4}{x^2 - R^2}.$$

La variation du volume V est la même que celle de la fonction

$$y = \frac{x^4}{x^2 - R^2},$$

qui n'en diffère que par un facteur constant.

La fonction y est continue, pour toute valeur de x plus grande que R, et admet une dérivée :

$$y' = \frac{2x^3\,[x^2 - 2R^2]}{(x^2 - R^2)^2}.$$

Comme on ne donne à x que des valeurs plus grandes que R, nous ne trouvons qu'une seule valeur de x pour laquelle la dérivée s'annule : c'est

$$x = R\sqrt{2}.$$

Lorsque x croît de R à $R\sqrt{2}$, la dérivée est négative, la fonction décroît de $+\infty$ jusqu'à un minimum (absolu) $y = 4R^2$. x croissant, ensuite, de $R\sqrt{2}$ à $+\infty$, la dérivée est positive et la fonction croît de $4R^2$ à $+\infty$.

Donc, si on fait croître le rayon x de la base de R à $+\infty$, le volume V, d'abord infiniment grand (car, dans ce cas, le cône a son sommet infiniment éloigné et se réduit à un cylindre ouvert), décroît jusqu'à un minimum absolu $\frac{8\pi R^3}{3}$ (le double du volume de la sphère), qu'il atteint lorsque le rayon de la base est égal à $R\sqrt{2}$; pour croître, ensuite, au delà de toute limite.

On peut donc dire que, parmi tous les cônes de révolution circonscrits à une même sphère, celui qui a le plus petit volume est celui dont le volume est le double de celui de la sphère. La hauteur de ce cône est 4R, c'est-à-dire le double du diamètre de la sphère.

EXERCICES

167. Montrer que la fraction

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'(x - \alpha)(x - \beta)} \qquad (\alpha \neq \beta)$$

peut se mettre sous la forme :

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{p}{x - \alpha} + \frac{q}{x - \beta},$$

p et q étant deux nombres.

Si p et q sont de même signe, y varie toujours dans le même sens. Si p et q sont de signes contraires, y a un maximum et un minimum.

Calculer les valeurs de x qui annulent la dérivée seconde et montrer, en se reportant à la signification géométrique de la dérivée première, que, pour ces valeurs de x, la courbe représentative a un *point d'inflexion*, c'est-à-dire que la tangente en ce point traverse la courbe. (Voir *Exemple II*, *Rem. II.*)

168. Étudier les variations des fonctions :

$$y = \frac{2x^2 - 10x + 9}{12x - 4};$$

$$y = \frac{x^2 + 4x - 2}{x^2 - 4x + 4};$$

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 7x + 2};$$

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5};$$

$$y = \frac{(x + 5)^3}{(x + 3)^2};$$

$$y = \frac{4x^2 - 5x - 21}{x(x - 3)^2};$$

$$y = \frac{x^3 - 2ax^2 + a^2x}{(a - x)(a + 2x)};$$

$$y = x^2 - \sqrt{1 - x^2};$$

$$y = \sqrt{\frac{x(2 - x)}{x^2 - 4x + 3}};$$

$$y = x + \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}};$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{x - a}} + \frac{b}{\sqrt{x - b}};$$

$$y = (x - a)^3 + b;$$

$$y = \frac{x^3 - x^2 + 3x^4 - 3x^5}{3x - 3 + x^2 - x^3};$$

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a - x}}$$

(*La courbe représentative de la variation de cette fonction est connue sous le nom de cissoïde*);

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 24x + 7$$

En remarquant que la dérivée s'annule pour $x = 1$);

$$y = x^3 + px + q$$

(*En déduire la condition pour que l'équation* $x^3 + px + q = 0$ *ait trois racines*);

$$y = ax + b \pm \sqrt{a'x^2 + b'x + c'}$$

(*examiner les divers cas qui se présentent suivant les valeurs de* a', b' et c');
et construire les courbes représentatives des variations de ces fonctions.

169. On considère un cône de révolution dont le rayon de base est constant et égal à R. Étudier la variation du rapport du volume du cône à celui de la sphère inscrite lorsque la longueur x de l'apothème du cône varie.

170. Étudier la variation de la surface totale d'un cylindre inscrit dans une sphère donnée, de rayon R.

171. Étant données deux circonférences tangentes extérieurement, de même rayon R et dont les centres sont O et O′, on prend sur la circonférence O un point M et sur la circonférence O′ un point M′ tel que la droite MM′ soit parallèle à la droite des centres OO′. Étudier la variation de l'aire du trapèze OMM′O′, lorsque le point M décrit la circonférence O.

(*Oral, Saint-Cyr*).

172. On considère une circonférence O et une tangente fixe AX à cette circonférence, au point A. Soit MN un diamètre de la circonférence qui coupe la droite AX en M et dont l'une des extrémités est N. Au point N, on mène la tangente à la circonférence O qui coupe AX en P. On demande d'étudier la variation de l'aire du triangle MNP lorsque le point M décrit AX.

(*Oral, Saint-Cyr*).

173. On considère une circonférence et un diamètre AB de cette circonférence. Soit AT la tangente à la circonférence au point A et M un point quelconque de la circonférence, on demande d'étudier la variation du volume, engendré par le triangle AMB tournant autour de AT, lorsque M décrit la circonférence.

(*Oral, Saint-Cyr*).

174. Soit AB un diamètre fixe d'un cercle donné, de rayon R, et MN une corde variable perpendiculaire au diamètre AB. Étudier la variation de la différence des aires des deux triangles AMN et BMN lorsque la corde se déplace.

175. Soit un demi-cercle de diamètre AB et un point M pris sur ce diamètre. Sur AM et BM comme diamètres on décrit deux demi-cercles, situés du même côté du diamètre AB que le demi-cercle donné. On demande :

1° D'étudier la variation de l'aire comprise entre les trois demi-cercles ;

2° D'étudier la variation du rayon du cercle tangent aux trois demi-cercles, lorsque le point M décrit le diamètre AB.

176. Étudier la variation de la somme de la hauteur et de la base d'un triangle isocèle inscrit dans un cercle donné, de rayon R. (Voir *Exercice* 145.)

177. Les quantités x et y étant assujetties à vérifier la relation

$$x^2 + y^2 + xy = k^2,$$

étudier la variation de la quantité $ax + by$ considérée comme fonction de x.

(*Bacc., Paris*).

178. Trouver entre quelles limites peut varier la fraction

$$\frac{x^3 + 2xy^2 + 3y^3}{x^2 + y^2}$$

lorsque $x + y$ est constant et égal à a (*Bacc., Nancy*).

179. Deux mobiles se meuvent avec des vitesses constantes v et v' sur deux droites rectangulaires ox et oy. A un moment donné, ils se trouvent à des distances a et b du point O. On demande d'étudier la variation de leur distance en fonction du temps t. — minimum de cette distance.

(*Bacc., Grenoble*).

CHAPITRE V

RECHERCHE DIRECTE DE QUELQUES MAXIMA ET MINIMA ABSOLUS

126. La méthode, que nous avons exposée dans le chapitre précédent, permet d'étudier complètement la variation d'une fonction d'une variable au moyen de sa dérivée. Dans bien des questions, en particulier dans des questions de géométrie, il n'est pas nécessaire de connaître la variation complète d'une certaine expression, mais seulement son *maximum absolu* ou son *minimum absolu*. D'ailleurs, il arrive, dans ces questions, que l'expression dont il s'agit dépend, quelquefois, de *plus d'une* variable et, alors, la marche que nous avons indiquée plus haut n'est plus applicable.

Un grand nombre de ces questions se résolvent au moyen de quelques principes très simples que nous allons exposer.

Théorème I. — *Le produit de deux facteurs variables, dont la somme est constante, augmente lorsque la différence de ces deux facteurs diminue (en valeur absolue).*

Soient, en effet, x et y les deux facteurs dont la somme est constante et égale à a :

$$x + y = a.$$

De l'identité

$$xy \equiv \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2,$$

on conclut que

$$(1) \qquad xy = \frac{a^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}.$$

Et cette dernière égalité montre, manifestement, que le produit xy augmente lorsque $(x-y)^2$ ou, ce qui revient au même, $|x-y|$ diminue.

Corollaire. — *Le produit de deux facteurs variables, dont la somme est constante, est maximum absolu lorsque la différence de ces deux facteurs est la plus petite possible, en valeur absolue.*

En particulier, *si les deux facteurs peuvent devenir égaux, le produit est maximum lorsque les deux facteurs sont égaux et égaux à leur moyenne arithmétique* (1).

Remarque I. — L'égalité (1) prouve que le produit xy est inférieur ou au plus égal à $\frac{a^2}{4}$. Donc,

Le produit de deux facteurs positifs est au plus égal au produit que l'on obtient en les supposant égaux et égaux à leur moyenne arithmétique.

(Ceci ne veut pas dire que les deux facteurs peuvent devenir égaux).

Remarque II. — On aurait pu étudier le produit précédent en se servant des dérivées. En effet, soit z le produit. Comme $y=a-x$, on a

$$z = x(a-x).$$

Les deux facteurs x et y devant être *positifs*, on ne devra donner à x que des valeurs comprises entre 0 et a. La dérivée de z est :

$$z' = a - 2x.$$

Donc, quand x croît de 0 à $\frac{a}{2}$, la dérivée est positive, z croît de 0 à $\frac{a^2}{4}$. x croissant de $\frac{a}{2}$ à a, z décroît de $\frac{a^2}{4}$ à 0. $\frac{a^2}{4}$ est donc un maximum absolu pour le produit. Mais cette façon de procéder est moins générale que la précédente, car on suppose que x peut prendre *toutes les valeurs possibles* de 0 à a, ce qui n'a pas toujours lieu, comme nous le verrons dans l'exemple suivant :

Exemple. — *Soit* O *un cercle et* DD′ *une droite qui ne coupe pas le cercle. Soit* ABC *une droite, perpendiculaire à* DD′, *qui coupe le cercle en* A *et* B *et la droite* DD′ *en* C. *Pour quelle position de la droite* AC *le produit*

$$AB \times BC$$

est-il maximum? (*fig.* 51).

(1) On appelle *moyenne arithmétique* de deux nombres la demi-somme de ces deux nombres. (Voir *Exercice* 4.)

Remarquons, d'abord, que le produit sera maximum en même temps que sa moitié

$$\frac{AB}{2} \times BC.$$

Or, si on mène par O une parallèle à DD′ qui coupe AB en I, on a :

$$\frac{AB}{2} \times BC = BI \times BC$$

et, de plus,

$$BI + BC = CI = OD \ (\textit{constante})$$

(D désignant le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur DD′). Nous sommes donc ramené au problème suivant : Trouver le maximum du

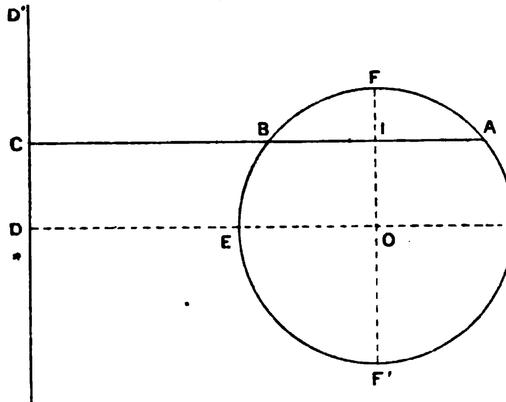


Fig. 51.

produit des deux facteurs BI et BC dont la somme est constante et égale à OD. On est conduit à distinguer deux cas :

1° OE < ED — (E étant le point d'intersection de OD avec le cercle) (*fig.* 51). Lorsque le point B parcourt le cercle, BC reste toujours supérieur à DE et BI reste plus petit que OE, on a donc

$$BI < OE < DE < BC;$$

et, par suite, $BI < BC.$

BI ne peut jamais être égal à BC, le produit est, alors, maximum lorsque la différence

$$BC - BI$$

est la plus petite possible, ce qui aura lieu lorsque BC aura la plus petite valeur possible ED, et BI la plus grande valeur possible OE. Le maximum a

donc lieu lorsque la sécante AC occupe la position OD. Le maximum du produit est, alors,

$$2OE \times OD = 2R\,(d - R),$$

en posant :

$$R = OE, \qquad d = OD.$$

2° OE > ED. — Dans ce cas (*fig.* 52), il existe deux positions de la sécante pour lesquelles

$$BC = BI.$$

En effet, le milieu M de OD est, alors, entre O et E. Si donc on élève une perpendiculaire en M, sur OD, elle coupera le cercle en deux points G et G′ et les sécantes HGK et H′G′K′ sont telles que

$$HG = GK = H'G' = G'K' = \frac{OD}{2}.$$

Il y a, alors, deux positions qui donnent un maximum absolu, ce sont les sécantes GH et G′H′. Le maximum du produit est alors

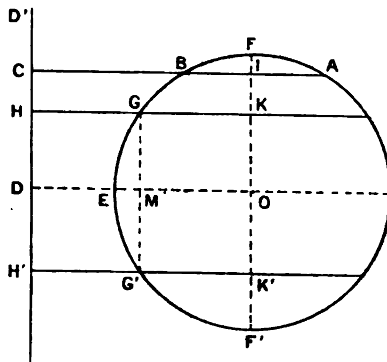


Fig. 52.

$$2GK \times GH = 2\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2} = \frac{d^2}{2}.$$

Dans ce second cas, la position OD donne un *minimum relatif*, lorsque le point B décrit la demi-circonférence F′EF, de F′ en F. Car, on voit que la différence BC — BI décroît jusqu'à *zéro* lorsque B va de F′ en G′, puis croît (en valeur absolue) de G′ en E, décroît de E en G et croît de G en F. Ceci montre, en appliquant le théorème I, que le produit croît quand B va de F′ en G′, décroît de G′ en E, croît de E en G et décroît de G en F. Il y a donc bien un minimum relatif lorsque B est en E.

Théorème II. — *La somme de deux nombres positifs, variables, dont le produit est constant, varie dans le même sens que la valeur absolue de leur différence.*

Soient, en effet, deux nombres positifs x et y dont le produit est égal à a^2 :

$$xy = a^2.$$

L'identité

$$(x + y)^2 \equiv (x - y)^2 + 4xy$$

donne :

$$(2) \qquad (x + y)^2 = (x - y)^2 + 4a^2.$$

Cette égalité prouve bien que $(x+y)^2$, ou $x+y$, varie dans le même sens que $(x-y)^2$, ou $|\,x-y\,|$, puisqu'on déduit $(x+y)^2$ de $(x-y)^2$ en lui ajoutant une quantité fixe.

Corollaire. — *La somme de deux nombres positifs, variables, dont le produit est constant, est minima absolue lorsque la différence de ces deux nombres est la plus petite possible, en valeur absolue.*

En particulier, *si les deux nombres peuvent devenir égaux, la somme est minima lorsque les deux nombres sont égaux et égaux à leur moyenne géométrique* (1).

Remarque I. — L'égalité (1) prouve que $(x+y)^2$ est toujours supérieur ou au moins égal à $4a^2$ et, par suite, que $x+y$ est toujours au moins égal à $2a$. Donc :

La somme de deux nombres positifs est toujours supérieure ou au moins égale à la somme obtenue en les supposant égaux et égaux à leur moyenne géométrique.

(Ceci ne suppose pas que les nombres puissent *devenir* égaux) (2).

Remarque II. — On aurait pu étudier la variation de la somme en se servant des dérivées.

On a, en effet,

$$y=\frac{a^2}{x}.$$

Désignons par z la somme $x+y$, on a :

$$z=x+\frac{a^2}{x}.$$

Comme les deux nombres x et y doivent être *positifs*, on ne donnera à x que des valeurs positives. On fera donc varier x de 0 à $+\infty$. Pour toutes ces valeurs, sauf pour $x=0$, la fonction est continue et admet une dérivée :

$$z'=1-\frac{a^2}{x^2}.$$

(1) On appelle *moyenne géométrique*, ou encore *moyenne proportionnelle*, de deux nombres positifs, la racine carrée de leur produit. Ainsi, g désignant la moyenne géométrique des deux nombres a et b, on a, par définition,

$$g^2=ab, \qquad g=\sqrt{ab};$$

de là on conclut que

$$\frac{g}{a}=\frac{b}{g},$$

égalité qui permet de construire géométriquement la longueur g quand on connaît les longueurs a et b. (Voir *Exercice* 4.)

(2) Au fond, cette proposition ainsi que celle qui fait l'objet de la Remarque I qui suit le théorème I, prouve que la moyenne arithmétique de deux nombres est plus grande que leur moyenne géométrique. (Voir *Exercice* 4.)

Cette dérivée s'annule pour $x = \pm a$. Mais, comme nous ne donnons à x que des valeurs positives, la seule valeur à considérer est $x = a$ $(a > 0)$.

Quand x croît de 0 à a, la dérivée z' est négative et la fonction z décroît de $+\infty$ à $2a$. Ensuite, x croissant de a à $+\infty$, la dérivée z' est positive et z croît de $2a$ à $+\infty$. La valeur $2a$ est donc bien un *minimum absolu* pour la somme z, lorsque x et y sont positifs.

Exemple. — *Parmi tous les triangles rectangles qui ont même aire, quel est celui qui a la plus petite hypoténuse?*

Soient x et y les deux côtés de l'angle droit, $\frac{1}{2}k^2$ la surface, on aura

$$xy = k^2.$$

Or, si z désigne l'hypoténuse, on a :

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

z sera minimum en même temps que z^2. Or, z^2 est la somme de deux nombres dont le produit

$$x^2y^2 = k^4$$

est constant. Le minimum aura donc lieu lorsque

$$x^2 = y^2 \quad \text{ou} \quad x = y.$$

Le triangle rectangle qui a la plus petite hypoténuse est donc le triangle rectangle *isocèle*.

127. Les deux théorèmes que nous venons d'établir se généralisent, dans une certaine mesure, et s'étendent au cas de plusieurs facteurs positifs [1].

Théorème I. — *Un produit de plusieurs facteurs positifs est inférieur ou au plus égal au produit obtenu en remplaçant chacun de ces facteurs par leur moyenne arithmétique* [2].

Pour démontrer cette proposition, nous montrerons, d'abord, que, si elle est vraie pour un certain nombre de facteurs, elle est encore vraie quand le nombre des facteurs est deux fois plus grand.

(1) Ce sont les énoncés qui sont contenus dans les Remarques I, qui suivent les théorèmes I et II du n° 126, qui se généralisent.

Le mode d'exposition que nous emploierons, dans ce paragraphe, est dû à *M. Darboux*.

(2) On appelle *moyenne arithmétique* de m nombres le quotient de la somme de ces nombres par m. Ainsi,

$$\frac{a+b+c+d}{4}$$

est la moyenne arithmétique des quatre nombres a, b, c et d.

Supposons, en effet, que le théorème soit vrai pour le cas de m facteurs, et soit

$$P = xy \dots ztx'y' \dots z't'$$

un produit de $2m$ facteurs positifs. Soit a la moyenne arithmétique de ces facteurs :

$$2ma = x + y + \dots + z + t + x' + y' + \dots + z' + t' ;$$

soit b la moyenne arithmétique des m premiers et b' la moyenne arithmétique des m derniers :

$$mb = x + y + \dots + z + t,$$
$$mb' = x' + y' + \dots + z' + t'.$$

On a, évidemment,

$$m(b + b') = 2ma$$

ou :

$$b + b' = 2a,$$

ce qui prouve que a est la moyenne arithmétique de b et b'.

Cela étant, puisque, par hypothèse, le théorème est vrai dans le cas de m facteurs, on a les deux inégalités :

$$xy \dots zt \leqslant b^m,$$
$$x'y' \dots z't' \leqslant b'^m.$$

En les multipliant, membre à membre, on obtient :

$$P \leqslant (bb')^m.$$

Or, a étant la moyenne arithmétique de b et b', et la proposition étant vraie pour deux facteurs (n° 126, *Th. I*, *Rem. I*), on a :

$$bb' \leqslant a^2,$$

d'où, *a fortiori*,

$$P \leqslant a^{2m}.$$

Le théorème ayant été établi dans le cas de deux facteurs, on en conclut qu'il est encore vrai dans le cas de quatre, huit, seize facteurs. D'une manière générale, il est vrai dans le cas où le nombre des facteurs est une puissance de 2.

La proposition s'étend, alors, sans difficulté, au cas où le nombre des facteurs est quelconque. Soit en effet P un produit de m facteurs positifs (m quelconque), dont la moyenne arithmétique est a. Soit q

un entier tel que $m + q$ soit une puissance de 2. Adjoignons, aux m facteurs du produit P, q facteurs égaux à a, nous obtiendrons un nouveau produit, Pa^q, de $m + q$ facteurs, dont la moyenne arithmétique sera encore a. Le nombre $m + q$ des facteurs de ce nouveau produit étant une puissance de 2, on pourra lui appliquer le théorème, et on aura :

$$Pa^q \leqslant a^{m+q},$$

d'où, en divisant les deux membres de cette inégalité par a^q,

$$P \leqslant a^m;$$

et c'est ce qu'il fallait prouver.

Cette démonstration montre, en outre, que le produit P est *plus petit* que a^m dès qu'un facteur est différent de a ; car, puisque cela a lieu pour deux facteurs, c'est vrai dans tous les cas. Il n'est donc *égal* à a^m que lorsque les facteurs sont *égaux*. Ceci conduit au corollaire suivant :

Corollaire. — *Le produit de plusieurs facteurs positifs, variables, dont la somme* [redacted]*imum absolu lorsque ces facteurs sont égaux, s'ils peuvent le dev*[redacted].

EXEMPLE. — *Parmi tous les triangles de même périmètre celui qui a la plus grande surface est le triangle équilatéral.*

Soient, en effet, $2p$ le périmètre du triangle et x, y, z les longueurs des côtés. On sait que la surface S du triangle est donnée par la formule :

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Il est évident que S sera maximum en même temps que le produit

$$P = (p-x)(p-y)(p-z).$$

Or, dans ce produit la somme des facteurs est constante. Car

$$p - x + p - y + p - z = 3p - (x + y + z) = 3p - 2p = p,$$

ce produit sera donc maximum lorsque les trois facteurs seront égaux, s'ils peuvent le devenir, c'est-à-dire lorsque

$$p - x = p - y = p - z$$

ou

$$x = y = z.$$

Les trois côtés du triangle sont égaux, le triangle est équilatéral.

Théorème II. — *La somme de plusieurs nombres positifs est supérieure ou au moins égale à la somme obtenue en remplaçant chacun des nombres par leur moyenne géométrique* (1).

Soit, en effet,

$$S = x + y + z + \dots + t + u$$

une somme de m nombres positifs. Soit g leur moyenne géométrique. On a, par définition,

$$\sqrt[m]{xyz \dots tu} = g$$

ou

$$xyz \dots tu = g^m.$$

Or, $\frac{S}{m}$ étant la moyenne arithmétique des m nombres, d'après le théorème précédent on a

$$xyz \dots tu \leqslant \left(\frac{S}{m}\right)^m$$

et, par suite,

$$g^m \leqslant \left(\frac{S}{m}\right)^m.$$

De là on conclut, puisque g et $\frac{S}{m}$ sont des nombres positifs, que

$$g \leqslant \frac{S}{m}$$

ou que

$$S \geqslant mg.$$

Ce qu'il fallait prouver.

Il faut remarquer encore ici qu'il n'y a égalité que dans le cas où les nombres sont égaux (puisque cela a lieu dans le théorème précédent). On en conclut le corollaire suivant :

Corollaire. — *Une somme de nombres positifs, variables, dont le produit est constant, est minima absolue lorsque ces nombres sont égaux, s'ils peuvent le devenir.*

(1) On appelle *moyenne géométrique* de m nombres positifs la racine $m^{ième}$ de leur produit. Ainsi,

$$\sqrt[m]{abc \dots fg}$$

est la moyenne géométrique des m nombres $a, b, c, \dots f, g$.

Remarque. — Les théorèmes I et II ne sont, au fond, que deux formes différentes d'une même proposition qui est la suivante :

La moyenne arithmétique de plusieurs nombres positifs est supérieure ou au moins égale à leur moyenne géométrique.

EXEMPLE. — *Parmi tous les triangles de même surface, celui qui a le plus petit périmètre est le triangle équilatéral.*

Soient en effet x, y, z les longueurs des côtés, a^2 la surface et $2p$ le périmètre. On a :

$$\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} = a^2$$

ou :

$$p(p-x)(p-y)(p-z) = a^4.$$

Ceci peut s'écrire :

$$\frac{x+y+z}{3}(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) = \frac{16}{3}a^4.$$

Or on a :

$$\frac{4}{3}(x+y+z) = \frac{x+y+z}{3} + (y+z-x) + (z+x-y) + (x+y-z),$$

par suite, le périmètre $x+y+z$ étant la somme de quatre nombres positifs dont le produit est constant, sera minimum lorsque

$$\frac{x+y+z}{3} = y+z-x = z+x-y = x+y-z;$$

ce qui est possible, car ces égalités sont compatibles et entraînent

$$x = y = z.$$

Le triangle cherché est donc *équilatéral*.

Remarque. — En rapprochant cet exemple du précédent, on voit que, parmi tous les triangles de même périmètre, le triangle équilatéral a la plus grande surface et que, parmi tous les triangles de même surface, le triangle équilatéral a le plus petit périmètre. Il y a dans ces deux propositions une sorte de réciprocité qui existe dans toutes les questions de même nature.

L'existence de cette réciprocité se met, d'ailleurs, en évidence dans la façon même dont nous avons démontré le théorème II. Au fond, le théorème II n'est qu'une conséquence immédiate du théorème I et, d'ailleurs, réciproquement, si on avait démontré le théorème II directement, on aurait vu que le théorème I pourrait s'en déduire, d'une façon analogue à celle dont le théorème II a été déduit du théorème I.

Ainsi, nous avons vu que, parmi tous les triangles rectangles qui ont même aire, le triangle isocèle a la plus petite hypoténuse. On peut, maintenant, dire que, réciproquement, parmi tous les triangles rectangles qui ont même hypoténuse, le triangle rectangle isocèle a la plus grande surface.

Exemple. — *Parmi tous les parallélipipèdes rectangles de même volume celui qui a la plus petite surface totale est le cube.*

Soient x, y, z les trois dimensions du parallélipipède et a^3 son volume. On a :

$$x\,y\,z = a^3.$$

D'autre part, la surface totale est :

$$S = 2\,(xy + yz + zx).$$

La quantité entre parenthèses est une somme de trois facteurs positifs dont le produit est constant, car

$$(xy)\,(yz)\,(zx) = x^2y^2z^2 = a^6.$$

La surface S sera donc minima lorsque

$$xy = yz = zx$$

ou

$$x = y = z;$$

c'est-à-dire lorsque le parallélipipède sera un cube.

On peut remarquer que, dans les mêmes conditions, la somme des longueurs de toutes les arêtes, qui est

$$4\,(x + y + z),$$

est minima.

On pourrait d'ailleurs, énoncer la proposition corrélative et dire que : *parmi tous les parallélipipèdes rectangles qui ont même surface totale, le cube est celui qui a le plus grand volume.*

128. Les deux propositions qui font l'objet du paragraphe précédent peuvent être, elles-mêmes, étendues aux cas où les nombres positifs sont affectés d'exposants, dans le produit.

Théorème I. — *Un produit de plusieurs puissances positives de facteurs positifs, variables, dont la somme est constante, est maximum lorsque ces facteurs sont proportionnels à leurs exposants, s'ils peuvent le devenir.*

En tous cas, le produit reste au plus égal au produit obtenu dans cette dernière hypothèse.

Soit, par exemple, le produit

$$P = x^\alpha\,y^\beta\,z^\gamma,$$

où α, β, γ désignent des nombres positifs entiers et x, y, z des nombres positifs variables, mais tels que la somme

$$x+y+z=a$$

soit constante.

Le produit P est, évidemment, maximum en même temps que le produit

$$Q=\frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma}{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma}$$

qui peut s'écrire :

$$Q=\frac{x}{\alpha}\frac{x}{\alpha}\cdots\frac{x}{\alpha}\frac{y}{\beta}\frac{y}{\beta}\cdots\frac{y}{\beta}\frac{z}{\gamma}\frac{z}{\gamma}\cdots\frac{z}{\gamma}.$$

Sous cette forme, on voit que le produit Q est un produit de $\alpha+\beta+\gamma$ facteurs dont α sont égaux à $\frac{x}{\alpha}$, β égaux à $\frac{y}{\beta}$ et γ égaux à $\frac{z}{\gamma}$. La somme de ces $\alpha+\beta+\gamma$ facteurs est

$$\alpha\frac{x}{\alpha}+\beta\frac{y}{\beta}+\gamma\frac{z}{\gamma}=x+y+z=a$$

et, par suite, *constante*. Donc (nº 127, *Th. I*, *Coroll.*) ce produit Q, et, par suite, le produit P, est maximum quand les facteurs sont égaux, s'ils peuvent le devenir; c'est-à-dire lorsque :

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma} \qquad (1).$$

x, y, z doivent, donc, être *proportionnels aux exposants*.

Les égalités (1), jointes à la relation

$$x+y+z=a,$$

déterminent les valeurs de x, y, z, qui sont :

$$x=\frac{\alpha a}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad y=\frac{\beta a}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad z=\frac{\gamma a}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

La valeur du maximum est donc :

$$\left(\frac{\alpha a}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^\alpha\left(\frac{\beta a}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^\beta\left(\frac{\gamma a}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^\gamma=\left(\frac{a}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^{\alpha+\beta+\gamma}\alpha^\alpha\beta^\beta\gamma^\gamma.$$

Si les facteurs x, y, z ne peuvent pas devenir proportionnels à leurs exposants, on peut, cependant, affirmer que l'on a, toujours,

$$P \leqslant \left(\frac{a}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^{\alpha+\beta+\gamma} \alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma.$$

Remarque. — Nous avons supposé les exposants α, β, γ entiers. Cette supposition n'est pas nécessaire. En effet, si les exposants α, β, γ sont fractionnaires, on peut les réduire au même dénominateur. Soit, alors,

$$\alpha = \frac{m}{q}, \qquad \beta = \frac{m'}{q}, \qquad \gamma = \frac{m''}{q};$$

on aura :

$$P = x^{\frac{m}{q}} y^{\frac{m'}{q}} z^{\frac{m''}{q}}.$$

Or, P sera, évidemment, maximum en même temps que sa puissance $q^{ième}$:

$$P^q = x^m y^{m'} z^{m''}$$

et, d'après ce que nous venons de voir, le maximum de P^q aura lieu lorsque

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{m'} = \frac{z}{m''}.$$

Ceci peut s'écrire :

$$\frac{x}{\left(\frac{m}{q}\right)} = \frac{y}{\left(\frac{m'}{q}\right)} = \frac{z}{\left(\frac{m''}{q}\right)}$$

ou

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}.$$

Exemple. — *Trouver le maximum du volume d'un cône droit dont l'aire latérale est donnée.*

Soit x le rayon de base du cône et y sa hauteur ; πa^2 l'aire latérale donnée. On a :

$$\pi x \sqrt{x^2 + y^2} = \pi a^2,$$

d'où

$$y = \frac{\sqrt{a^4 - x^4}}{x}.$$

Le volume est donc :

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 y = \frac{1}{3} \pi x \sqrt{a^4 - x^4}.$$

Pour avoir le maximum de V, il suffit de chercher le maximum de

$$x \sqrt{a^4 - x^4}$$

ou de la puissance quatrième

$$x^4 (a^4 - x^4)^2.$$

Ceci est un produit des deux facteurs x^4 et $a^4 - x^4$, dont la somme est constante, affectés, respectivement, des exposants 1 et 2. Ce produit est donc maximum quand les facteurs sont proportionnels à leurs exposants :

$$\frac{x^4}{1} = \frac{a^4 - x^4}{2}.$$

D'où

$$x^4 = \frac{a^4}{3}, \quad x = \frac{a}{\sqrt[4]{3}}$$

et :

$$y = a \frac{\sqrt[2]{2}}{\sqrt[4]{3}}.$$

Remarque. — On aurait pu éviter d'élever à la quatrième puissance en écrivant

$$x \sqrt{a^4 - x^4} = (x^4)^{\frac{1}{4}} (a^4 - x^4)^{\frac{1}{2}}.$$

Les deux facteurs x^4 et $a^4 - x^4$, dont la somme est constante, sont affectés des exposants fractionnaires $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$. Donc, en appliquant le théorème précédent, qui est encore vrai pour les exposants fractionnaires, on doit avoir

$$\frac{x^4}{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{a^4 - x^4}{\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Ce qui donne la même valeur pour x :

$$x = \frac{a}{\sqrt[4]{3}}.$$

Théorème II. — *Une somme de nombres positifs, variables, tels que le produit de certaines puissances positives de ces nombres reste constant, est minima absolue lorsque ces nombres sont proportionnels à leurs exposants, s'ils peuvent le devenir.*

En tous cas, la somme reste supérieure à la somme obtenue dans cette dernière hypothèse.

Soit, en effet, la somme

$$S = x + y + z,$$

x, y, z désignant des nombres variables, tels que le produit

$$(1) \qquad x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} = a^{\alpha+\beta+\gamma}$$

reste constant, α, β, γ désignant des nombres positifs entiers. (Ici on a toujours le droit de supposer α, β, γ entiers, car, s'il n'en était pas ainsi, il suffirait d'élever les deux membres de l'égalité (1) à une puissance convenable pour qu'il en soit ainsi.) La somme S peut s'écrire

$$S = \alpha \frac{x}{\alpha} + \beta \frac{y}{\beta} + \gamma \frac{z}{\gamma}$$

ou :

$$S = \frac{x}{\alpha} + \frac{x}{\alpha} + \dots + \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{y}{\beta} + \dots + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} + \frac{z}{\gamma} + \dots + \frac{z}{\gamma}$$

et, sous cette forme, on voit qu'elle est la somme de $\alpha + \beta + \gamma$ nombres dont α sont égaux à $\frac{x}{\alpha}$, β égaux à $\frac{y}{\beta}$ et γ égaux à $\frac{z}{\gamma}$. D'ailleurs, le produit de ces nombres est constant, car ce produit est :

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\beta} \left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma} = \frac{x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}}{\alpha^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma}} = \frac{a^{\alpha+\beta+\gamma}}{\alpha^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma}}.$$

Donc la somme S sera minima (n° 127, *Th. II*, *Coroll.*) lorsque ces nombres seront égaux, c'est-à-dire lorsque

$$(2) \qquad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

si c'est possible. Ce qui exprime que x, y et z sont proportionnels à leurs exposants.

Les valeurs de x, y, z, pour le minimum, se calculent au moyen des relations (1) et (2) et on trouve :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{a}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}} \gamma^{\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}}$$

ce qui donne, pour le minimum de la somme :

$$M = \frac{a(\alpha + \beta + \gamma)}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}} \gamma^{\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}}.$$

D'ailleurs, lorsque les nombres x, y, z ne peuvent pas devenir proportionnels à leurs exposants, on a, cependant, toujours

$$S \geqslant M.$$

Exemple. — *Quelle est la calotte sphérique, de volume donné, qui a la plus petite surface convexe?*

Soit x le rayon de base de la calotte et y sa hauteur, le volume de la calotte est :

$$\frac{1}{6}\pi y^3 + \frac{1}{2}\pi x^2 y = \frac{1}{6}\pi y\ (y^2 + 3x^2).$$

Ce volume restant constant, le produit

$$y\ (y^2 + 3x^2) = a^3$$

reste *constant*. La surface de la calotte est

$$S = \pi\,(x^2 + y^2)$$

qui peut s'écrire :

$$S = \frac{\pi}{3}\Big[2y^2 + (y^2 + 3x^2)\Big].$$

La quantité entre crochets est une somme de deux nombres dont le produit des puissances suivantes :

$$2y^2\ (y^2 + 3x^2)^2 = 2a^6$$

est constant. La surface S sera donc *minima* lorsques les deux termes seront proportionnels aux exposants, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{2y^2}{1} = \frac{y^2 + 3x^2}{2}.$$

Ce qui donne :

$$x = y.$$

La calotte sphérique, de volume donné, qui a la surface convexe la plus petite est donc la *demi-sphère*.

EXERCICES

180. Parmi tous les triangles isocèles inscrits dans un même cercle, quel est celui qui a la plus grande aire?

181. Parmi tous les rectangles inscrits dans un même cercle quel est celui qui a la plus grande surface?

182. De tous les triangles rectangles pour lesquels le produit de la hauteur par l'un des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse est constant, quel est celui qui a la plus petite hypoténuse?

183. Minimum du périmètre d'un triangle rectangle circonscrit à un cercle donné.

184. Maximum du produit de trois nombres, en progression géométrique, dont la somme est constante et égale à a.

(*Bacc.*, *Paris.*)

185. Variation de la surface d'un trapèze isocèle circonscrit à une circonférence donnée. Minimum de la surface.

(*Bacc.*, *Paris.*)

186. Quel est le parallélipipède de volume maximum inscrit dans une sphère donnée ?

187. Dans une sphère donnée on inscrit un cône équilatéral ; mener un plan parallèle à la base tel que la somme des aires des sections faites dans la sphère et dans le cône soit maxima.

188. Circonscrire à une sphère un cône de surface latérale minima.

189. Dans un cercle donné, de rayon R, tracer une corde de manière, qu'en la faisant tourner autour du diamètre qui lui est parallèle, la surface engendrée soit maxima.

190. De tous les cylindres de même volume, quel est celui dont la surface totale est minima ?

191. Inscrire dans une sphère donnée un cône dont la surface latérale soit maxima, ou dont le volume soit minimum.

192. Un cône a son sommet au centre d'une sphère donnée, de rayon R, il a pour base un petit cercle de la sphère. Quelle doit être la distance de ce petit cercle au centre de la sphère pour que le volume du cône soit maximum?

193. Trouver le minimum de l'aire d'un triangle isocèle circonscrit à un cercle donné. — (Il sera plus commode de chercher le maximum de l'inverse de cette aire.)

LIVRE V

PROGRESSIONS, LOGARITHMES, INTÉRÊTS

CHAPITRE PREMIER

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

129. Définition. — On appelle *progression arithmétique* ou *progression par différence*, une suite de termes tels que l'excès d'un terme quelconque sur le précédent soit constant. Cet excès constant est ce qu'on appelle la *raison* de la progression. — On indique une progression arithmétique en faisant précéder le premier terme du signe $\div$ et en séparant deux termes consécutifs par un point. Ainsi,

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, \ldots$$

est une progression arithmétique si

$$b - a = c - b = d - c = e - d = \ldots = r,$$

r désignant la raison.

On a, alors,

$$b = a + r, \quad c = b + r, \quad d = c + r, \quad e = d + r.$$

Chaque terme de la progression se déduit du précédent en lui ajoutant la raison [1].

(1) On peut remarquer qu'une progression arithmétique est aussi une suite de termes telle que chaque terme soit la moyenne arithmétique des deux termes qui le comprennent, car, si on a

$$b = \frac{a + c}{2},$$

on en conclut

$$b - a = c - b.$$

Lorsque la raison est *positive*, chaque terme est plus grand que le précédent et la progression est dite *croissante*. Au contraire, lorsque la raison est *négative*, chaque terme est plus petit que le précédent et la progression est dite *décroissante*.

Problème I. — *Calculer le terme de rang* n *dans une progression arithmétique lorsqu'on connaît le premier terme* a *et la raison* r.

Le premier terme est a; le second est $a+r$; le troisième s'obtient en ajoutant r au second, il est donc égal à $a+2r$. En ajoutant r à celui-ci, on obtient le quatrième qui est $a+3r$, et ainsi de suite. On voit, qu'en général :

Pour obtenir un terme quelconque il faut ajouter au premier terme autant de fois la raison que le terme cherché a de termes devant lui.

Ainsi, le terme de rang n est

$$a+(n-1)r.$$

Corollaire. — *Dans une progression arithmétique illimitée* (1) *le terme de rang* n *croît indéfiniment avec* n.

Exemples. — La suite des nombres entiers forme une progression arithmétique croissante, illimitée, de raison 1 :

$$\div\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6\ .....$$

La suite des nombres impairs forme une progression croissante de raison 2 :

$$\div\ 1\ .\ 3\ .\ 5\ .\ 7\ .\ 9\ .\ 11\ .....;$$

le $n^{ième}$ nombre impair est donc, d'après la règle précédente :

$$1+2(n-1)=2n-1.$$

La suite

$$\div\ 4\ .\ 2\ .\ 0\ .\ -2\ .\ -4\ .\ -6\ .\ -8\ .$$

est une progression arithmétique décroissante de raison (-2).

Problème II. — *Insertion de moyens arithmétiques.*

Insérer $(n-1)$ *moyens arithmétiques entre deux nombres* a *et* b *c'est former une progression arithmétique limitée, de* $(n+1)$ *termes, dont* a *soit le premier terme et* b *le dernier.*

(1) Une progression arithmétique peut être *limitée*, c'est-à-dire avoir un nombre déterminé de termes, ou être *illimitée*, c'est-à-dire telle qu'après chaque terme il y en ait un autre. On conçoit fort bien qu'il n'y ait aucune limite à la formation des termes successifs.

Soit r la raison de la progression inconnue, b étant le $(n+1)^{ième}$ terme de la progression, on a (*Prob. I*)

$$b = a + nr,$$

d'où

$$r = \frac{b-a}{n}.$$

La raison étant connue, il est facile de former les moyens qui sont :

$$a + \frac{b-a}{n}, \quad a + 2\frac{b-a}{n}, \quad a + 3\frac{b-a}{n}, \ldots\ldots \ a + (n-1)\frac{b-a}{n}.$$

Exemple. — Si on insère 9 moyens arithmétiques entre 1 et 2, la raison est 0,1 et les moyens sont :

1,1 . 1,2 . 1,3 . 1,4 . 1,5 . 1,6 . 1,7 . 1,8 . 1,9.

Remarque. — Si, entre deux termes consécutifs d'une progression arithmétique, on insère le même nombre de moyens, on forme une nouvelle progression *continue*. Ainsi, soit :

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \ldots.$$

une progression de raison r. Si on insère entre a et b, entre b et c, entre c et d, etc..., un même nombre de moyens, $(n-1)$ par exemple, on formera des progressions partielles dont les raisons seront :

$$\frac{b-a}{n}, \quad \frac{c-b}{n}, \quad \frac{d-c}{n}, \quad \text{etc....}$$

Toutes ces raisons sont égales à $\frac{r}{n}$. Toutes les progressions partielles ont donc même raison et, comme le dernier terme de chacune de ces progressions partielles est le premier terme de la suivante, elles forment, en tout, une seule progression *continue* de raison $\frac{r}{n}$.

Ainsi, si, dans la suite des nombres entiers, on insère, entre deux nombres entiers consécutifs, 9 moyens arithmétiques on forme une progression continue de raison 0,1 :

$$\div 0 \,.\, 0{,}1 \,.\, 0{,}2 \,.\, 0{,}3 \,.\, 0{,}4 \,.\, 0{,}5. \ldots\ldots$$

130. Théorème I. — *Dans une progression arithmétique limitée la somme de deux termes équidistants des extrêmes est constante et égale à la somme des termes extrêmes.*

Soit, en effet,

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,\ldots.\, g \,\ldots.\, h \,\ldots\, i \,.\, k \,.\, l$$

une progression arithmétique limitée de raison r.

Soit g le terme qui en a p avant lui et h le terme qui en a p après lui.

On a : $$g = a + pr \qquad (1).$$

D'autre part, si on commence la progression au terme h, l sera le terme de la nouvelle progression qui en a p avant lui et on a (*Prob. I*)

$$l = h + pr$$

ou

$$h = l - pr \qquad (2).$$

En ajoutant, membre à membre, les égalités (1) et (2), on a :

$$g + h = a + l.$$

Remarque. — On aurait pu établir l'égalité (2) en remarquant qu'en renversant l'ordre des termes de la progression, on obtient une nouvelle progression

$$\div l \,.\, k \,.\, i \,\ldots.\, h \,\ldots.\, g \,\ldots.\, c \,.\, b \,.\, a$$

de raison $(-r)$. Dans cette nouvelle progression, l est le premier terme et h est le terme qui en a p avant lui. Donc (*Prob. I*)

$$h = l + p\,(-r) = l - pr.$$

Théorème II. — *Somme des termes d'une progression arithmétique limitée.*

La somme des termes d'une progression arithmétique limitée est égale au produit du nombre des termes par la demi-somme des termes extrêmes.

Soit, en effet,

$$\div a \,.\, b \,.\, c. \,\ldots.\, h \,.\, k \,.\, l$$

une progression arithmétique limitée et S la somme de ses termes :

$$S = a + b + c. + \ldots + h + k + l \qquad (1).$$

L'expression S s'écrit encore, en intervertissant l'ordre des termes :

$$S = l + k + h + \dots + c + b + a \qquad (2).$$

En additionnant les deux valeurs de S, (1) et (2), on a :

$$2S = (a + l) + (b + k) + (c + h) + \dots + (h + c) + (k + b) + (l + a).$$

Dans cette expression, chacune des quantités entre parenthèses est la somme de deux termes équidistants des extrêmes, elle est donc égale (*Th. I*) à la somme $(a + l)$ des extrêmes. D'ailleurs, comme il y a autant de parenthèses qu'il y a de termes dans la progression, on a, en désignant par n le nombre des termes de la progression,

$$2S = n(a + l),$$

d'où

$$S = n\frac{a + l}{2}.$$

Remarque. — Comme la progression a n termes, on a, en désignant par r la raison,

$$l = a + (n - 1)r$$

et, par suite, l'expression de la somme S devient :

$$S = \frac{n[2a + (n - 1)r]}{2}.$$

EXEMPLE I. — *Somme des* n *premiers nombres entiers.*

Les n premiers nombres entiers forment une progression dont le premier terme est 1 et le dernier n, la somme est donc :

$$S = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Ainsi, la somme des 1000 premiers nombres entiers est :

$$\frac{1000 \times 1001}{2} = 500500.$$

EXEMPLE II. — *Somme des* n *premiers nombres impairs.*

Les n premiers nombres impairs forment une progression de raison 2 dont le premier terme est 1. On a donc :

$$S = \frac{n[2 + 2(n - 1)]}{2}$$

ou, en simplifiant :

$$S = n^2.$$

La somme des n *premiers nombres impairs est donc égale au carré de* n.

Ceci peut servir à la construction d'une table contenant les carrés des nombres entiers (¹).

Application. — *Somme des carrés des* n *premiers nombres entiers.*

Nous partirons de l'identité suivante :

$$n(n+1)(n+2) - (n-1)\,n(n+1) \equiv 3n^2 + 3n.$$

Faisons, dans cette identité, successivement, $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc... et nous obtiendrons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&1\times2\times3 &&= 3\times1^2 + 3\times1\\
&2\times3\times4 - 1\times2\times3 &&= 3\times2^2 + 3\times2\\
&3\times4\times5 - 2\times3\times4 &&= 3\times3^2 + 3\times3\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \\
&(n-1)n(n+1) - (n-2)(n-1)n &&= 3(n-1)^2 + 3(n-1)\\
&n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) &&= 3n^2 + 3n.
\end{aligned}$$

Ajoutons toutes ces égalités, membres à membres, et posons :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n,$$
$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2;$$

il vient, toutes simplifications faites,

$$n(n+1)(n+2) = 3S_2 + 3S_1.$$

Or, nous connaissons S_1 et on a (*Exemple I*)

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

on a donc,

$$3S_2 = n(n+1)(n+2) - \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2};$$

on en tire

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

qui est la valeur cherchée de la somme S_2 des carrés des n premiers nombres entiers.

(¹) Voir dans les *Leçons d'arithmétique* de M. Tannery, les nᵒˢ 280 et 281.

De même, en partant de l'identité

$$n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2) \equiv 4n^3+12n^2+8n,$$

on calculera, de la même façon, la somme S_3 des cubes des n premiers nombres entiers, connaissant S_1 et S_2. On trouve, ainsi,

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (S_1)^2.$$

La méthode est évidemment générale et on pourra ainsi, de proche en proche, calculer toutes les sommes des puissances entières des n premiers nombres entiers.

EXERCICES

194. Si les nombres

$$\frac{1}{a+b}, \quad \frac{1}{b+c}, \quad \frac{1}{c+a}$$

sont en progression arithmétique, il en est de même des nombres

$$a^2, b^2, c^2.$$

195. Combien une pendule sonne-t-elle de coups en 24 heures si elle ne sonne que les heures ?

196. Soit a le premier terme d'une progression arithmétique, l le dernier terme, n le nombre des termes, r la raison et S la somme des termes. Calculer deux de ces quantités connaissant les trois autres. Comme applications :
1° Calculer l et r connaissant : $a = 1$, $S = 50$, $n = 10$;
2° Calculer a et n connaissant : $l = 18$, $r = 2$, $S = 88$;
3° Calculer l et n connaissant : $a = 3$, $r = 2$, $S = 120$.

197. Vérifier que les carrés des quantités

$$x^2 - 2x - 1, \quad x^2 + 1, \quad x^2 + 2x - 1$$

sont en progression arithmétique.

198. On écrit la suite des nombres impairs en les groupant de la façon suivante :

1er groupe : 1 ;
2e groupe : 3, 5 ;
3e groupe : 7, 9, 11,

etc... ; le $n^{ième}$ groupe contenant n nombres. On demande la somme des nombres contenus dans le $n^{ième}$ groupe.

199. On appelle *progression harmonique* une suite de nombres

$$a, b, c, d, \ldots$$

tels que la suite de leurs inverses

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d} \cdots$$

forme une progression arithmétique.

Insérer, entre deux nombres donnés a et b, n moyens harmoniques.

Montrer que, si a, b, c, sont trois nombres en progression harmonique, les trois nombres

$$\frac{a}{b+c-a}, \quad \frac{b}{c+a-b}, \quad \frac{c}{a+b-c},$$

sont aussi en progression harmonique et qu'on a les relations :

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c},$$
$$\frac{b+a}{b-a} + \frac{b+c}{b-c} = 2.$$

Montrer que, si a, b, c. d, sont quatre nombre en progression harmonique, on a :

$$3(b-a)(d-c) = (c-b)(d-a).$$

Montrer que si $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ sont n nombres en progression harmonique, on a :

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n = (n-1)a_1a_n.$$

200. Trouver le premier terme et la raison d'une progression arithmétique sachant que la somme des n premiers termes de cette progression est, pour toutes les valeurs de n, égale à $n(3n+1)$.

(*Concours de l'École normale de Sèvres*).

Même question en supposant que la somme des n premiers termes soit $\frac{n(n+1)}{2}$.

(*Bacc., Dijon*).

201. Calculer les trois côtés d'un triangle connaissant son périmètre $2p$, sa surface $\frac{1}{2}k^2$ et sachant que les trois côtés sont en progression arithmétique.

(*Bacc., Montpellier*).

202. Soit

$$\div\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, \ldots \quad .\, h \,.\, k \,.\, l$$

une progression arithmétique limitée de raison r. Les égalités

$$(1) \qquad b = a + r, \quad c = b + r, \quad \ldots \quad l = k + r,$$

élevées au cube, donnent :

$$\begin{aligned} b^3 &= a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3, \\ c^3 &= b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ k^3 &= h^3 + 3h^2r + 3hr^2 + r^3, \\ l^3 &= k^3 + 3k^2r + 3kr^2 + r^3, \\ (l+r)^3 &= l^3 + 3l^2r + 3lr^2 + r^3. \end{aligned}$$

Si on désigne par S_1 la somme des termes de la progression, par S_2 la somme des carrés des termes de la progression,

$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + k^2 + l^2,$$

on a, en ajoutant membre à membre les égalités précédentes :

$$(l + r)^3 = a^3 + 3rS_2 + 3r^2S_1 + nr^3,$$

n désignant le nombre des termes de la progression. Connaissant S_1,

$$S_1 = \frac{[2a + (n - 1)r]n}{2},$$

on tire de cette égalité S_2.

On propose de généraliser cette méthode et de montrer qu'en élevant, successivement, les égalités (1) à la quatrième, à la cinquième puissance, etc..., et en les ajoutant, on pourra calculer la somme S_3 des cubes des termes connaissant S_1 et S_2, puis la somme S_4 des quatrièmes puissances connaissant les précédentes, etc...

Comme application, on demande de calculer, par ce procédé, la somme des carrés et la somme des cubes des n premiers nombres entiers.

Cette nouvelle manière de calculer les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers peut servir à démontrer les propositions suivantes :

Soit $\varphi_p(n)$ la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des n premiers nombres entiers :

$$\varphi_p(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + (n - 1)^p + n^p.$$

En remarquant que l'on a :

$$\varphi_p(n) - \varphi_p(n - 1) = n^p,$$

et que $\varphi_p(0) = 0$, démontrer que $\varphi_p(n)$ est un polynôme entier par rapport à n et déterminer ce polynôme entier.

Montrer que $\varphi_p(n)$ est aussi un polynôme entier par rapport à $\left(n + \frac{1}{2}\right)$ et qu'il ne contient que des puissances de cette quantité dont les exposants sont de même parité que p.

202 *bis*. Calculer les sommes suivantes :

$$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + n(n + 1)(n + 2);$$
$$1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + \ldots + (2n - 1)(2n + 1)(2n + 3);$$
$$2.4.6 + 4.6.8 + 6.8.10 + \ldots + 2n.(2n + 2)(2n + 4).$$

CHAPITRE II

PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES

131. Définition. — On appelle *progression géométrique* une suite de termes tels que le rapport d'un terme quelconque au précédent soit constant.

Ce rapport constant est ce qu'on appelle la *raison* de la progression. — On indique une progression géométrique en faisant précéder le premier terme du signe $\div\!\div$ et en séparant deux termes consécutifs par deux points. Ainsi,

$$\div\!\div\, a : b : c : d : e : \ldots .$$

est une progression géométrique si

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} = \ldots . = q,$$

q désignant la raison.

On tire de là,

$$b = aq, \quad c = bq, \quad d = cq, \quad \ldots .$$

Chaque terme est donc égal au produit du précédent par la raison [1].

Si la valeur absolue de la raison q est *plus grande que* 1, les termes vont en croissant, en valeur absolue, et la progression est dite *croissante;* si, au contraire, la raison q est *plus petite que* 1, en valeur absolue, les termes décroissent, en valeur absolue, et la progression est dite *décroissante*.

Une progression géométrique peut être *limitée*, c'est-à-dire avoir un nombre déterminé de termes, ou encore être *illimitée*, c'est-à-dire être telle qu'après chaque terme il y en ait un autre. On conçoit fort bien la possibilité de l'existence de ces dernières progressions,

(1) Une progression géométrique est encore une suite de termes tels que chaque terme soit la moyenne géométrique entre les deux termes qui le comprennent. Car, si on a :

$$b = \sqrt{ac}, \qquad c = \sqrt{bd}, \ldots$$

on en conclut :

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}, \qquad \frac{c}{b} = \frac{d}{c}, \ldots .$$

car, étant donné un nombre quelconque et une raison q, on peut, toujours, multiplier ce nombre par q.

Problème I. — *Calculer le terme de rang* n *dans une progression géométrique dont on connaît le premier terme* a *et la raison* q.

Le second terme est égal à aq; le troisième terme est le produit du second par q, il est donc égal à aq^2. En multipliant par q, on a le quatrième terme aq^3 ; et ainsi de suite. On voit, qu'en général :

Pour obtenir un terme quelconque il faut multiplier le premier terme par autant de fois la raison qu'il y a de termes avant celui qu'on veut calculer.

Ainsi, le terme de rang n est

$$aq^{n-1}.$$

Exemples. — La suite

$$\div\!\!\div\ 1 : 10 : 100 : 1\,000 : \ldots$$

forme une progression géométrique croissante de raison 10. Le $n^{ième}$ terme est 10^{n-1}.

La suite

$$\div\!\!\div\ 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \ldots$$

est une progression géométrique décroissante de raison $\frac{1}{2}$. Le $n^{ième}$ terme est $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Problème II. — *Insertion de moyens géométriques.*

Insérer (n — 1) *moyens géométriques entre deux nombres* a *et* b, *c'est former une progression géométrique, de* (n + 1) *termes, dont* a *soit le premier terme et* b *le dernier.*

Soit q la raison de la progression inconnue. Puisque b est le $(n+1)^{ième}$ terme de la progression, on a (*Probl. I*) :

$$b = aq^n$$

d'où

$$q^n = \frac{b}{a}, \quad q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

La raison q étant connue, il est facile de former les moyens qui sont les (n — 1) termes intermédiaires de la progression

$$a\sqrt[n]{\frac{b}{a}}, \quad a\sqrt[n]{\frac{b^2}{a^2}}, \quad a\sqrt[n]{\frac{b^3}{a^3}}, \ \ldots\ a\sqrt[n]{\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}}.$$

Remarque I. — Lorsqu'on insère *un* moyen géométrique entre deux nombres on obtient la *moyenne géométrique* des deux nombres. Car, si $n = 2$, le moyen est :

$$a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab}.$$

Remarque II. — Si, entre deux termes consécutifs quelconques d'une progression géométrique, on insère le même nombre de moyens, on forme une nouvelle progression *continue*. Ainsi, soit

$$\div\!\!\div\; a : b : c : d : e : \ldots.$$

une progression géométrique de raison q. Si on insère entre a et b, entre b et c, entre c et d, etc..., un même nombre $(n - 1)$ de moyens, on forme des progressions partielles dont les raisons sont

$$\sqrt[n]{\frac{b}{a}},\quad \sqrt[n]{\frac{c}{b}},\quad \sqrt[n]{\frac{d}{c}},\ \ldots.$$

Or, toutes ces raisons sont égales et égales à $\sqrt[n]{q}$; toutes les progressions partielles ont donc même raison, et, comme le dernier terme de chacune de ces progressions partielles est, précisément, le premier terme de la progression suivante, elles forment, en tout, une seule progression *continue* de raison $\sqrt[n]{q}$.

Ainsi, soit la progression

$$\div\!\!\div\; 1 : a : a^2 : a^3 : a^4 : \ldots$$

Si, entre deux termes consécutifs, on insère la moyenne géométrique, on forme une nouvelle progression

$$\div\!\!\div\; 1 : \sqrt{a} : a : a\sqrt{a} : a^2 : a^2\sqrt{a} : a^3 : \ldots$$

de raison $\sqrt{a}$.

132. Voici quelques propositions sur la somme et le produit des termes de progressions géométriques limitées.

Théorème I. — *La somme des termes d'une progression géométrique limitée est égale au quotient de l'excès du produit du dernier terme par la raison sur le premier terme par l'excès de la raison sur l'unité.*

Soit la progression géométrique limitée

$$\div\!\!\div\; a : b : c : \ldots. \quad h : k : l,$$

de raison q. La somme des termes est :

$$(1) \qquad S = a + b + c + \dots + h + k + l.$$

Faisons le produit Sq et remarquons que l'on a :

$$aq = b, \quad bq = c, \dots \quad hq = k, \quad kq = l,$$

il vient :

$$(2) \qquad Sq = b + c + \dots + h + k + l + lq.$$

Retranchons, membre à membre, les égalités (1) et (2) et nous obtenons :

$$S(q-1) = lq - a,$$

d'où

$$S = \frac{lq - a}{q - 1} \text{ (1)}.$$

Remarque. — Soit n le nombre des termes de la progression, on a (*Prob. I*)

$$l = aq^{n-1}.$$

Ce qui nous donne l'expression suivante pour S :

$$S = a . \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

On aurait, d'ailleurs, obtenu facilement cette expression par voie directe. En effet, on a :

$$S = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

ou

$$S = a\left[1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1}\right].$$

Or, la division de $q^n - 1$ par $q - 1$ donne l'identité bien connue (Voir n° 49, *App. II*)

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} \equiv \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

(1) Il faut remarquer que ceci suppose $q \neq 1$. Si q était égal à 1, tous les termes de la progression seraient égaux et la somme des termes serait égale à n fois le premier :

$$S = na.$$

Nous ne nous occuperons pas de ces progressions particulières qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.

En multipliant les deux membres par a on retrouve :

$$S = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Exemples. — On a :

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = \frac{64 - 1}{2 - 1} = 63 ;$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{\frac{1}{81} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{40}{27}.$$

Théorème II. — *Dans une progression géométrique limitée, le produit de deux termes équidistants des extrêmes est constant et égal au produit des termes extrêmes.*

Soit, en effet, la progression géométrique

$$\div\!\div\, a : b : c : \ldots.\ g : \ldots.\ f : \ldots\ : h : k : l$$

de raison q, dans laquelle g est le terme qui en a p avant lui et f le terme qui en a p après lui. On a, d'abord,

$$g = aq^p \qquad (1).$$

D'autre part, si on commence la progression au terme f, l sera le terme qui en a p avant lui et on a :

$$l = fq^p$$

et, par suite,

$$f = l\,\frac{1}{q^p} \qquad (2).$$

En multipliant, membre à membre, les égalités (1) et (2) il vient :

$$fg = al.$$

Remarque. — L'égalité (2) résulte encore de ce fait que, si on renverse l'ordre des termes dans la progression, on obtient une nouvelle progression

$$\div\!\div\, l : k : h : \ldots\ f : \ldots\ g : \ldots.\ c : b : a$$

de raison $\frac{1}{q}$ dans laquelle l est le premier terme et f celui qui en a p avant lui.

Théorème III. — *Le carré du produit des termes d'une progression géométrique limitée est égal à la puissance du produit des termes extrêmes dont l'exposant est le nombre des termes de la progression.*

Soit la progression géométrique limitée

$$\div\div a : b : c : \ldots\ldots h : k : l$$

et P le produit de ses termes :

$$P = abc \ldots hkl \qquad (1).$$

Dans le produit P écrivons les facteurs dans l'ordre inverse, on aura :

$$P = lkh \ldots cba \qquad (2).$$

Multiplions les égalités (1) et (2), membre à membre, il vient :

$$P^2 = (al)\ (bk)\ (ch)\ \ldots.\ (hc)\ (kb)\ (la).$$

Or, les parenthèses, dont le produit est égal à P^2, sont toutes égales à al, car elles sont formées du produit de deux termes équidistants des extrêmes (*Th. II*). Comme il y a autant de parenthèses que de termes, on en conclut que P^2 est le produit d'autant de facteurs égaux à al qu'il y a de termes dans la progression. Si donc n est le nombre des termes de la progression, on a :

$$P^2 = (al)^n.$$

On en tire :

$$P = \sqrt{(al)^n}\ (^1).$$

Remarque. — q désignant la raison de la progression, on a :

$$l = aq^{n-1}.$$

D'où

$$P = \sqrt{a^{2n}\, q^{n(n-1)}}$$

ou

$$P = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

(1) On peut rapprocher les théorèmes II et III de ce paragraphe, des théorèmes I et II du n° 130.

Le procédé de raisonnement employé dans ces propositions sert aussi dans des questions d'arithmétique. — Ainsi, pour calculer le produit des diviseurs d'un nombre entier, on range, d'abord, ces diviseurs par ordre de grandeur croissante et on montre que le produit de deux diviseurs équidistants des extrêmes est égal au nombre donné. — De même, si on range, par ordre de grandeur croissante, les nombres plus petits qu'un nombre entier donné et premiers avec lui, on voit aisément que la somme de deux nombres équidistants des extrêmes est égale au nombre donné ; ce qui permet de calculer la somme des nombres plus petits qu'un nombre donné et premiers avec lui.

Le nombre $\frac{n(n-1)}{2}$ est certainement entier, car $n(n-1)$ est certainement pair.

Cette dernière formule pourrait s'obtenir directement de la façon suivante :

La progression peut s'écrire :

$$\div\!\!\div\; a : aq : \ldots\ldots\; aq^{n-2} : aq^{n-1}.$$

Le produit P contient donc n fois le facteur a et il contient le facteur q à un exposant qui est la somme des exposants de q dans les divers termes de la progression. L'exposant de q est donc la somme des $(n-1)$ premiers nombres entiers et, par suite (n° 130, *Exemp. I*), est égal à $\frac{(n-1)n}{2}$. On a donc,

$$P = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

133. Les propositions, que nous avons établies dans le paragraphe précédent, n'ont plus, *telles qu'elles ont été énoncées*, aucun sens pour les progressions illimitées. Cependant, les progressions illimitées peuvent être considérées comme issues de progressions limitées, dont on fait croître indéfiniment le nombre des termes, et, dans ce sens, on est conduit à se demander si les sommes des termes de ces progressions limitées ont des limites lorsque le nombre des termes croît indéfiniment. C'est ce que nous allons examiner.

Lemme. — *α désignant un nombre positif et* n *un nombre entier, on a, toujours, l'inégalité*

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha.$$

Cette inégalité est facile à vérifier pour les valeurs 2 et 3 de n. Car on a :

$$(1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2,$$
$$(1+\alpha)^3 = 1 + 3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3;$$

donc,

$$(1+\alpha)^2 > 1 + 2\alpha,$$
$$(1+\alpha)^3 > 1 + 3\alpha.$$

Si la proposition est vraie pour un certain exposant entier p, elle est aussi vraie pour l'entier suivant $(p+1)$. Supposons, en effet, que l'on ait

$$(1+\alpha)^p > 1 + p\alpha,$$

multiplions les deux membres de cette inégalité par $1+\alpha$, il vient :

$$(1+\alpha)^{p+1} > 1+(p+1)\alpha+p\alpha^2.$$

Si, dans le second membre, on supprime le terme $p\alpha^2$, on diminue ce membre et on a, *a fortiori*,

$$(1+\alpha)^{p+1} > 1+(p+1)\alpha.$$

La proposition est donc générale car, puisqu'elle est vraie pour $n=3$, elle est vraie pour $n=4$; étant vraie pour $n=4$, elle est vraie pour $n=5$; et ainsi de suite.

Théorème I. — *Une puissance entière, positive, d'un nombre plus grand que l'unité croît indéfiniment en même temps que son exposant.*

Soit, en effet, q^n une puissance entière, positive, du nombre q plus grand que l'unité. Puisque q est plus grand que 1, nous pouvons poser

$$q = 1+\alpha,$$

α désignant un nombre positif. Soit, alors, A un nombre positif donné à l'avance; puisque, d'après le lemme,

$$q^n = (1+\alpha)^n > 1+n\alpha,$$

on aura certainement

$$q^n > A,$$

si

$$1+n\alpha > A,$$

c'est-à-dire si

$$n > \frac{A-1}{\alpha}.$$

q^n croît donc indéfiniment en même temps que n, puisqu'à tout nombre positif A, on peut faire correspondre un nombre

$$B = \frac{A-1}{\alpha}$$

tel que l'inégalité

$$n > B$$

entraîne l'inégalité

$$q^n > A.$$

Corollaire. — *Le terme de rang* n *d'une progression géométrique illimitée, croissante, croît indéfiniment en même temps que* n.

Car le terme de rang n, dans la progression dont le premier terme est a et la raison q, est aq^{n-1}.

La progression étant croissante, q est plus grand que 1, donc q^{n-1} croît indéfiniment en même temps que n et il en est de même de aq^{n-1} puisque a est un nombre fixe non nul (nº 112, *Th. II*).

Théorème II. — *Toute puissance entière, positive, d'un nombre plus petit que l'unité tend vers zéro quand son exposant croît indéfiniment.*

Soit, en effet, q un nombre plus petit que 1 et q' son inverse: q' sera plus grand que 1 et on a :

$$q^n = \frac{1}{q'^n}.$$

Or, d'après le théorème I, lorsque n croît indéfiniment, q'^n croît indéfiniment, donc son inverse q^n tend vers zéro (nº 112, *Th. III, Coroll.*).

Corollaire. — *Le terme de rang* n *d'une progression géométrique illimitée, décroissante, tend vers zéro lorsque* n *croît indéfiniment.*

Car le terme de rang n est aq^{n-1}.

La progression étant décroissante, q est plus petit que 1, q^{n-1} tend vers zéro, quand n croît indéfiniment, il en est donc de même de aq^{n-1} (nº 111, *Th. II*).

Théorème III. — *La somme des* n *premiers termes d'une progression géométrique illimitée :*

1º *Croît indéfiniment avec* n *lorsque la progression est croissante;*

2º *Tend vers une limite déterminée, qui est le quotient du premier terme par l'excès de l'unité sur la raison, lorsque* n *croît indéfiniment, si la progression est décroissante.*

a et q étant le premier terme et la raison de la progression, la somme S_n des n premiers termes est, comme nous savons,

$$S_n = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

1º Si la progression est *croissante*, q est *plus grand que* 1, q^n croît indéfiniment avec n, il en est donc de même, en vertu des théorèmes établis sur les limites (nºˢ 111 et 112), de S_n.

2º Si la progression est *décroissante*, q est *plus petit que* 1, q^n tend

vers zéro quand n croît indéfiniment $(q^n - 1)$ a pour limite (-1) et S_n (Voir n° 111) a une limite qui est :

$$a \times \frac{-1}{q-1} = \frac{a}{1-q}.$$

La limite de S_n est donc bien le quotient du premier terme a par l'excès $(1 - q)$ de l'unité sur la raison.

Remarque. — On dit qu'une *suite indéfinie* de termes

$$u_1, \; u_2, \; \ldots \; u_n, \; \ldots.$$

est *donnée*, si l'on sait calculer un terme quelconque u_n quand on connaît son rang n. Ainsi, les termes d'une progression arithmétique ou géométrique illimitée forment une *suite*, car on sait (*Prob. I*) calculer le terme de rang n de chacune de ces suites.

On dit qu'une suite infinie

$$u_1, \; u_2, \; u_3, \; \ldots. \; u_n, \; \ldots.$$

forme une *série convergente*, si la somme

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots. + u_n,$$

des n premiers termes, tend vers une limite bien déterminée, quand n croît indéfiniment.

Au contraire, on dit que la suite forme une *série divergente* si la somme S_n ne tend vers aucune limite ou croît indéfiniment, quand n croît indéfiniment.

Dans ces conditions, on voit qu'on peut dire que toute progression arithmétique illimitée forme une série divergente. Toute progression géométrique illimitée, *décroissante*, forme une série *convergente*, et toute progression géométrique illimitée, *croissante*, forme une série *divergente*. Pour indiquer que, dans une progression décroissante, la limite de la somme des n premiers termes est $\frac{a}{1-q}$, quand n croît indéfiniment, on écrit souvent l'égalité :

$$a + aq + aq^2 + \ldots. + aq^n + \ldots. = \frac{a}{1-q}.$$

Comme nous venons de le voir, pour qu'une progression géométrique forme une série convergente, il faut et il suffit que cette progression soit *décroissante*. Il est bon de remarquer que cette

condition, qui est suffisante dans le cas d'une progression géométrique, ne l'est pas pour une série *quelconque*. Il faudrait bien se garder de croire que toute suite de nombres décroissants forme une série convergente. Ainsi, on démontre aisément, que la suite

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\dots$$

formée par les inverses des nombres entiers, pris dans l'ordre naturel, forme une série divergente ; c'est-à-dire que la somme :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

croît indéfiniment en même temps que n.

EXEMPLES :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

$$\frac{13}{100} + \frac{13}{(100)^2} + \frac{13}{(100)^3} + \dots + \frac{13}{(100)^n} + \dots = \frac{\frac{13}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{13}{99}.$$

La somme

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

a une limite qui est $\frac{1}{1-x}$ quand $|x| < 1$ et croît indéfiniment lorsque $|x| > 1$.

EXERCICES

203. Toute fraction décimale périodique illimitée, par exemple

$$0{,}23\,23\,23\dots,$$

peut être considérée comme la somme des termes d'une progression géométrique décroissante illimitée :

$$\frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \dots$$

Retrouver, de cette manière, la règle pour former la fraction génératrice d'une fraction décimale périodique.

204. Trouver trois nombres en progression géométrique connaissant leur somme a et l'excès b du troisième sur le premier.

Applications : $a = 221,\quad b = 136;$
$a = 248,\quad b = 192.$

204 bis. Déterminer une progression géométrique de 7 termes connaissant la somme a des trois premiers et la somme b des trois derniers.

Application : $a = 26, \quad b = 2106.$

205. Former la somme des carrés, la somme des cubes, etc., des termes d'une progression géométrique limitée.

206. a, b, c étant trois nombres en progression géométrique on a la relation :

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$$

(TODHUNTER).

207. a, b, c, d étant quatre nombres en progression géométrique, on a les relations

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2 ;$$
$$(a - d)^2 = (b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2$$

(TODHUNTER).

208. Calculer la somme :

$$\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)^2 + \left(r^3 - \frac{1}{r^3}\right)^2 + \ldots + \left(r^n - \frac{1}{r^n}\right)^2.$$

209. Montrer que, si S_n, S_{2n}, S_{3n} sont, respectivement, les sommes des n premiers termes, des $2n$ premiers termes et des $3n$ premiers termes d'une même progression géométrique, on a :

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$$

(SMITH).

210. Dans une progression géométrique de n termes, on donne la somme S des p premiers termes et la somme S′ des $(n\text{-}p)$ derniers. Trouver la raison et le premier terme.

211. Dans un carré dont le côté est a, on joint les milieux des quatre côtés et on forme un autre carré dont on joint encore les milieux pour former un autre carré, et ainsi de suite ; trouver la limite de la somme des aires de tous les carrés ainsi formés.

212. Dans un triangle équilatéral, de côté a, on joint les milieux des côtés et on forme un nouveau triangle équilatéral dont on joint encore les milieux des côtés, pour former un nouveau triangle, et ainsi de suite. On demande :

1° De trouver la limite de la somme des aires de ces triangles ;

2° De trouver la limite de la somme des aires des cercles inscrits et la limite de la somme des aires des cercles circonscrits à ces triangles.

213. Dans un triangle équilatéral, de côté donné a_1, on inscrit un cercle et l'on désigne son rayon par r_1. Dans ce cercle, on inscrit un triangle équilatéral et l'on désigne le côté de ce triangle par a_2, puis par r_2 le rayon du cercle inscrit à ce second triangle. On continue ainsi indéfiniment à tracer des triangles équilatéraux et leurs cercles inscrits. Calculer la limite vers laquelle tend :

1° La somme $r_1 + r_2 + r_3 + \ldots$ des rayons des cercles inscrits ;

2° La somme $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ des côtés des triangles équilatéraux ;

3° La somme des surfaces des triangles ;

4° La somme des surfaces des cercles ;

5° La somme des volumes engendrés par les triangles tournant autour de l'une de leurs hauteurs.

(*École de Physique de Paris.*)

214. Calculer la somme de la série convergente :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \dots,$$

composée de termes dont les numérateurs forment une progression arithmétique et les dénominateurs une progression géométrique.

215. Vers quelle limite tend la somme des sommes des séries suivantes :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\right) \\ &+ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots\right) \\ &+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots\right) \\ &+ \dots\dots\dots\dots \\ &+ \left(\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{(2^n + 1)^2} + \frac{1}{(2^n + 1)^3} + \dots\right), \end{aligned}$$

lorsque n croît indéfiniment ?

216. S_n désignant la somme des n premiers termes d'une progression géométrique, calculer la somme

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n.$$

Cette somme a-t-elle une limite quand n croît indéfiniment ?

217. Évaluer la somme de la série

$$ar + (a + ab)r^2 + (a + ab + ab^2)r^3 + \dots,$$

r et br étant tous deux plus petits que l'unité.

218. Montrer que, $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ étant des nombres positifs ou négatifs, l'égalité

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) = (a_1a_2 + a_2a_3 + \dots a_{n-1}a_n)^2$$

ne peut avoir lieu que si les nombres

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n$$

sont en progression géométrique. (SMITH.

CHAPITRE III

LOGARITHMES

134. La définition du *logarithme* d'un nombre repose sur une proposition fondamentale que nous démontrerons d'abord :

Théorème. — a *étant un nombre positif,* $\sqrt[n]{a}$ *a pour limite* 1, *lorsque* n *croît indéfiniment.*

Supposons d'abord a plus grand que 1, $\sqrt[n]{a}$ sera, alors, toujours plus grand que 1. Pour prouver que $\sqrt[n]{a}$ a pour limite 1, quand n croît indéfiniment, il faudra montrer qu'on peut déterminer n de façon que l'on ait :

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.
On doit donc avoir

$$\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$$

ou

$$a < (1 + \varepsilon)^n.$$

Or (n° 133, *Lemme*), on sait que

$$1 + n\varepsilon < (1 + \varepsilon)^n.$$

Si donc on choisit n de façon que l'on ait :

$$a < 1 + n\varepsilon$$

ou

$$n > \frac{a - 1}{\varepsilon},$$

on aura, *a fortiori*,

$$a < (1 + \varepsilon)^n$$

ou

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon.$$

A tout nombre positif ε correspond donc le nombre $\frac{a - 1}{\varepsilon}$ tel que, pour toutes les valeurs de l'indice n supérieures à ce nombre $\frac{a - 1}{\varepsilon}$

on ait

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$$

$\sqrt[n]{a}$ a donc pour limite 1, quand n croît sans limite.

Lorsque a est plus petit que 1, son inverse $\frac{1}{a}$ est plus grand que 1. Or, on a :

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}},$$

et, d'après ce que nous venons de voir, $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}$ a pour limite 1, quand n croît indéfiniment, donc $\sqrt[n]{a}$ a une limite qui est $\frac{1}{1} = 1$.

Remarque. — Comme, d'après la définition des exposants fractionnaires (1),

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

on peut dire que $a^{\frac{1}{n}}$ a pour limite 1, quand n croît indéfiniment ou quand $\frac{1}{n}$ tend vers zéro.

135. Soit a un nombre positif que nous appellerons *base du système de logarithmes* et soit A un nombre positif quelconque. S'il existe un nombre *rationnel*, positif ou négatif, x, tel que l'on ait

$$a^x = A,$$

nous dirons que x est le *logarithme de* A, dans *le système de base* a, et nous écrirons

$$x = \log_a A.$$

Il est bon de remarquer, de suite, que s'il existe un nombre x, répondant à la question, il n'y en a qu'un, car l'égalité

$$a^x = a^{x'}$$

ne peut avoir lieu que si $x = x'$.

(1) La définition et les propriétés essentielles des exposants fractionnaires forment l'objet des nos 450 à 456 des *Leçons d'arithmétique* de M. Tannery. Ces numéros se trouvent reproduits, intégralement, à la fin du volume, dans l'*Appendice III*.

Le lecteur, pour suivre, plus aisément, les développements qui vont suivre, fera bien de relire l'*Appendice III* et les nos 19 et 27 de ce volume.

Comme, par définition,

$$a^0 = 1,$$

le logarithme de 1 est toujours 0, quel que soit a.

Exemples. — D'après cette définition, on a :

$$\log_a a^2 = 2;$$

$$\log_a \left(\sqrt[4]{a^3}\right) = \log_a a^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4};$$

$$\log_a \left(\frac{1}{\sqrt[2]{a}}\right) = \log_a a^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Étant donné un nombre *quelconque* positif A, il n'existera pas toujours un nombre rationnel x vérifiant l'égalité

$$a^x = A;$$

la définition précédente ne définit donc que les logarithmes d'une catégorie restreinte de nombres. Pour étendre cette définition à tous les nombres, nous montrerons, qu'étant donné un nombre *quelconque* A, on peut toujours trouver un nombre rationnel x (positif ou négatif) tel que a^x soit une valeur aussi approchée qu'on le voudra de A. Nous substituerons, alors, au nombre A, sa valeur approchée a^x, qui a un logarithme, et c'est le logarithme x de cette valeur approchée que nous appellerons le logarithme de A. Cette substitution d'une valeur approchée au nombre lui-même est parfaitement légitime. Car, comme nous le montrerons plus loin, les logarithmes ne servent que pour effectuer plus rapidement des calculs numériques, et on sait que, dans un calcul numérique, on peut, toujours, remplacer les nombres sur lesquels on opère par des valeurs approchées, pourvu que les approximations soient suffisamment grandes.

Il nous reste à prouver ce que nous avons avancé. Supposons la base a du système plus grande que 1, et soit, d'abord, A un nombre plus grand que 1. Soit n un nombre entier et considérons la progression géométrique indéfinie

$$\div\!\div 1 : a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{2}{n}} : a^{\frac{3}{n}} : \ldots\ldots$$

de raison $a^{\frac{1}{n}}$. Puisque a est plus grand que 1, la raison $a^{\frac{1}{n}}$ de la progression est aussi plus grande que 1 et la progression est crois-

sante. Comme, dans une progression géométrique croissante, les termes croissent au delà de toute limite, il existera toujours, dans cette progression, des termes plus grands que A. Soient, alors, $a^{\frac{p}{n}}$ et $a^{\frac{p+1}{n}}$ deux termes consécutifs de la progression qui comprennent A :

$$a^{\frac{p}{n}} < A < a^{\frac{p+1}{n}};$$

$a^{\frac{p}{n}}$ est une valeur approchée par défaut de A et, pour démontrer notre proposition, il suffit de montrer qu'on peut choisir n assez grand pour que la différence

$$A - a^{\frac{p}{n}}$$

soit plus petite qu'un nombre positif quelconque, donné à l'avance, ε. Or, comme on a, évidemment,

$$A - a^{\frac{p}{n}} < a^{\frac{p+1}{n}} - a^{\frac{p}{n}} \qquad (1),$$

il suffit de prouver qu'on peut prendre n assez grand pour que

$$a^{\frac{p+1}{n}} - a^{\frac{p}{n}} < \varepsilon.$$

On a :

$$a^{\frac{p+1}{n}} - a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p}{n}}\left[a^{\frac{1}{n}} - 1\right]$$

et, comme $a^{\frac{p}{n}}$ est plus petit que A, on a :

$$a^{\frac{p+1}{n}} - a^{\frac{p}{n}} < A\left[a^{\frac{1}{n}} - 1\right] \qquad (2).$$

Or, d'après le théorème précédent, on peut choisir n assez grand pour que

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\varepsilon}{A};$$

on aura, alors,

$$A\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \varepsilon$$

et, *a fortiori*, à cause des inégalités (1) et (2),

$$A - a^{\frac{p}{n}} < \varepsilon.$$

On peut remarquer, d'ailleurs, que l'on a, aussi,

$$a^{\frac{p+1}{n}} - A < \varepsilon;$$

$a^{\frac{p+1}{n}}$ est une valeur approchée par excès, à moins de ε près.

Supposons, maintenant, A positif et plus petit que 1. L'inverse $\frac{1}{A}$ de A sera un nombre plus grand que 1. D'après ce qui précède, on pourra trouver une valeur approchée $a^{\frac{q}{n}}$ de $\frac{1}{A}$, par excès, telle que

$$a^{\frac{q}{n}} - \frac{1}{A} < \varepsilon;$$

on aura, alors,

$$A - a^{-\frac{q}{n}} < \frac{A}{a^{\frac{q}{n}}}\,\varepsilon.$$

Or, puisque,

$$A < 1, \qquad a^{\frac{q}{n}} > 1,$$

on a, *a fortiori*,

$$A - a^{-\frac{q}{n}} < \varepsilon.$$

Ce qui montre qu'on peut trouver une valeur approchée par défaut de A, $a^{-\frac{q}{n}}$, aussi approchée qu'on le voudra.

Nous avons démontré la proposition en supposant a plus grand que 1. On ferait une démonstration analogue dans le cas où a est plus petit que 1. Mais, dans la pratique, on ne se sert que des logarithmes dont la base est plus grande que 1.

De tout ce qui précède nous pouvons donc conclure la définition générale suivante :

On appelle logarithme d'un nombre, dans le système de base a, *l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base* a *pour reproduire ce nombre.*

Avec cette convention, qu'au besoin, on remplace le nombre par une valeur approchée telle qu'il existe un nombre entier ou fractionnaire (positif ou négatif) répondant à l'énoncé.

Dorénavant, nous supposerons toujours que la substitution de la valeur approchée au nombre a été faite et, par suite, nous ne par-

lerons que de nombres A tels qu'il existe un nombre rationnel x vérifiant l'égalité

$$a^x = \mathrm{A}.$$

136. Des définitions précédentes il résulte, immédiatement, que, lorsque la base du système est plus grande que 1, les logarithmes des nombres plus grands que 1 sont positifs et que les logarithmes des nombres positifs plus petits que 1 sont négatifs. Il est, d'ailleurs, évident que tout nombre x rationnel, positif ou négatif peut être considéré comme le logarithme d'un certain nombre positif. Ce nombre est a^x et c'est *le seul* dont le logarithme est x.

Il est, maintenant, facile de démontrer la proposition suivante :

Pour connaître les logarithmes de tous les nombres, il suffit de connaître les logarithmes des nombres compris entre 1 *et la base* **a**.

En effet, soit, d'abord, un nombre A plus grand que a. Soit a^p la plus grande puissance *entière*, positive, de a contenue dans A, on pourra poser :

$$\mathrm{A} = a^p\, b,$$

b étant un nombre plus petit que a et plus grand que 1. Soit r le logarithme de b. On aura :

$$b = a^r$$

et, par suite,

$$\mathrm{A} = a^p\, a^r = a^{p+r}.$$

Le logarithme de A est donc $p + r$. Ce logarithme ne diffère de celui de b que par un nombre entier positif. Si donc on connaît le logarithme de b, on aura, immédiatement, celui de A en lui ajoutant le nombre entier p, facile à déterminer.

Prenons, en second lieu, un nombre A positif plus petit que 1, $\frac{1}{\mathrm{A}}$ sera plus grand que 1. Soit a^q la puissance positive entière de a immédiatement supérieure à $\frac{1}{\mathrm{A}}$, on aura :

$$\mathrm{A} = b\,\frac{1}{a^q} = a^{-q}\, b,$$

b étant un nombre compris entre 1 et a.

r désignant encore le logarithme de b, on aura :

$$\mathrm{A} = a^{-q}\, a^r = a^{-q+r}.$$

Le logarithme de A est donc $-q+r$ et ce logarithme ne diffère de celui de b que par un nombre entier *négatif*. Il suffit donc de connaître r pour avoir immédiatement le logarithme de A.

En résumé, on voit que le logarithme d'un nombre quelconque peut être écrit sous la forme

$$\pm c + m,$$

c étant un nombre entier ou nul et m le logarithme d'un nombre compris entre 1 et a. Or, le logarithme d'un nombre compris entre 1 et a est évidemment compris entre 0 et 1, m est donc un nombre positif plus petit que 1.

$\pm c$ est ce qu'on appelle la *caractéristique* du logarithme et m sa *mantisse*.

Comme on ne peut, évidemment, que d'*une seule manière* mettre le logarithme d'un nombre sous la forme $\pm c + m$, c étant entier et m un nombre positif plus petit que 1, on en conclut que, dès qu'on a mis un logarithme sous la forme d'une somme algébrique d'un nombre entier, positif ou négatif, et d'un nombre positif plus petit que 1, le nombre entier est la *caractéristique* et l'autre nombre est la *mantisse* du logarithme.

Un nombre compris entre 1 et a a pour caractéristique 0; un nombre plus grand que a a une caractéristique positive et un nombre plus petit que 1 a une caractéristique négative.

Des définitions précédentes il résulte que :

1° *La caractéristique du logarithme d'un nombre plus grand que 1 est l'exposant de la plus haute puissance entière de la base qui est contenue dans ce nombre.*

2° *La caractéristique du logarithme d'un nombre plus petit que 1 est l'exposant de la puissance entière, négative, de la base immédiatement inférieure à ce nombre.*

3° *La mantisse du logarithme d'un nombre est le logarithme du nombre, compris entre l'unité et la base, dont le logarithme ne diffère du logarithme du nombre donné que par un entier positif ou négatif.*

137. Les propriétés principales des logarithmes découlent, immédiatement, de leur définition et des propriétés des puissances (Voir n°s 19 et 27, ainsi que l'*Appendice III*). Voici celles qui nous seront utiles :

Propriété I. — *Dans tout système de logarithmes, le logarithme de* 1 *est* 0 *et le logarithme de la base est* 1.

Propriété II. — *Les nombres plus grands que* 1 *ont des logarithmes positifs et les nombres positifs plus petits que* 1 *ont des logarithmes*

négatifs (en supposant, comme toujours, la base plus grande que 1) [1].

Propriété III. — *Le logarithme d'un produit de plusieurs facteurs est la somme algébrique des logarithmes des facteurs.*

Soient A, B, C trois nombres et α, β, γ leurs logarithmes, dans le système de base a :

$$\alpha = \log_a A, \qquad \beta = \log_a B, \qquad \gamma = \log_a C.$$

Ceci veut dire, par définition des logarithmes, que l'on a (avec autant d'approximation qu'on l'a voulu)

$$A = a^\alpha, \qquad B = a^\beta, \qquad C = a^\gamma.$$

On a donc (n° 27, *Th. II*)

$$ABC = a^\alpha\, a^\beta\, a^\gamma = a^{\alpha+\beta+\gamma};$$

égalité qui prouve que

$$\alpha + \beta + \gamma = \log_a(ABC).$$

Donc :

$$\log_a(ABC) = \log_a A + \log_a B + \log_a C.$$

Propriété IV. — *Le logarithme d'un quotient est égal à l'excès du logarithme du numérateur sur le logarithme du dénominateur.*

Soient A et B deux nombres (positifs), α et β leurs logarithmes, dans le système de base a :

$$\alpha = \log_a A, \qquad \beta = \log_a B.$$

Par définition des logarithmes, on a :

$$A = a^\alpha, \qquad B = a^\beta$$

et, par suite,

$$\frac{A}{B} = \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$$

(Voir n° 27, *Th. III*). De cette égalité on conclut que

$$\alpha - \beta = \log_a\left(\frac{A}{B}\right),$$

(1) Il faut remarquer qu'il n'y a que les nombres *positifs* qui ont des logarithmes. Nous ne définissons pas les logarithmes de nombres négatifs.

puisque $\alpha - \beta$ est l'exposant de la puissance de a qui est égale à $\frac{A}{B}$.

Donc :
$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B.$$

Corollaire. — *Le logarithme de l'inverse d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre, changé de signe.*

Car, puisque
$$\log_a 1 = 0,$$
$$\log_a\left(\frac{1}{A}\right) = \log_a 1 - \log_a A = -\log_a A.$$

Propriété V. — *Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au produit du logarithme du nombre par l'exposant de la puissance.*

Soit A^k une puissance du nombre A et α le logarithme de A, dans le système de base a. On a :
$$A = a^\alpha$$
et, par suite,
$$A^k = (a^\alpha)^k.$$
Or, on a, *toujours*, que k soit entier, fractionnaire, positif ou négatif,
$$(a^\alpha)^k = a^{k\alpha},$$
donc :
$$A^k = a^{k\alpha};$$
égalité qui prouve que
$$k\alpha = \log_a(A^k)$$
ou que
$$\log_a(A^k) = k \cdot \log_a A.$$
En particulier, si $k = \frac{1}{n}$, on a la proposition suivante :
$$\log_a(\sqrt[n]{A}) = \frac{1}{n}\log_a A.$$

Le logarithme de la racine n^{ième} *d'un nombre est égal au quotient du logarithme de ce nombre par l'indice* n *de la racine.*

Application. — *De deux nombres différents le plus grand est celui*

qui a le plus grand logarithme (lorsque la base est plus grande que 1). Car, si

$$A > B,$$

on a

$$\frac{A}{B} > 1,$$

donc (*Propriété II*) :

$$\log\left(\frac{A}{B}\right) > 0$$

ou (*Propriété IV*)

$$\log A - \log B > 0,$$
$$\log A > \log B.$$

138. Les propriétés, que nous venons d'établir, mettent en évidence la grande utilité des logarithmes dans les calculs pratiques. Les Propriétés III et IV ramènent la multiplication et la division à l'addition et à la soustraction; la Propriété V ramène l'élévation aux puissances et l'extraction des racines à la multiplication et à la division. Ainsi, si l'on veut calculer le produit de plusieurs nombres, on calculera, d'abord, les logarithmes de ces nombres; on fera la somme algébrique de ces logarithmes et le nombre qui a pour logarithme cette somme est le produit cherché.

Pour que ce procédé de calcul soit plus simple que le procédé arithmétique, il faut, évidemment, qu'on ait un moyen de calculer, très rapidement, le logarithme d'un nombre. On a construit, à cet effet, des *tables*, dont nous expliquerons la disposition et l'usage plus loin, dans lesquelles on trouve les *mantisses* des logarithmes de tous les nombres.

L'invention des logarithmes est due à *Jean Néper*, baron écossais, qui publia cette découverte au commencement du dix-septième siècle [1].

On choisit, souvent, comme base du système de logarithmes un nombre irrationnel qui joue un grand rôle dans l'analyse mathématique et qu'on désigne, d'ordinaire, sous le nom de nombre e [2]. Les logarithmes de base e sont appelés *logarithmes naturels* ou *logarithmes hyperboliques* ou, mieux, *logarithmes Népériens*. On emploie pour les désigner le symbole L au lieu de *log*. Ces

(1) J. Néper. — *De mirifici logarithmorum canonis constructione.*

(2) La représentation décimale du nombre e est :

$$e = 2,718281828....$$

logarithmes ont un très grand intérêt en mathématiques et ce sont ceux, qu'au point de vue théorique, il est préférable d'employer.

Dans les calculs pratiques, on emploie les logarithmes dits *logarithmes vulgaires* ou *logarithmes décimaux*, à base 10, qui ont été imaginés par Briggs (1). Ce sont, comme nous allons le montrer, les logarithmes qui se prêtent le mieux aux calculs pratiques, parce que 10 est la base de notre système de numération. On désigne les logarithmes décimaux par le symbole *log*, sans indice.

On pourrait se proposer de calculer les logarithmes népériens connaissant les logarithmes décimaux ou réciproquement. Ceci revient à traiter le problème général du changement de base :

PROBLÈME. *Connaissant les logarithmes des nombres dans un système de base* a, *calculer les logarithmes de ces nombres dans un nouveau système de base* b.

Soit x le logarithme inconnu du nombre A dans le système de base b. On a, par définition,

$$b^x = \mathrm{A}.$$

Prenons les logarithmes des deux membres de cette égalité, dans le système de base a, il vient (*Propriété V*) :

$$x \log_a b = \log_a \mathrm{A},$$

d'où

$$x = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a \mathrm{A},$$

$$\log_b \mathrm{A} = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a \mathrm{A} \qquad (1).$$

De là on conclut que :

L'on obtient les nouveaux logarithmes en multipliant les anciens logarithmes par un nombre fixe, appelé module de la transformation, *et qui est l'inverse du logarithme de la nouvelle base dans l'ancien système.*

Remarquons que, si, dans l'égalité (1), on fait $\mathrm{A} = a$, on obtient, en observant que

$$\log_a a = 1,$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

Cette relation montre que *le module de la transformation est aussi le logarithme de l'ancienne base dans le nouveau système.*

Ainsi, pour calculer les logarithmes népériens, il suffit de multiplier les logarithmes vulgaires par l'inverse de log e ou par L10.

On appelle, en général, *module*, d'un système de logarithmes, le logarithme

(1) Briggs était contemporain de Néper et, le premier, publia une table contenant trente chiliadés de logarithmes à quatorze décimales.

népérien de la base. Les logarithmes népériens sont donc les logarithmes de module égal à 1. Le logarithme népérien d'un nombre se déduit du logarithme de ce nombre, dans un système quelconque, en multipliant ce logarithme par le *module* du système.

Le module des logarithmes décimaux est :

$$M = L10 = 2{,}302585092940\ldots.$$

139. Logarithmes décimaux. — Les logarithmes décimaux, à caractéristiques positives, ne présentent aucune difficulté d'écriture. Ainsi, si la caractéristique du logarithme est $+3$ et sa mantisse (avec 7 décimales) 0,2013221 le logarithme est :

$$+3 + 0{,}2013221 = 3{,}2013221.$$

Il n'en est plus de même pour les logarithmes à caractéristiques négatives. Pour de tels logarithmes, il faudrait faire une somme algébrique. Ainsi, si la caractéristique est -1 et la mantisse 0,7283015, le logarithme est :

$$-1 + 0{,}7283015 = -0{,}2716985.$$

Pratiquement, on n'effectue jamais cette soustraction et on a trouvé plus commode, pour les calculs, de laisser le logarithme sous la forme d'une somme algébrique *non effectuée*. On emploie, cependant, une notation abrégée et on écrit :

$$-1 + 0{,}7283015 = \bar{1}{,}7283015.$$

On écrit donc un logarithme, à caractéristique négative, en remplaçant, dans la mantisse, le 0 *situé à gauche de la virgule par la valeur absolue de la caractéristique qu'on surmonte d'un trait horizontal pour indiquer qu'elle est négative* (1).

Théorème I. — *La caractéristique du logarithme décimal d'un nombre plus grand que l'unité est égale au nombre des chiffres de sa partie entière, diminué d'une unité.*

Car, si la partie entière du nombre a p chiffres, le nombre est compris entre 10^p et 10^{p-1}, $p-1$ est donc l'exposant de la plus haute

(1) Dans certaines tables de logarithmes (anciennes), pour éviter d'écrire des caractéristiques négatives, on augmentait toutes les caractéristiques négatives de 10 unités. Ainsi, dans les anciennes tables de *Callet*, on trouve, au lieu de

$$\bar{2}{,}6223427,$$
$$8{,}6223427.$$

Ceci, bien entendu, ne se faisait que dans des cas où il ne pouvait y avoir aucune ambiguïté.

puissance entière de la base 10 contenue dans ce nombre, c'est donc (nº 136) la caractéristique du logarithme.

Ainsi, le nombre 216,307 a pour caractéristique 2.

Théorème II. — *La caractéristique du logarithme décimal d'un nombre plus petit que l'unité contient autant d'unités négatives qu'il y a de zéros à gauche du premier chiffre significatif, dans ce nombre (y compris le zéro qui est à gauche de la virgule).*

Remarquons, en effet, que, par exemple,

$$0,00837\,01$$

est compris entre

$$0,01 \quad \text{et} \quad 0,001,$$

c'est-à-dire entre

$$10^{-2} \quad \text{et} \quad 10^{-3}.$$

D'une manière générale, si le nombre (plus petit que un) a p zéros à la gauche du premier chiffre significatif, il est compris entre

$$10^{-(p-1)} \quad \text{et} \quad 10^{-p},$$

10^{-p} est donc la puissance négative de la base, immédiatement inférieure au nombre; $-p$ est donc (nº 136) la caractéristique du logarithme.

Ainsi, par exemple, le nombre

$$0,57001$$

a pour caractéristique — 1; et le nombre

$$0,000043$$

a pour caractéristique — 5.

Théorème III. — *Lorsque, dans un nombre décimal, on recule la virgule d'un certain nombre de rangs, le logarithme décimal conserve la même mantisse et la caractéristique augmente ou diminue d'un nombre d'unités égal au nombre de rangs dont on a reculé la virgule vers la droite ou vers la gauche.*

Reculer la virgule de p rangs vers la gauche, c'est diviser le nombre par 10^p ou le multiplier par 10^{-p}. Or, on a :

$$\log (10^{-p} \times A) = \log 10^{-p} + \log A$$

ou

$$\log (10^{-p} \times A) = -p + \log A.$$

Cette opération diminue donc le logarithme de p unités. Ceci ne modifie pas la mantisse et diminue la caractéristique de p unités.

Si on avait reculé la virgule de p rangs vers la droite on aurait multiplié le nombre par 10^p et, par suite, le logarithme aurait augmenté de p unités.

Remarque. — Les trois théorèmes précédents mettent en évidence un fait fondamental : La mantisse et la caractéristique jouent, dans les logarithmes décimaux, chacun, un rôle spécial. La caractéristique ne dépend que de la place de la virgule et aucunement des chiffres qui composent le nombre. La mantisse est, au contraire, indépendante de la virgule et ne dépend que des chiffres significatifs qui forment le nombre et de leur ordre de succession.

Il suffit de connaître la mantisse du logarithme d'un nombre pour pouvoir écrire le logarithme de ce nombre.

Exemples. — Le logarithme de 50402 a pour mantisse

$$0{,}7024478$$

(avec 7 décimales exactes). On pourra donc écrire facilement les logarithmes des nombres 50,402, 0,050402, 5040200 qui ont la même mantisse et dont les caractéristiques sont fournies par les règles des théorèmes I et II. Ainsi :

$$\log\ (50{,}402) = 1{,}7024478,$$
$$\log\ (0{,}050402) = \bar{2}{,}7024478,$$
$$\log\ (5040200) = 6{,}7024478.$$

De même, la mantisse du logarithme de 2 est

$$0{,}30\,:0300$$

on a donc

$$\log\ (200) = 2{,}3010300,$$
$$\log\ (0{,}002) = \bar{3}{,}3010300.$$

140. Cologarithme. — Supposons qu'on veuille calculer le quotient $\frac{ab}{c}$, on a :

$$\log \frac{ab}{c} = \log a + \log b - \log c.$$

Pour avoir le logarithme de $\frac{ab}{c}$ il faudrait donc faire la somme de $\log a$ et $\log b$ et retrancher, du résultat, $\log c$. On aurait ici à effectuer une soustraction. Pour la commodité des calculs, il est bon

d'éviter toute soustraction dans des calculs logarithmiques. Voici, alors, comment on s'y prend : on écrit

$$\log \frac{ab}{c} = \log a + \log b + \log \frac{1}{c}.$$

Si on connaissait $\log \frac{1}{c}$ on n'aurait qu'une seule addition à faire.

On appelle cologarithme d'un nombre le logarithme de l'inverse de ce nombre.

Le cologarithme d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre changé de signe (N° 137, *Propriété IV*, *Cor.*), mais il faut, encore, le mettre sous la forme ordinaire d'un logarithme, c'est-à-dire sous la forme d'une somme algébrique d'un nombre entier positif ou négatif et d'un nombre positif plus petit que l'unité.

Soit

$$\log N = c + m,$$

c étant la caractéristique et m la mantisse. On a :

$$\text{colog}\, N = -c - m.$$

Or, ceci peut s'écrire :

$$\text{colog}\, N = -(c+1) + (1-m).$$

$-(c+1)$ est un nombre entier, positif ou négatif; d'autre part, m étant un nombre positif plus petit que 1, $1-m$ est également un nombre positif et plus petit que 1. La caractéristique du cologarithme est donc $-(c+1)$ et sa mantisse $(1-m)$. La mantisse du cologarithme est donc le complément, à 1, de la mantisse du logarithme. Pour former ce complément on peut faire la remarque suivante : Posons, par exemple, la soustraction de 1 moins la mantisse 0,7024478 :

$$\begin{array}{l} 1 \\ 0{,}7024478 \\ \hline 0{,}2975522 \end{array}.$$

On voit que, pour faire cette soustraction, on retranche le dernier chiffre à droite de 10 et tous les chiffres suivants de 9. Si les derniers chiffres à droite sont des zéros, comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{array}{l} 1 \\ 0{,}3010300 \\ \hline 0{,}6989700 \end{array}$$

c'est le dernier chiffre *significatif* (autre que zéro), à droite, qu'on retranche de 10. On peut donc énoncer la règle suivante pour former le cologarithme d'un nombre :

Règle. — *Le cologarithme d'un nombre a pour caractéristique le nombre obtenu en augmentant la caractéristique du logarithme d'une unité et en changeant le résultat de signe. La mantisse du cologarithme s'obtient en prenant les compléments à 9 de tous les chiffres de la mantisse du logarithme, sauf pour le dernier chiffre significatif à droite, dont on prend le complément à 10. Si, à droite du dernier chiffre significatif, il y a des zéros, on les recopie.*

Exemples. — On a :

$$\log(50{,}402) = 1{,}7024478,$$
$$\log(0{,}050402) = \bar{2}{,}7024478,$$
$$\log(200) = 2{,}3010300,$$
$$\log(0{,}002) = \bar{3}{,}3010300;$$

on en déduit :

$$\operatorname{colog}(50{,}402) = \bar{2}{,}2975522,$$
$$\operatorname{colog}(0{,}050402) = 1{,}2975522,$$
$$\operatorname{colog}(200) = \bar{3}{,}6989700,$$
$$\operatorname{colog}(0{,}002) = 2{,}6989700.$$

141. Les opérations sur les logarithmes à caractéristiques positives ne présentent aucune particularité, car ces logarithmes sont des nombres décimaux ordinaires. Au contraire, les logarithmes à caractéristiques négatives, étant des sommes algébriques d'un nombre négatif et d'un nombre positif, les calculs de ces logarithmes devront être faits avec certaines précautions que nous allons expliquer.

Addition. — Pour faire la somme de plusieurs logarithmes, il suffit, évidemment, de faire la somme (arithmétique) des mantisses et la somme algébrique des caractéristiques. On peut disposer l'opération comme une addition de nombres décimaux ordinaires avec cette seule précaution que, lorsqu'on additionnera les chiffres de la colonne des caractéristiques, on devra faire une somme *algébrique*.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\log(200) &= 2{,}3010300\\
\log(0{,}07) &= \bar{2}{,}8450980\\
\log(0{,}12) &= \bar{1}{,}0791812\\
\operatorname{colog}(65) &= \underline{\bar{2}{,}1870866}\\
\log\left(\frac{200\times 0{,}07\times 0{,}12}{65}\right) &= \bar{2}{,}4123958.
\end{aligned}$$

Multiplication par un nombre entier. — Lorsqu'on veut calculer le logarithme d'une puissance entière d'un nombre, on est amené à faire le produit du logarithme de ce nombre par un nombre entier.

Pour faire le produit d'un logarithme, à caractéristique négative, par un nombre entier, il faudra faire, évidemment, la somme algébrique des produits de la mantisse et de la caractéristique, par cet entier.

La mantisse du produit est la partie décimale du produit de la mantisse par l'entier ; et la caractéristique est la somme algébrique du produit de la caractéristique par l'entier et de la partie entière du produit de la mantisse.

Ainsi, on a :

$$\log(0{,}07) = \bar{2}{,}8450980\,;$$

donc :

$$\log(0{,}07)^3 = 3 \times \log(0{,}07) = \bar{4}{,}5352940.$$

La caractéristique (— 4) est la somme algébrique du produit (— 6) de la caractéristique par 3 et de la partie entière 2 du produit de la mantisse par 3.

Division par un nombre entier. — Pour calculer le logarithme de la racine $n^{ième}$ d'un nombre, il faut diviser le logarithme de ce nombre par n. Lorsque le logarithme a une caractéristique positive, l'opération se fait sans difficulté. On remarquera seulement qu'on ne devra calculer, dans ce quotient, qu'autant de décimales qu'il y en a dans le logarithme donné. Si on connaît 7 décimales du logarithme, il serait absolument illusoire de calculer le quotient avec 8 décimales ; car, puisqu'on ne connaît pas la huitième décimale du logarithme, la huitième décimale du quotient par n ne sera pas non plus connue.

Ainsi,

$$\log 2 = 0{,}3010300\,;$$

donc :

$$\log \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3} \times \log 2 = 0{,}1003433.$$

Lorsque la caractéristique du logarithme est négative, il faudra procéder de la façon suivante :

nombres se calculent, facilement, par des extractions de racines carrées successives. Ainsi, le nombre qui a pour logarithme $\frac{1}{2}$ est $10^{\frac{1}{2}}$ ou $\sqrt{10}$; celui qui a pour logarithme $\frac{1}{4}$ est $10^{\frac{1}{4}}$ ou $\sqrt[4]{10} = \sqrt{\sqrt{10}}$, et on l'obtient en extrayant la racine carrée du précédent. De même, en extrayant la racine carrée du nouveau nombre, on a $\sqrt[8]{10}$ dont le logarithme est $\frac{1}{8}$; et ainsi de suite (¹).

Ces puissances de 10 ainsi calculées, on a une suite

$$10,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ r_p,\ \ldots\ r_{60} \qquad (1),$$

de nombres dont les logarithmes sont, respectivement,

$$1,\ \left(\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \ldots\ \left(\frac{1}{2}\right)^p,\ \ldots\ \left(\frac{1}{2}\right)^{60}.$$

Dans cette suite, chaque nombre est le carré du suivant :

$$r_{p-1} = (r_p)^2.$$

Cela étant, soit a un nombre compris entre 1 et 10. Ce nombre sera certainement compris entre deux nombres consécutifs de la suite (1).

Supposons, par exemple, a compris entre r_2 et r_3, a contient donc r_3 et ne contient pas r_2. On peut poser

$$a = r_3 \times b,$$

b étant un nombre plus grand que 1. D'ailleurs, b est plus petit que r_3, car, si b était plus grand que r_3, a serait plus grand que $(r_3)^2$ qui est égal à r_2; ce qui n'est pas. b étant plus petit que r_3, le plus grand nombre de la suite (1) contenu dans b sera d'un indice supérieur à 3. Supposons, par exemple, que b soit compris entre r_6 et r_7. On pourra poser

$$b = r_7 \times c,$$

et c sera un nombre plus grand que 1 et plus petit que r_7 (puisque b

(¹) On trouvera dans les tables de *Callet* (pages 12 et 13) une table des puissances fractionnaires de 10, depuis l'exposant $\frac{1}{2}$ jusqu'à l'exposant $\left(\frac{1}{2}\right)^{60}$ et, en regard, les expressions décimales des exposants.

est plus petit que $(r_7)^2 = r_6$). De même, on cherchera le plus grand nombre de la suite (1) contenu dans c soit, par exemple, r_{11}, on posera

$$c = r_{11} \times d;$$

et ainsi de suite. On aura

$$a = r_3 \times r_7 \times r_{11} \times d.$$

Les nombres b, c, d, etc..., vont en décroissant et tendent vers l'unité. Au bout d'un nombre d'opérations assez grand, on arrivera à un dernier quotient assez voisin de l'unité pour qu'il soit permis de le confondre avec l'unité et, alors, a sera mis, approximativement, sous la forme d'un produit de termes de la série (1) c'est-à-dire de puissances fractionnaires de 10 (1). On aura donc, au bout d'un nombre d'opérations assez grand, trouvé un nombre x, qui est la somme des exposants de 10 dans les divers facteurs r_3, r_7, r_{11}, etc..., tel que l'égalité

$$(10)^x = a$$

soit vérifiée avec telle approximation qu'on voudra. On aura donc,

$$x = \log a.$$

Par exemple, cherchons le logarithme de 1,1. On trouve, en se reportant à la suite (1), que 1,1 est compris entre r_4 et r_5. On peut donc poser

$$1,1 = r_5 \times b$$

ou

$$1,1 = (10)^{\frac{1}{32}} \times b,$$

et on a : $b = 1,0236292450.....$ D'ailleurs, b est lui-même compris entre r_6 et r_7. On peut donc poser

$$b = r_7 \times c$$

ou

$$b = (10)^{\frac{1}{128}} \times c.$$

(1) Pour montrer combien les termes de la suite (1) se rapprochent rapidement de l'unité, il suffit de considérer la valeur de r_{60}. On a :

$$r_{60} = 1,\ 00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ldots$$

on a donc :

$$r_{60} - 1 < \frac{1}{10^{17}}.$$

c est compris entre r_8 et r_9, et on pose

$$c = r_9 \times d$$

ou

$$c = (10)^{\frac{1}{512}} \times d.$$

On a donc :

$$1,1 = r_5 \times r_7 \times r_9 \times d$$

ou

$$1,1 = (10)^{\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{512}} \times d.$$

$\frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{512}$ est déjà une valeur approchée du logarithme cherché et l'erreur est certainement plus petite que $\frac{1}{512}$ puisque d, étant plus petit que r_9, est plus petit que $(10)^{\frac{1}{512}}$.

En continuant de la sorte, on trouve :

$$1,1 = r_5\ r_7\ r_9\ r_{12}\ r_{13}\ r_{17}\ r_{19}\ r_{20}\ r_{22}\ r_{23}\ r_{30}\ r_{32} \times q,$$

q étant plus petit que r_{32} :

$$q = 1,00000\ 00000\ 25841\ 22491\ 48.$$

On a donc :

$$\log\ (1,1) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^{13} + \left(\frac{1}{2}\right)^{17} + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$
$$+ \left(\frac{1}{2}\right)^{22} + \left(\frac{1}{2}\right)^{23} + \left(\frac{1}{2}\right)^{30} + \left(\frac{1}{2}\right)^{32},$$

et l'erreur commise est plus petite que $\left(\frac{1}{2}\right)^{32}$ qui est égal à

$$0,00000\ 00002\ 32830.....$$

Les *huit* premières décimales sont donc exactes et on trouve, en effectuant le calcul,

$$\log (1,1) = 0,04139268.$$

143. Disposition et usage des tables de logarithmes. — Toute table de logarithmes contient les parties décimales des mantisses des nombres de 1 à 10. Suivant le degré de précision que l'on veut mettre dans les calculs, on emploie des tables contenant les nombres de $\frac{1}{100}$ en $\frac{1}{100}$, de $\frac{1}{1000}$ en $\frac{1}{1000}$, ou de $\frac{1}{10000}$ en $\frac{1}{10000}$ et les mantisses avec 4, 5, 7 ou 8 décimales.

Les tables les plus usitées sont les tables qui contiennent les loga-

rithmes des nombres de cinq chiffres, de 1 à 100.000, avec 7 décimales exactes ([1]).

Voici la disposition générale d'une telle table. Chaque page est une table *à double entrée*. Dans une première colonne verticale à gauche, en tête de laquelle est inscrit le signe N ou *Num*, se trouvent les quatre premiers chiffres des nombres dont on cherche les logarithmes. A droite de cette première colonne se trouvent, successivement, dix colonnes en haut desquelles sont inscrits les chiffres 0, 1, 2 ... 8, 9.

La partie décimale de la mantisse d'un nombre est inscrite à l'intersection de la ligne horizontale, à gauche de laquelle se trouve (dans la colonne N) le nombre formé par ses 4 premiers chiffres, et de la colonne au haut de laquelle est inscrit le dernier chiffre. Ainsi, par exemple, la partie décimale de la mantisse du logarithme du nombre 64849 se trouve à l'intersection de la ligne horizontale, à gauche de laquelle est inscrit le nombre 6484 (dans la colonne N), et de la colonne au haut de laquelle est le chiffre 9.

Pour éviter de donner à la table des dimensions trop grandes, on ne répète pas les trois premiers chiffres de la mantisse qui sont communs à un grand nombre de logarithmes. Ces trois premiers chiffres sont écrits, une fois pour toutes, vis-à-vis du plus petit nombre de la colonne N auquel ils se rapportent, dans la colonne zéro. Ainsi, si l'on cherche la mantisse du logarithme de 64849 on ne trouve, à l'intersection de la ligne 6484 et de la colonne 9, que 9033 qui sont les quatre derniers chiffres de la partie décimale de la mantisse. Les trois premiers chiffres sont 811, qui sont inscrits dans la colonne 0, vis-à-vis de 6471. La mantisse du logarithme de 64849 est donc 0,8119033.

Pour faciliter les recherches, chaque page de la table porte en indication, au haut, les trois premiers chiffres du premier nombre et du premier logarithme qu'elle contient.

Les tables de logarithmes portent, en général, à gauche de la colonne N ou *Num* deux colonnes supplémentaires et, d'ailleurs, d'autres indications qui ne servent pas dans le calcul des logarithmes des nombres et dont, par suite, nous n'avons pas à nous occuper ici ([2]).

(1) Telles sont les tables de *Callet*, de *Dupuis* et de *Schrön*. Dans les calculs rapides, on emploie de préférence des tables à cinq décimales, comme, par exemple, celle de *Hoüel*.

(2) Nous n'avons donné ici que des indications générales sur la disposition des tables à 7 décimales. Chaque table a certains détails qui lui sont particuliers. Toute table de logarithmes est précédée d'une *Introduction* dans laquelle on décrit sa disposition et son mode d'emploi. Nous renvoyons le lecteur, pour les détails, à cette *Introduction*.

Ceci posé, on peut, en se servant d'une table, résoudre les deux questions suivantes : connaissant un nombre, trouver son logarithme, et trouver un nombre connaissant son logarithme.

Problème. — *Calculer le logarithme d'un nombre donné.*

On calcule, d'abord, immédiatement, la caractéristique du nombre. Cette caractéristique se calcule, sans la table, par les règles des théorèmes I et II du n° 139. Si le nombre est plus grand que 1, sa caractéristique est positive et égale au nombre des chiffres de sa partie entière moins un. Si le nombre est plus petit que 1, sa caractéristique est négative et a pour valeur absolue le nombre des zéros situés à gauche du premier chiffre significatif de la partie décimale.

La mantisse se calcule au moyen des tables. Pour cela, on supprime, dans le nombre, la virgule et on cherche la mantisse du nombre entier ainsi obtenu. Si le nombre entier, ainsi obtenu, n'a pas plus de cinq chiffres on trouve, immédiatement, la partie décimale de la mantisse dans les tables.

Ainsi, le nombre 32,547 a pour caractéristique 1 et on trouve que la partie décimale de la mantisse de 32 547 est : 512 5110, on a donc :

$$\log(32{,}547) = 1{,}5125110.$$

Si le nombre entier obtenu, après suppression de la virgule, a plus de cinq chiffres, on procède de la façon suivante. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de trouver la mantisse de 3024075 : ce nombre est compris entre 3024000 et 3024100, la mantisse de son logarithme est donc comprise entre les mantisses des logarithmes de ces deux nombres, ou, ce qui revient au même, entre les mantisses des logarithmes des deux nombres 30240 et 30241. Ceci nous prouve que la mantisse du logarithme de 30240 est une valeur approchée par défaut de la mantisse de 3024075. Donc :

On obtient une valeur approchée par défaut de la mantisse du logarithme d'un nombre quelconque en prenant la mantisse du logarithme du nombre formé par ses cinq premiers chiffres à gauche.

Il reste à tenir compte des derniers chiffres 7 et 5. Pour cela, on remarque, en lisant une table de logarithmes, que la différence entre la partie décimale de la mantisse d'un logarithme et la partie décimale de la mantisse du logarithme suivant ne varie que très lentement. Ainsi, surtout vers la fin de la table, il arrive qu'on trouve des suites de *cinq* ou *six cents* logarithmes telles que l'excès de la mantisse d'un logarithme sur la mantisse du logarithme précédent soit constant. Ceci revient à dire *que, dans des intervalles suffisam-*

ment restreints, l'accroissement du logarithme peut être considéré comme proportionnel à l'accroissement du nombre.

En admettant ceci comme suffisamment exact, on pourra tenir compte d'un 6me ou 7me chiffre, par une application de la règle de proportionalité.

Ayant déterminé la partie décimale de la mantisse du nombre formé par les cinq premiers chiffres, on fait la différence d entre cette partie décimale et celle du logarithme suivant de la table. Alors, dans notre hypothèse, puisque, lorsque le cinquième chiffre augmente d'une unité, la partie décimale de la mantisse augmente de d, lorsque le sixième chiffre augmentera d'une unité, la partie décimale de la mantisse du logarithme augmentera de $\frac{d}{10}$ et, si le sixième chiffre est 7, par exemple, il faudra augmenter la partie décimale de la mantisse de

$$7 \times \frac{d}{10} = 0,7 \times d.$$

De même, lorsque le septième chiffre augmente d'une unité, la partie décimale augmente de $\frac{d}{100}$.

Si, donc, le septième chiffre est 5, par exemple, la partie décimale de la mantisse du logarithme doit être augmentée de

$$5 \times \frac{d}{100} = 0,05 \times d.$$

Ainsi, par exemple, soit à chercher la partie décimale de la mantisse de *log* (3024075). La partie décimale de la mantisse du logarithme de 30240 est 4805818. La différence entre cette partie décimale et celle du logarithme de 30241 est

$$d = 143\,;$$

pour tenir compte du sixième chiffre 7, il faudra donc augmenter la partie décimale et la mantisse de

$$0,7 \times 143 = 100,1\,;$$

et, pour tenir compte du septième chiffre 5, il faudra augmenter la partie décimale de la mantisse de

$$0,05 \times 143 = 7,15.$$

La partie décimale de la mantisse du logarithme de 3024075 est donc :

$$\begin{array}{r} 4805818 \\ 100,1 \\ 7,15 \\ \hline 4805925 \end{array}$$

Dans ces calculs, il ne faut jamais calculer plus de *sept* décimales. Cependant, lorsque la huitième décimale devrait être plus grande que 5, on force la septième décimale d'une unité.

Pratiquement, pour calculer les accroissements du logarithme, en tenant compte du sixième et du septième chiffre, on se sert de petites tables auxiliaires inscrites à la droite de chaque page de la table dans une colonne intitulée *diff.* ou PP (parties proportionnelles). Ces petites tables contiennent les produits par 0,1, 0,2, 0,3 ... 0,9 des différences des parties décimales des mantisses inscrites dans la page considérée.

Ainsi, dans la page où se trouve la mantisse de 30240, se trouve, dans la colonne des parties proportionnelles, la petite table suivante :

	143
1	14,3
2	28,6
3	42,9
4	57,2
5	71,5
6	85,8
7	100,1
8	114,4
9	128,7

En regard du nombre 7 se trouve le produit de 143 par 0,7. En reculant, dans cette table, toutes les virgules vers la gauche on a les produits de 143 par 0,01, 0,02, 0,03 ... 0,09 qui servent à tenir compte des septièmes chiffres.

Voici quelques exemples de disposition pratique des calculs dans la recherche du logarithme d'un nombre donné :

1° *Calculer* log (515,6718)

pour	51567	7123719	*diff.* = 84
pour	0,1	8,4	
pour	0,08	6,7	

log (515,6718) = 2,7123734

2° *Calculer* log (0,03141592)

pour	31415	4971371	*diff.*= 138
pour	0,9	124,2	
pour	0,02	2,8	

$$\log(0{,}03141592) = \bar{2}{,}4971498$$

La méthode des parties proportionnelles, qui se fonde sur la proportionalité de l'accroissement du logarithme à l'accroissement du nombre, ne donne pas de très bons résultats quand le nombre formé par les cinq premiers chiffres est tout à fait au début de la table entre 10000 et 10800, car, dans cet intervalle, l'hypothèse de la proportionalité est moins exacte. C'est à cause de cela que la majorité des tables à 7 décimales contiennent les logarithmes des nombres jusqu'à 108000, c'est-à-dire que les tables donnent *directement* le logarithme d'un nombre de 6 chiffres de 100000 à 108000. On n'a plus, alors, qu'à appliquer une seule fois la règle des parties proportionnelles pour tenir compte du septième chiffre, s'il y a lieu [1].

Problème inverse. — *Calculer un nombre connaissant son logarithme.*

Le logarithme d'un nombre étant donné, la mantisse fait connaître le nombre obtenu en supprimant la virgule et la caractéristique fait connaître la place de la virgule.

Si la mantisse du logarithme proposé a pour partie décimale précisément la partie décimale de la mantisse d'un nombre donné par la table, on a, immédiatement, le nombre cherché.

Ainsi, par exemple, soit à trouver le nombre dont le logarithme est :

$$\bar{2}{,}6923357.$$

On trouve, dans la table, que le nombre dont la partie décimale de la mantisse est

6923357

est : 49212. Le nombre cherché est donc :

0,049242.

Dans la majorité des cas, on ne trouve pas, dans la table, de nombre dont la partie décimale de la mantisse soit, précisément, celle du logarithme proposé. On cherche, alors, le nombre le plus

(1) Si le nombre proposé avait plus de sept chiffres, il serait inutile de pousser l'application de la règle de proportionalité en tenant compte du huitième chiffre, car on n'aurait pas une approximation plus grande.

grand dont la mantisse soit contenue dans la mantisse proposée, les cinq chiffres qui forment le nombre, sont alors, les cinq premiers chiffres du nombre cherché.

Il reste à calculer le sixième et le septième chiffre. Pour cela, on forme la différence δ entre la partie décimale de la mantisse proposée et la partie décimale de la plus grande mantisse de la table qui y est contenue. Soit, d'autre part, d la différence des parties décimales des deux mantisses, de la table, qui comprennent la mantisse proposée. En admettant, toujours, que l'accroissement du logarithme est proportionnel à l'accroissement du nombre, on pourra calculer les deux chiffres suivants.

Puisque, lorsque le cinquième chiffre du nombre augmente d'une unité, le logarithme augmente de d, le sixième chiffre sera égal au nombre entier de fois que $\frac{d}{10}$ sera contenu dans δ. On cherchera donc le plus grand des multiples de $\frac{d}{10}$ (multiples qui sont inscrits dans la table auxiliaire des parties proportionnelles) plus petit que δ. Soit δ' l'excès de δ sur ce multiple. Le septième chiffre sera évidemment égal au plus grand nombre entier de fois que $\frac{d}{100}$ est contenu dans δ'.

Par exemple, soit à trouver le nombre dont le logarithme est

$$3,7046971.$$

En se reportant à la table, on trouve que les deux nombres

$$50663 \quad \text{et} \quad 50664$$

ont pour parties décimales des mantisses de leurs logarithmes, respectivement,

$$7046909 \quad \text{et} \quad 7046995.$$

Le nombre cherché est donc (abstraction faite de la virgule) compris entre

$$50663 \quad \text{et} \quad 50664.$$

Les cinq premiers chiffres sont donc 50663. L'excès de la partie décimale de la mantisse donnée sur la partie décimale de la mantisse de 50663 est :

$$\delta = 7046971 - 7046909 = 62.$$

D'autre part, l'excès de la partie décimale de la mantisse de 50664 sur celle de 50663 est :

$$d = 7046995 - 7046909 = 86.$$

En se reportant à la table des parties proportionnelles, on trouve que le plus grand multiple de $\frac{d}{10} = 8{,}6$ contenu dans δ est

$$7 \times 8{,}6 = 60{,}2.$$

Le sixième chiffre est donc 7. L'excès de δ sur ce multiple est :

$$\delta' = 62 - 60{,}2 = 1{,}8.$$

En se reportant encore à la table des parties proportionnelles, et en reculant, dans tous les produits, la virgule d'un rang vers la gauche, on trouve que le plus grand multiple de $\frac{d}{100} = 0{,}86$ contenu dans δ' est :

$$2 \times 0{,}86 = 1{,}7.$$

Le septième chiffre est donc 2.

Pratiquement, on dispose l'opération de la façon suivante :

Calculer le nombre x tel que

$$\log x = 3{,}7046971.$$

pour	7046909....................	50663	*diff.* = 86
	$\delta = 62$		
pour	60,2..................	0,7	
	$\delta' = 1{,}8$		
pour	1,7..................	0,02	
	$x =$	5066,372	

Car, la caractéristique étant $+3$, la partie entière du nombre a quatre chiffres [1].

144. Application. — *Les logarithmes permettent de résoudre les équations exponentielles de la forme*

$$a^x = b.$$

a et b étant deux nombres positifs.

Car, en prenant les logarithmes des deux membres on a :

$$x \cdot \log a = \log b,$$

d'où

$$x = \frac{\log a}{\log b}.$$

(1) Comme nous l'avons dit plus haut, il serait illusoire de chercher à calculer un huitième chiffre, pour le nombre, en appliquant une troisième fois la méthode des parties proportionnelles, car l'approximation avec laquelle on connait le logarithme ne permet pas de calculer le nombre avec une plus grande approximation.

Exemple. — *Résoudre l'équation*

$$3^x = 0{,}5.$$

On a

$$x = \frac{\log 0{,}5}{\log 3}.$$

Or :

$$\log 3 = 0{,}4771213,$$
$$\log 0{,}5 = \bar{1}{,}6989700;$$

donc :

$$x = \frac{\bar{1}{,}6989700}{0{,}4771213}.$$

Comme le numérateur est négatif, on peut mettre le signe (—) en évidence de la façon suivante : on écrit

$$x = -\frac{\operatorname{colog} 0{,}5}{\log 3},$$
$$x = -\frac{0{,}3010300}{0{,}4771213}.$$

Il reste à calculer le quotient

$$q = \frac{0{,}3010300}{0{,}4771213}.$$

Pour cela, nous emploierons les logarithmes, car

$$\log q = \log(0{,}3010300) + \operatorname{colog}(0{,}4771213).$$

1° *Calcul de* log(0,3010300)

pour	30103	4786098	

$$\log 0{,}3010300 = \bar{1}{,}4786098.$$

2° *Calcul de* colog (0,4771213)

pour	47712	6786276	*diff.* = 91
pour	0,1	9,1	
pour	0,03	2,7	

$$\log(0{,}4771213) = \bar{1}{,}6786288$$
$$\operatorname{colog}(0{,}4771213) = 0{,}3213712.$$

3° *Calcul de* q :

$$\log(0{,}3010300) = \bar{1}{,}4786098$$
$$\text{colog}\,(0{,}4771213) = 0{,}3213712$$
$$\log q = \bar{1}{,}7999810$$

pour 7999743.................... 63092 *diff.* = 69
$\delta = 67$
pour 62,1.................. 0,9
$\delta' = 4{,}9$
pour 4,8.................. 0,07

$$q = 0{,}63092\,97.$$

Donc :

$$x = -\ 0{,}6309297.$$

EXERCICES

219. Calculer, par logarithmes, les valeurs numériques des expressions suivantes :

$$\frac{ab^2}{c^2}, \quad \sqrt[3]{(a+b)c^2}, \quad \sqrt[5]{ab^2(b+c)}$$

pour

$$a = 1235{,}61,$$
$$b = 4647{,}05,$$
$$c = 2081{,}72.$$

220. Résoudre les équations exponentielles :

$$(100)^x = 7;$$
$$3^{2x} - 5 \times 3^x + 6 = 0;$$
$$\frac{1}{2^x} + 2^x = \frac{26}{5}.$$

221. Quelle est la base du système de logarithmes dans lequel 47 a pour logarithme $\frac{3}{4}$?

222. Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \log x + \log y = a, \\ x^2 + y^2 = m; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^x = b^y, \\ x^a = y^b, \end{cases}$$

application numérique :

$$a = 2{,}0468360, \qquad b = 1{,}4306733$$

(BARBARIN);

$$\left\{\begin{aligned} (\sqrt{x})^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}} &= (\sqrt{y})^{\frac{8}{3}}, \\ (\sqrt{y})^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}} &= (\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}; \end{aligned}\right.$$

$$x^y = y^x,$$
$$a^x = b^y,$$

application numérique :

$$a = 2, \qquad b = 3;$$

$$x^{x^2 - 7x + 12} = 1,$$
$$y + x = 4;$$

$$(x + y)^{\frac{1}{x}} = 2,$$
$$(x + y) \times 3^x = 279936.$$

223. Connaissant le premier terme a, la raison q et le dernier terme l d'une progression géométrique limitée, calculer le nombre des termes.

Applications numériques :

$$a = 3, \qquad q = 2, \qquad l = 48;$$
$$a = 4, \qquad q = \frac{1}{2}, \qquad l = \frac{1}{4}.$$

224. Connaissant le premier terme a, le dernier terme l et la somme S des termes d'une progression géométrique, trouver le nombre des termes de la progression et la raison.

Application numérique :

$$a = 4, \qquad l = 4096, \qquad S = 5460.$$

CHAPITRE IV

INTÉRÊTS COMPOSÉS (1)

145. Rappelons, d'abord, en quelques mots, les règles de l'*Intérêt simple* (2).

Lorsqu'on prête une certaine somme d'argent, dite *capital*, l'emprunteur verse au prêteur une certaine somme d'argent, dite *intérêt* du capital, pour payer le droit de jouissance du capital. Le capital reste, d'ailleurs, la propriété du prêteur.

Dans le prêt à intérêt *simple*, on admet les conventions suivantes :

L'intérêt, produit par un capital, est proportionnel à ce capital et au temps du prêt. On appelle *taux* de l'intérêt, l'intérêt rapporté par l'unité de capital dans l'unité de temps. Ainsi le *taux* est r si 1 franc, placé pendant une année, rapporte r (fractions de francs). On dit que le taux est de 4 *pour cent*, ce qui s'écrit 4 %, si 100 francs rapportent 4 francs en un an. Ainsi, au taux de 4 %, 1 franc rapporte $0^{fr},04$, en un an.

La formule générale de l'intérêt simple est

$$i = Art,$$

i désignant l'intérêt et A le capital, exprimés en francs, r le taux, et t le temps du placement, en prenant l'année pour unité de temps.

146. Une somme est placée à *intérêts composés* lorsque, à la fin de chaque unité de temps, l'intérêt est ajouté au capital et produit lui-même intérêt pendant les unités de temps qui suivent.

On dit que les intérêts sont *capitalisés* à la fin de chaque unité de temps. Ordinairement, on prend l'année pour unité de temps.

Le problème général des intérêts composés est le suivant :

Problème. — *Calculer ce que devient un capital* A, *placé à intérêts composés, pendant* n *années, au taux* r, *les intérêts se capitalisant à la fin de chaque année.*

Pendant la première année, le capital A a produit l'intérêt Ar, ce capital est donc devenu

$$A + Ar = A(1 + r).$$

(1) La question des intérêts composés a déjà été traitée en arithmétique par M. Tannery, dans les n°s 388 à 390 de ses *Leçons d'arithmétique*. Nous reprenons ici la question parce que l'usage des logarithmes simplifie la solution des problèmes auxquels on est conduit.

(2) Voir dans les *Leçons d'arithmétique* de M. Tannery, les n°s 377 à 387.

Ceci prouve que :

L'on obtient la valeur acquise par un capital au bout d'un an, en multipliant ce capital par $(1 + r)$.

Au bout de la première année le capital est $A(1 + r)$; au bout de la seconde année il est donc égal à

$$A(1 + r)(1 + r) = A(1 + r)^2.$$

La valeur acquise, par le capital, au bout de la troisième année s'obtiendra en multipliant la valeur acquise au bout de la seconde année par $(1 + r)$. Cette valeur est donc $A(1 + r)^3$; et ainsi de suite. La valeur acquise, par le capital, au bout de n années, sera donc A' :

$$A' = A(1 + r)^n \qquad (1).$$

Cette formule donne des calculs faciles à faire par logarithmes, car on a :

$$\log A' = \log A + n \,.\log(1 + r).$$

Exemple. — *Que devient un capital de 1 000 francs placé à intérêts composés pendant dix ans à 3 °/₀?*

On a, ici :

$$A = 10000, \quad n = 10, \quad 1 + r = 1{,}03;$$
$$\log A = 4, \ \log(1 + r) = 0{,}012\,8372,$$
$$n.\log(1 + r) = 0{,}1283720.$$

Donc,

$$\log A' = 4{,}1283720;$$

ce qui donne

$$A' = 13439^{\text{fr}},15.$$

147. Cas général. — *Le temps du placement n'est pas un nombre entier d'années.*

Supposons que le capital A ait été placé, à intérêts composés, pendant un nombre n d'années, plus une fraction $\frac{p}{q}$ d'année, au taux r. Au bout des n années le capital est devenu

$$A(1 + r)^n.$$

Il est naturel de supposer que, pendant la fraction $\frac{p}{q}$ d'années, le capital soit placé à intérêt simple.

Cet intérêt est, alors,

$$A\,(1+r)^n \frac{p}{q} r$$

et le capital est devenu

$$A\,(1+r)^n + A\,(1+r)^n \frac{p}{q} r = A\,(1+r)^n \left(1+\frac{p}{q} r\right).$$

La formule

$$A' = A\,(1+r)^n \left(1+\frac{p}{q} r\right) \qquad (2),$$

à laquelle on parvient, se prête mal aux calculs logarithmiques. *Pratiquement*, on lui substitue la formule suivante :

$$A' = A\,(1+r)^{n+\frac{p}{q}}$$

qui donne, pour la valeur de A′, des résultats un peu plus faibles ([1]), mais qui est plus commode dans les calculs, car elle donne

$$\log A' = \log A + \left(n+\frac{p}{q}\right) \log\,(1+r).$$

Cette formule peut, d'ailleurs, être justifiée par le raisonnement suivant :

Au lieu de supposer que les intérêts soient capitalisés tous les

(1) Pour montrer que la formule pratique donne des résultats plus faibles que la formule (2), il suffit de montrer que

$$(1+r)^{\frac{p}{q}} < 1+\frac{p}{q} r,$$

r étant un nombre positif et $\frac{p}{q}$ un nombre plus petit que 1. Ceci se vérifie facilement dans le cas où $p = 1$. Car, q étant un nombre entier, on a (Voir n° 133, *Lemme*) :

$$1 + q\alpha < (1+\alpha)^q\,;$$

prenons

$$\alpha = \frac{r}{q},$$

on aura

$$1 + r < \left(1+\frac{r}{q}\right)^q$$

ou

$$\left(1+r\right)^{\frac{1}{q}} < 1+\frac{r}{q}.$$

Lorsque $\frac{p}{q}$ est quelconque mais plus petit que 1, on peut faire la démonstration de la façon suivante :

ans, supposons qu'on les capitalise tous les $q^{ièmes}$ années. Calculons quel doit être le taux pour que, dans cette nouvelle hypothèse, le capital obtenu soit le même que celui qu'on obtient par la formule (1), quand le nombre des années est entier. Or, 1 franc, au bout d'une année, devient $1 + r$; d'autre part, soit x le taux cherché, c'est-à-dire l'intérêt de 1 franc dans un $q^{ième}$ d'année : en

Considérons la différence

$$y = \left(1 + x\right)^{\frac{p}{q}} - \left(1 + \frac{p}{q}x\right)$$

et prenons la dérivée de cette fonction y de x :

$$y' = \frac{p}{q}\left(1 + x\right)^{\frac{p}{q}-1} - \frac{p}{q} \qquad \text{(Voir } \textit{Exercice } 163\text{)}.$$

Cette dérivée s'écrit

$$y' = \frac{p}{q}\left[\frac{1}{\left(1 + x\right)^{1-\frac{p}{q}}} - 1\right]$$

Pour toute valeur positive de x, $(1 + x)$ est plus grand que 1 et, par suite, toute puissance positive $\left(1 + x\right)^{1-\frac{p}{q}}$, de $(1 + x)$, est aussi plus grande que 1. Pour toute valeur positive de x, la quantité entre crochets est négative et, par suite, la dérivée y' est négative. La fonction y *décroît* donc, lorsque x est positif $\left(\frac{p}{q} < 1\right)$. Or, pour $x = 0$, on a $y = 0$, par suite, lorsque x croît à partir de zéro, y décroît à partir de zéro. Pour toute valeur positive de x, y est donc négatif et on a, pour $x = r$,

$$\left(1 + r\right)^{\frac{p}{q}} - \left(1 + \frac{p}{q}r\right) < 0$$

ou

$$\left(1 + r\right)^{\frac{p}{q}} < 1 + \frac{p}{q}r \qquad \left(\frac{p}{q} < 1\right).$$

La même démonstration montrerait que, si $\frac{p}{q}$ était plus grand que 1, la dérivée y' serait positive, pour toute valeur de x, et, par suite, aussi y.

Donc, si

$$\frac{p}{q} > 1,$$

on a :

$$\left(1 + r\right)^{\frac{p}{q}} > 1 + \frac{p}{q}r.$$

Nous avions déjà démontré cette proposition dans le cas où $\frac{p}{q}$ est entier (nº 133, *Lemme*).

un an, 1 franc sera devenu $(1+x)^q$, dans la nouvelle hypothèse. On devra donc avoir :

$$(1+x)^q = 1 + r$$

ou

$$1 + x = (1+r)^{\frac{1}{q}}.$$

Ceci posé, le capital, étant placé pendant $nq + p$, $q^{\text{ièmes}}$ d'années, les intérêts se capitalisant tous les $q^{\text{ièmes}}$ d'années, au taux x, devient :

$$A(1+x)^{nq+p}$$

et, par suite,

$$A(1+r)^{\frac{nq+p}{q}} = A(1+r)^{n+\frac{p}{q}}.$$

Pratiquement, la formule générale des intérêts composés est donc :

$$A' = A(1+r)^t \qquad (3),$$

t désignant le temps du placement, l'année (ou, plus généralement, la *période* de temps au bout de laquelle on capitalise les intérêts) étant prise pour unité. t peut être un nombre entier ou fractionnaire.

148. La formule générale des intérêts composés

$$A' = A(1+r)^t \qquad (3)$$

contient quatre quantités A′, A, r et t.

Lorsqu'on connaît trois de ces quantités, la quatrième est donnée par la formule (3). Ceci fournit donc quatre types de problèmes différents, suivant qu'on prend comme inconnue l'une des quatre quantités.

I. — Le premier problème est celui que nous avons traité :

Que devient un capital A *placé, à intérêts composés, pendant le temps* t, *au taux* r?

La formule (3) donne, immédiatement, le capital A′ cherché. On trouve des tables toutes faites donnant les valeurs de $(1+r)^n$ pour les taux usuels et une suite de valeurs de l'exposant n [1], mais

[1] M. Tannery, dans ses excellentes *Leçons d'arithmétique*, indique l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, qui contient les valeurs de $(1+r)^n$ et de $\frac{1}{(1+r)^n}$ pour $r = 0{,}025$; 0,03 ; 0,035 ;... 0,06 et pour les valeurs de n, de 1 à 34. Pour les calculs plus compliqués, il indique encore la *Théorie des intérêts composés et annuités* de Fédor Thoman et la *Théorie mathématique des opérations financières* de M. Charlon (Gauthier-Villars et fils).

l'emploi des logarithmes, dans les calculs, dispense, facilement, de l'usage de ces tables. On a, en effet

$$\log A' = \log A + t \log(1 + r).$$

II. — *Quel est le capital qu'il faut placer, à intérêts composés, au taux* r, *pendant le temps* t, *pour obtenir un capital* A'?

De la formule (3) on tire :

$$A = \frac{A'}{(1 + r)^t}$$

d'où

$$\log A = \log A' + t.\operatorname{colog}(1 + r).$$

Exemple. — *Quelle somme un père doit-il placer, à intérêts composés, à 3 °/₀, à la naissance de sa fille, pour lui constituer, à dix-huit ans, une dot de 100 000 francs?*

Ici, on a :

$$A' = 100\,000, \quad t = 18, \quad 1 + r = 1{,}03;$$
$$\log A' = 5, \quad \log(1 + r) = 0{,}0128372,$$
$$\operatorname{colog}(1 + r) = \bar{1}{,}9871628, \quad 18.\operatorname{colog}(1 + r) = \bar{1}{,}7689304.$$

Donc

$$\log A = 4{,}7689304,$$

d'où

$$A = 58739^{fr}{,}52$$

III. — *A quel taux faut-il placer un capital* A, *à intérêts composés, pour qu'il devienne* A' *dans le temps* t?

La formule (3) donne

$$\log A' = \log A + t \log(1 + r)$$

d'où

$$\log(1 + r) = \frac{\log A' + \operatorname{colog} A}{t}$$

on a, ainsi, $1 + r$ et, par suite, r.

Exemple. — *A quel taux faudrait-il placer un capital pour qu'il fût doublé en 15 ans, à intérêts composés ?*

La formule (3) donne :

$$2 = (1 + r)^{15}$$

d'où

$$\log(1+r) = \frac{\log 2}{15} = \frac{0,3010300}{15}$$

$$\log(1+r) = 0,0200686,$$

on en tire :

$$1 + r = 1,0472$$

$$r = 0,0472.$$

Le taux cherché est donc 4,72 %.

IV. — *Combien de temps faut-il placer un capital* A *pour, qu'à intérêts composés, au taux* r, *il devienne* A'?

Puisque, d'après la formule (3),

$$\log A' = \log A + t \log(1+r),$$

on a :

$$t = \frac{\log A' + \operatorname{colog} A}{\log(1+r)}.$$

Pour calculer le quotient qui donne t, on pourra encore employer les logarithmes :

$$\log t = \log[\log A' + \operatorname{colog} A] + \operatorname{colog}[\log(1+r)]$$

Exemple. — *Au bout de combien de temps un capital placé, à intérêts composés, à 5 %, aura-t-il décuplé?* (1).

La formule (3) donne :

$$10 = (1,05)^t$$

d'où

$$t = \frac{\log(10)}{\log(1,05)} = \frac{1}{0,0211893},$$

$$\log t = \operatorname{colog}(0,0211893) = 1,6738833 ;$$

ce qui donne

$$t = 47,19362,$$

ou

$$t = 47^{\text{ans}}\ 2^{\text{mois}}\ 9^{\text{jours}}.$$

Remarque. — Lorsqu'on suppose que la *période*, au bout de laquelle on capitalise les intérêts, est le $q^{\text{ième}}$ d'année, on fait d'ordinaire la convention que le taux est tel que le capital acquiert au bout d'un

(1) Voir, dans les *Leçons d'arithmétique* de M. Tannery (n° 390), comment on pourrait traiter ce problème sans se servir de tables de logarithmes.

an la même valeur que si la période était d'un an, à un taux donné.

Dans ces conditions, la valeur acquise par un capital au bout d'un an est toujours la même quel que soit q.

Mais on pourrait calculer la valeur acquise par le capital de la façon suivante qui serait, peut-être, plus rationnelle :

Soit r le *taux*, c'est-à-dire l'intérêt de 1 franc pendant un an. Pendant un $q^{\text{ième}}$ d'année, 1 franc rapporte $\frac{r}{q}$. Donc, au bout d'un premier $q^{\text{ième}}$ d'année, le capital A est devenu :

$$A\left(1+\frac{r}{q}\right).$$

Au bout de p périodes, ou $\frac{p}{q}$ années, le capital sera devenu :

$$A\left(1+\frac{r}{q}\right)^p.$$

Par exemple, au bout de n années, $p = nq$, et le capital sera :

$$A' = A\left(1+\frac{r}{q}\right)^{nq}$$

ou

$$A' = A\left[\left(1+\frac{r}{q}\right)^q\right]^n \qquad (4).$$

Le multiplicateur du capital A est ici

$$\left[\left(1+\frac{r}{q}\right)^q\right]^n,$$

au lieu de

$$(1+r)^n.$$

Or, comme on sait (n° 133, *Lemme*), on a :

$$\left(1+\frac{r}{q}\right)^q > 1 + q\,\frac{r}{q},$$

ou

$$\left(1+\frac{r}{q}\right)^q > 1 + r;$$

on a donc

$$\left[\left(1+\frac{r}{q}\right)^q\right]^n > (1+r)^n.$$

Le nouveau multiplicateur est donc plus grand. Il y aurait donc avantage à diminuer la période.

C'est précisément pour éviter cet avantage que donnerait le fractionnement de la période, que les banquiers ont adopté la convention qui conduit à la formule (3), convention qui n'est pas en accord absolu avec les règles de l'intérêt simple, comme celle qui nous a conduit à la formule (4).

Lorsque q augmente, le multiplicateur de la formule (4) augmente, mais il n'augmente pas indéfiniment. On peut, en effet, démontrer [1] que, lorsque q croît indéfiniment,

$$\left(1 + \frac{r}{q}\right)^q$$

a pour limite e^r, e désignant la base des logarithmes népériens. A la limite, la formule (4) devient, quand q croît indéfiniment,

$$A' = A\ e^{rn},$$

qui serait ce qu'on pourrait appeler la formule des intérêts composés à *capitalisation instantanée.*

CHAPITRE V

ANNUITÉS ET AMORTISSEMENTS

149. Placements annuels. — *Une personne place, tous les ans, au commencement de l'année, une même somme* a, *à intérêts composés, quel est le capital constitué au bout de* n *années?*

Le placement a, placé au commencement de la première année, reste placé pendant n années et a, par suite, acquis, au bout des n années, la valeur

$$a\,(1 + r)^n,$$

r étant le taux.

Le second placement a ne reste placé que $(n - 1)$ années et devient, au bout des n années,

$$a\,(1 + r)^{n-1};$$

(1) Cette démonstration est du ressort de l'algèbre supérieure.

et, ainsi de suite. Le dernier placement ne reste placé que pendant une année et acquiert la valeur

$$a\,(1 + r).$$

Le capital constitué, au bout des n années, est la somme P des valeurs acquises par les placements partiels. On a donc :

$$P = a\,(1 + r) + a\,(1 + r)^2 + \ldots + a\,(1 + r)^{n-1} + a\,(1 + r)^n.$$

Le second membre de cette égalité est la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est $a\,(1 + r)$ et la raison $(1 + r)$; on a (n° 132, *Th. I*) :

$$P = \frac{a\,(1 + r)^{n+1} - a\,(1 + r)}{(1 + r) - 1}$$

ou

$$P = a\,(1 + r)\frac{(1 + r)^n - 1}{r} \qquad (1).$$

Cette formule n'est pas, directement, calculable par logarithmes (¹), car on a :

$$\log P = \log a + \log (1 + r) + \log \left[(1 + r)^n - 1\right] + \operatorname{colog} r$$

et on ne connait pas directement la quantité $(1 + r)^n - 1$, car il faut faire un premier calcul logarithmique pour connaître $(1 + r)^n$. Si, donc, on veut calculer P, par logarithmes, il faut, d'abord, calculer $(1 + r)^n$, puis, ayant formé $(1 + r)^n - 1$, appliquer la formule précédente qui donne *log* P.

Exemple. — *Une personne dépose à la caisse d'épargne, tous les ans, au commencement de l'année,* 125 *francs, pendant dix ans, on demande quelle somme elle aura à toucher au bout de dix ans. Le taux de l'intérêt est* 2,5 °/ₒ.

Ici on a :

$$a = 125, \quad n = 10, \quad r = 0{,}025.$$

(1) On dit qu'une expression est *calculable par logarithmes* lorsqu'elle ne contient aucun signe (+) ou (—) reliant des quantités connues ou des quantités qu'on déduit *facilement* des quantités connues. Ainsi l'expression

$$a\,(1 + r)^n$$

qui donne la valeur acquise par un capital a, placé à intérêts composés, est calculable par logarithmes.

On calcule, d'abord, $(1+r)^n$:

$$\log(1+r) = 0{,}0107239,$$
$$10 \cdot \log(1+r) = 0{,}1072390,$$

d'où on tire :

$$(1+r)^{10} = 1{,}28008$$

et

$$(1+r)^{10} - 1 = 0{,}28008.$$

Pour calculer P, on a, alors,

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}0969100 \\ \log(1+r) &= 0{,}0107239 \\ \log\left[(1+r)^{10}-1\right] &= \bar{1}{,}4472821 \\ \operatorname{colog} r &= 1{,}6020600 \\ \hline \log P &= 3{,}1569760 \\ P &= 1\,435^{fr},41. \end{aligned}$$

Le calcul direct de P, par l'emploi unique des logarithmes, est assez pénible ; aussi, dans la pratique, se sert-on de tables toutes faites donnant les valeurs du multiplicateur

$$(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r},$$

pour les valeurs usuelles de r et de n.

On trouve, par exemple, dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* une table donnant les valeurs de ce multiplicateur pour les taux 3,5 ; 4 ; 4,5 ; et 5 %, et de 1 à 33 années.

EXEMPLE. — *Quel est le capital produit, au bout de 15 années, par 15 placements de 1 000 francs chaque, à 4 %.*

On trouve, dans les tables, qu'un placement de 1 franc, pendant 15 années, produit

$$20^{fr},824531 ;$$

1 000 francs produisent, donc,

$$20\,824^{fr},531.$$

La formule qui donne P contient quatre quantités : P, a, r, et n. Les problèmes de placements peuvent donc affecter quatre formes différentes, suivant que l'inconnue est l'une de ces quatre quantités. Lorsque l'inconnue est P ou a, le problème ne présente aucune difficulté. Lorsque l'inconnue est r, le problème n'est pas toujours

complètement résoluble par les procédés élémentaires. Car, si on prend $(1 + r)$ comme inconnue

$$1 + r = x,$$

on a :

$$P = ax\frac{x^n - 1}{x - 1} = a(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x)$$

ce qui donne, pour déterminer x, l'équation

$$ax^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + ax^2 + ax - P = 0,$$

équation complète de degré n qu'on ne sait pas résoudre, élémentairement, dès que n dépasse la valeur 2 (1). D'ailleurs, pratiquement, ce problème ne se présente jamais.

Dans le cas où l'inconnue est le nombre n des placements, le problème n'a de sens que si la solution est un nombre entier. Le problème se résoud, facilement, au moyen des tables. Il suffit de chercher, dans la colonne correspondante au taux r, la valeur de n pour laquelle l'expression

$$(1 + r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

est égale à $\frac{P}{a}$. Par les logarithmes, on a aussi, facilement,

$$\log[(1 + r)^n - 1] = \log P + \log r + \operatorname{colog} a + \operatorname{colog}(1+r).$$

Ayant, ainsi, calculé $(1 + r)^n - 1$, on a $(1 + r)^n$. Supposons qu'on ait trouvé

$$(1 + r)^n = A,$$

on en tire

$$n = \frac{\log A}{\log(1 + r)}.$$

(1) On pourrait résoudre le problème, approximativement, en cherchant, dans les tables qui donnent les valeurs de $(1 + r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}$, quelles sont les deux valeurs de r telles que, pour le nombre n d'années donné, les valeurs correspondantes de $(1 + r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}$ comprennent le quotient $\frac{P}{a}$. La plus petite de ces deux valeurs de r sera une valeur approchée, par défaut, du taux cherché.

Si n n'était pas un nombre entier, on aurait une solution approximative en prenant pour n la partie entière du quotient.

— On appelle *valeur actuelle* d'un placement a placé, à intérêts composés, pendant n années, au commencement de chaque année, le capital V qu'il faudrait placer au commencement de la première année pour obtenir, par ce placement unique, au bout des n années, le même capital que celui qu'on obtient par les n placements annuels.

D'après la formule des intérêts composés, on a, évidemment,

$$V = \frac{P}{(1+r)^n}$$

d'où

$$V = \frac{a}{r}(1+r)\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

L'*Annuaire du Bureau des Longitudes* contient, aussi, des tables donnant les valeurs de

$$(1+r)\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right],$$

pour les valeurs usuelles de r et n.

150. Annuités. — On appelle *annuités* des versements égaux effectués, pendant un certain nombre d'années, *à la fin* de chaque année (1). Chaque *annuité* est placée à intérêts composés.

Le problème le plus général des annuités est le suivant :

Problème. — *Quel est le capital* C *produit par* n *annuités* a *versées, à la fin de chaque année, pendant* n *années?* (r *étant le taux de l'argent*).

Ce problème se traite de la même façon que celui des placements annuels, la seule différence est que chaque versement, étant effectué *à la fin* de l'année, reste placé pendant un an de moins. Ainsi, la première annuité ne reste placée que $(n-1)$ années, la seconde $(n-2)$ années, l'avant-dernière une année, et la dernière annuité ne rapporte aucun intérêt. On a, alors, immédiatement,

$$C = a + a(1+r) + \ldots + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-1}$$

(1) On donne quelquefois, d'une façon incorrecte, le nom d'*annuités* aux placements annuels effectués *au commencement* de chaque année. Ordinairement, le nom d'annuités est réservé, comme nous l'avons fait, aux versements effectués *à la fin* de chaque année, versements qui servent à rembourser une dette ou à fournir une rente temporaire d'un capital placé à fonds perdus.

et, comme le second membre est la somme des termes d'une progression géométrique, on a :

$$C = a\frac{(1+r)^n - 1}{r} \qquad (2),$$

qui est la formule générale des annuités.

Cette formule, de même que la formule (1) des placements annuels, n'est pas calculable par logarithmes. Pour les calculs pratiques, on a construit des tables donnant les valeurs usuelles de $\frac{(1+r)^n - 1}{r}$, c'est-à-dire le capital produit par une annuité de 1 franc placée pendant n années, à la fin de chaque année, au taux r. On trouve une de ces tables dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes.*

La formule (2) donne lieu aux mêmes remarques que la formule (1) des placements annuels. On peut imaginer quatre formes de problèmes sur les annuités, suivant que l'inconnue est l'une des quatre quantités C, a, r, ou n, et ces problèmes se résolvent de la même façon que les problèmes analogues de placements annuels.

— On appelle *valeur actuelle* d'une annuité a, versée pendant n années, à la fin de chaque année, le versement unique qu'il faudrait faire, au commencement de la première année, pour obtenir, au bout des n années, le même capital que celui qu'on obtient par les versements des n annuités.

Soit V la valeur actuelle, on a, évidemment,

$$V = \frac{C}{(1+r)^n}$$

d'où

$$V = \frac{a}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] \qquad (3).$$

Exemple. — *Une personne A désire faire, à une autre personne B, une rente de 1 000 francs par an, pendant vingt ans. A cet effet, elle verse, une fois pour toutes, une certaine somme dans une maison de banque, qui se chargera de servir la rente pendant les vingt années, à la fin de chaque année. Quelle est la somme que la personne A devra verser à la banque? Le taux de l'argent étant* 3,5 °/₀.

La somme à verser est évidemment, la valeur actuelle V d'une annuité de 1 000 francs versée pendant 20 ans.

On applique donc la formule

$$V = \frac{a}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

où

$$a = 1\,000, \quad r = 0{,}035 \quad \text{et} \quad n = 20.$$

On trouve, dans les tables de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, pour

$$r = 0{,}035 \quad \text{et} \quad n = 20,$$

$$\frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] = 14{,}212403;$$

la somme à verser est donc,

$$V = 14\,212^{\text{fr}},403.$$

151. Amortissements. — *Amortir* une dette ou un emprunt, c'est rembourser cette dette ou cet emprunt par les versements d'un certain nombre d'annuités.

Il y a deux sortes de questions d'amortissement suivant que les annuités *précèdent* l'échéance de la dette ou *suivent* le jour de l'emprunt.

I. La liquidation d'un capital, remboursable au bout d'un certain nombre d'années, peut s'opérer par un paiement intégral à l'échéance ou par le versement, chaque année, d'une annuité.

L'accumulation des annuités et de leurs intérêts composés reconstitue, à l'époque de l'échéance, le capital. Après le versement de la dernière annuité, la dette est éteinte, *amortie*.

Le calcul de l'annuité à verser, pendant n années, pour éteindre la dette C, s'obtient en appliquant la formule (2) (n° 150) qui donne le capital constitué par n annuités égales à a :

$$C = a\,\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

d'où on tire :

$$a = C\,\frac{r}{(1+r)^n - 1} \qquad (4).$$

La quantité $\dfrac{r}{(1+r)^n - 1}$ est ce qu'on appelle le *taux* de l'amortissement. L'*Annuaire du Bureau des Longitudes* contient des tables qui donnent les valeurs de ce taux, pour les valeurs usuelles de r et n. Si on désigne par t le taux de l'amortissement, la formule (4) s'écrit

$$a = Ct.$$

Les questions d'amortissement peuvent affecter quatre formes

différentes, suivant qu'on prend pour inconnue une des quatre quantités a, C, r ou n. Il faut ajouter, à cela, les questions où, au lieu de se donner les deux quantités a et C, on se donne leur quotient qui est le taux t de l'amortissement.

EXEMPLE I. — *Quelle est l'annuité qu'il faut verser, pendant 12 années, pour amortir un capital de 50 000 francs, payable à la fin de la douzième année? le taux de l'intérêt étant 4 °/₀.*

Les tables donnent, pour $r = 0{,}04$, $n = 12$, la valeur du taux de l'amortissement :

$$t = 0{,}066552.$$

On a, donc,

$$a = 50000 \times 0{,}066\,552 = 3327^{\text{fr}},60.$$

Un problème courant est le suivant :

Combien d'années faudra-t-il pour amortir un capital quelconque, le taux de l'amortissement étant t *et le taux de l'intérêt étant* r ?

On a, par définition du taux t de l'amortissement,

$$t = \frac{r}{(1+r)^n - 1}$$

d'où

$$(1+r)^n = \frac{t+r}{t}$$

et

$$n = \frac{\log(t+r) + \operatorname{colog} t}{\log(1+r)} \qquad (5).$$

Pour faciliter les calculs, on a construit des tables donnant les valeurs de n, pour les valeurs usuelles de t et r (*Annuaire du Bureau des Longitudes*).

EXEMPLE II. — *En combien d'années pourra-t-on amortir un capital de 500 000 francs en payant des annuités de 10 000 francs? le taux de l'intérêt étant 3 ½ °/₀.*

Le taux de l'amortissement est

$$t = \frac{10\,000}{500\,000} = \frac{1}{50} = \frac{2}{100}.$$

La table du taux de l'amortissement donne, pour $t = 2$ °/₀ et $r = 3\frac{1}{2}$ °/₀, la réponse :

29 *ans* 148 *jours*.

Le nombre des années trouvé n'est pas *entier*. *A priori*, il semble que la solution ne doive comporter qu'un nombre entier et que toute solution fractionnaire doive être rejetée. Voici comment on peut expliquer cette solution. On versera, d'abord, 29 annuités, de 10 000 francs chaque, qui produiront au bout de 29 années un capital de

$$489\,107^{fr},99.$$

De plus, on versera une annuité complémentaire au bout de 148 jours. Or, au bout de 148 jours, le capital est devenu, à intérêts composés,

$$489\,107,99 \times (1,035)^{\frac{148}{360}} = 496\,074^{fr},45.$$

Il restera donc, pour compléter les 500 000 francs, à payer une annuité supplémentaire de

$$3\,925^{fr},55.$$

152. II. — Un État fait un emprunt remboursable en un certain nombre d'années. A cet effet, il paie, chaque année, une annuité dont une partie sert à payer les intérêts de la dette, ce qu'on appelle la *rente de l'emprunt*, et dont l'autre partie est ce qu'on appelle l'*amortissement de l'emprunt* et est destinée à rembourser une partie de l'emprunt.

Le calcul de l'annuité à verser pendant n années pour amortir un emprunt A se fait en écrivant que la valeur actuelle de l'annuité a, versée pendant n années, à la fin de chaque année, est égale à A. On appliquera donc la formule (3) (n° 150) dans laquelle on fera

$$V = A.$$

On a donc, pour calculer a, la formule

$$A = a\,\frac{(1+r)^n - 1}{r\,(1+r)^n}$$

d'où on tire :

$$a = \frac{A\,r\,(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \qquad (6).$$

Si on désigne toujours par t le taux de l'amortissement

$$t = \frac{r}{(1+r)^n - 1},$$

cette formule peut s'écrire :

$$a = A\,(1+r)^n\,t \qquad (7),$$

qui montre que l'annuité a est l'annuité qui amortirait le capital $A(1+r)^n$ payable dans n années. Ceci est naturel, puisque $A(1+r)^n$ est ce que devient l'emprunt A au bout des n années.

Donc, pratiquement, pour faire le calcul de l'annuité, on calculera d'abord, au moyen des tables, ce que devient l'emprunt, à intérêts composés, au bout des n années, puis, au moyen des tables donnant le taux d'amortissement, on calculera l'annuité nécessaire pour amortir ce capital.

EXEMPLE. — *Quelle est l'annuité nécessaire pour amortir un emprunt de* 125 000 *francs en* 30 *ans, le taux de l'intérêt étant* 4 °/ₒ?

On a, ici,

$$A = 125\,000, \qquad n = 30, \qquad r = 0{,}04.$$

Les tables donnent :

$$(1 + r)^n = 3{,}243398$$

et

$$t = 0{,}017830.$$

Ce qui donne :

$$a = A(1 + r)^n\, t = 7\,228^{fr},72.$$

La formule (6), que nous avons déduite des formules sur les annuités, s'établirait, facilement, d'une autre manière qui mettrait en évidence le mécanisme de l'amortissement.

Au bout de la première année, la dette est devenue $A(1+r)$; lorsque l'annuité a est payée, la dette n'est plus que de

$$A(1 + r) - a.$$

Pour qu'il y ait, réellement, amortissement, il faut que a soit plus grand que l'intérêt Ar de l'emprunt. L'annuité a sert donc, d'une part, à payer la *rente* Ar et, d'autre part, à payer l'*amortissement* $a - Ar$.

Au bout de la seconde année, la dette est devenue

$$[A(1 + r) - a](1 + r)$$

et, après le paiement de la seconde annuité, cette dette n'est plus que

$$[A(1 + r) - a](1 + r) - a,$$

ou

$$A(1+r)^2 - a(1+r) - a.$$

Avant le paiement de la troisième annuité, la dette est

$$[A(1+r)^2 - a(1+r) - a](1+r),$$

elle est donc, après le paiement de cette troisième annuité,

$$A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r) - a.$$

On reconnaît la loi, et on voit, qu'après le paiement de la $n^{ième}$ annuité, la dette est

$$A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} \ldots\ldots - a(1+r) - a.$$

Pour que la dette soit amortie, au bout des n années, il faut donc que l'on ait :

$$A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} \ldots\ldots - a(1+r) - a = 0,$$

ce qui s'écrit :

$$A(1+r)^n - a\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0,$$

et conduit à la formule (6).

Calculons les amortissements successifs. Le premier amortissement α_1, est, comme nous l'avons vu,

$$\alpha_1 = a - Ar.$$

L'intérêt simple de la dette pendant la seconde année est

$$[A(1+r) - a]\,r.$$

Le second amortissement est donc :

$$\alpha_2 = a - [A(1+r) - a]\,r$$

ou

$$\alpha_2 = (a - Ar)(1+r) = \alpha_1(1+r).$$

Au commencement de la troisième année, la dette est

$$A(1+r)^2 - a(1+r) - a,$$

l'intérêt, au bout de cette année, est donc :

$$[A(1+r)^2 - a(1+r) - a]\,r$$

et l'amortissement est

$$\alpha_3 = a - [A(1+r)^2 - a(1+r) - a]\, r$$

ou

$$\alpha_3 = (a - Ar)(1+r)^2 = \alpha_1 (1+r)^2;$$

et ainsi de suite, le $p^{ième}$ amortissement est

$$\alpha_p = (a - Ar)(1+r)^{p-1} = \alpha_1 (1+r)^{p-1}.$$

On voit donc que *les amortissements successifs forment une progression géométrique croissante de raison* $(1 + r)$ [1].

On peut, d'ailleurs, vérifier que la somme des n amortissements est égale à l'emprunt A, car on a :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = [a - Ar]\,[1 + (1+r) + \ldots. + (1+r)^{n-1}]$$
$$= (a - Ar)\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Si on remplace a par sa valeur, fournie par la formule (6), il vient, après les simplifications :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = A.$$

153. Les grandes sociétés industrielles, et notamment les Compagnies de chemins de fer, émettent des emprunts, sous forme d'*obligations*, qui rapportent aux souscripteurs un intérêt annuel et sont amorties au bout d'un certain nombre d'années. Par exemple, dans les chemins de fer, les Compagnies n'ont une concession que pour un temps limité. Au bout de ce temps, le chemin de fer revient de lui-même à l'État. Le capital se trouverait perdu si, outre les intérêts, une certaine somme n'était pas prélevée, sur les bénéfices, pour amortir l'emprunt, de façon, qu'à la fin de la concession, l'emprunt soit complètement amorti.

Soit N le nombre des obligations, v la valeur *nominale* de chacune d'elles, c'est-à-dire le prix auquel elle doit être remboursée, n le nombre d'années que dure l'amortissement et r le taux de l'intérêt. L'emprunt à amortir est Nv, l'annuité à fournir par la Compagnie, est donc,

$$a = Nv(1+r)^n t,$$

t désignant le taux de l'amortissement.

(1) On peut encore remarquer que le $p^{ième}$ amortissement α_p *est la valeur acquise par le premier amortissement* α_1 *placé, à intérêts composés, pendant* $(p - 1)$ *années*.

Quand une Compagnie fait un emprunt, on fait, d'avance, le calcul de l'annuité et des divers amortissements annuels $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, de façon à connaître, d'avance, le nombre d'obligations qui seront remboursées chaque année.

Exemple. — *Une Compagnie a émis un emprunt de 10 000 obligations, de 500 francs chacune, au 1er janvier 1872. La concession cesse le 1er janvier 1914. Quels seront l'annuité à verser par la Compagnie et les divers amortissements annuels? Le taux de l'intérêt est de* $4\,{}^1/_2$ *%.*

La durée de l'amortissement est de 42 ans. Nous aurons l'annuité a par la formule

$$a = Nv\,(1 + r)^n\,t$$

où

$$N = 10000, \quad v = 500, \quad r = 0{,}045, \quad \text{et} \quad n = 42.$$

On trouve, dans les tables d'intérêts composés et d'amortissement :

$$(1 + r)^n = 7{,}574418,$$
$$t = 0{,}008409.$$

On tire de là

$$a = 10000 \times 500 \times 7{,}574418 \times 0{,}008409 = 318\,466^{fr},44.$$

L'annuité à payer se décompose en intérêt et amortissement. Le premier amortissement est

$$\alpha_1 = a - Nvr = 93\,466^{fr},44.$$

Les amortissements suivants se calculent en cherchant les valeurs acquises par α_1, à intérêts composés, au bout de 1, 2, 3, ... 41 années.

On trouve ainsi :

$$\alpha_2 = 97\,672^{fr},42,$$
$$\alpha_3 = 102\,077^{fr},04,$$
$$\alpha_4 = 106\,660^{fr},76,$$
$$\dots\dots\dots$$

Le nombre des obligations à rembourser serait donc :

En 1873.	186,93288,
En 1874.	195,34484,
En 1875.	204,15408,
En 1876.	213,32152,
. . . .	

Comme les nombres qu'on trouve, pour les nombres d'obligations à rembourser, ne sont pas entiers, on rectifie ce tableau de façon à les rendre entiers en forçant, de temps à autre, le dernier chiffre d'une unité et de façon que la somme fasse 10000 obligations.

Cette modification change un peu la valeur de l'annuité à payer chaque année. Les annuités ne sont plus, alors, rigoureusement, égales entre elles.

154. Rentes perpétuelles. — La formule, qui donne l'annuité à payer pour amortir, en n années, un emprunt A, peut se mettre sous la forme :

$$a = \frac{A r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}.$$

Si l'on fait croître n indéfiniment, $\frac{1}{(1+r)^n}$ tend vers zéro et l'annuité a tend vers une limite $A r$, qui est égale à l'intérêt annuel de l'emprunt. On a, dans ce cas, ce qu'on appelle des *rentes perpétuelles*. C'est le mode d'emprunt le plus employé par les États. Les emprunts ainsi formés forment ce qu'on appelle la *dette consolidée* qui, en principe, n'est pas amortie. L'État se contente de payer, à ses créanciers, l'intérêt de l'argent prêté, se réservant le droit d'amortir sa dette d'une façon arbitraire ou même de ne pas l'amortir[1].

EXERCICES

225. Pendant combien d'années et de fractions d'années faudra-t-il placer une certaine somme, à intérêts composés, pour que cette somme soit doublée, le taux de l'intérêt étant 4 °/。?

226. Calculer ce que deviendrait, en 8 ans, un capital de 3625 francs placé, à intérêts composés, au taux de 4 °/。?

(*Bacc., Paris.*)

227. A quel taux d'intérêt 4000 francs, placés à intérêts composés pendant 12 ans 3 mois, deviennent-ils 7235fr, 05?

228. Au bout de quel temps deux capitaux, placés à intérêts composés, l'un de 5000 fr. à 5 °/。, l'autre de 8000 fr. à 3,5 °/。, ont-ils la même valeur?

(BARBARIN).

229. Calculer les taux semestriel, trimestriel, mensuel, quotidien équivalents au taux annuel de 4 °/。?

230. Une personne place, chaque année, au commencement de l'année, au taux annuel de 5 °/。, pendant 20 ans, une somme de 500 francs, à intérêts composés. Quelle somme obtiendra-t-elle au bout de la vingtième année?

(*Bacc., Nancy*).

(1) Nous n'insistons pas ici sur le côté pratique des questions d'intérêts, car toutes ces questions ont été développées, à ce point de vue, avec soin, dans les *Leçons d'arithmétique* de M. Tannery. En particulier, celle des *Rentes perpétuelles* fait l'objet des nos 397 à 404 de ce volume.

231. Un industriel a emprunté, le 1er janvier 1880, une somme de 33 640 francs dont il s'est acquitté en deux paiements égaux de 19448fr, 10, chacun. Le premier de ces paiements a été effectué le 1er janvier 1882 et le second le 1er janvier 1884. On demande à quel taux exact l'emprunt a été fait, sachant que, pour ces sommes, on a tenu compte des intérêts composés.

(*École navale, Concours de* 1884.)

232. Une personne emprunte une somme de a francs pour deux ans; elle s'acquitte par deux paiements de b francs à la fin de la première et de la seconde année. A quel taux a-t-elle emprunté, les intérêts étant composés? — Discuter.

(*Bacc., Dijon*).

233. On doit payer chaque année une somme de 2000 francs pendant 12 ans; par quelle somme pourra être remplacée cette annuité si l'on ne veut faire qu'un seul paiement au bout de 4 ans, le taux de l'intérêt étant de 5 %?

(*Bacc., Paris*).

(Pour résoudre la question, on écrira que les valeurs actuelles de l'annuité de 2000 francs et de la somme unique à verser sont égales).

234. Une personne s'engage à verser, à une Compagnie d'assurances, n annuités égales à a, à la condition que la Compagnie lui servira, pendant les $2n$ années suivantes, une rente annuelle égale à b; le premier de ces derniers paiements devait être effectué un an après le versement de la dernière annuité a. Les intérêts sont composés et le taux est de r pour un franc, par an. — On demande :

1° De calculer le rapport $\frac{a}{b}$;

2° De déterminer la valeur que doit avoir le nombre n pour que le rapport $\frac{a}{b}$ ait une valeur donnée p;

3° D'appliquer la formule au cas où l'on aurait :

$$r = 0{,}025 \qquad p = \frac{1}{2}.$$

(*Concours de l'École de Cluny*).

235. Calculer le montant de l'annuité à payer, pendant 45 ans, à la fin de chaque année, pour amortir un emprunt de 8 500 000 fr, à 3,5 %.

(*Institut agronomique*).

APPENDICES

APPENDICE I

NOMBRES COMPLEXES[1]

155. Lorsqu'on se propose, *en arithmétique*, de résoudre des équations du premier degré, on est conduit à admettre qu'il y a des équations du premier degré qui n'ont pas de solutions. Ainsi, l'équation

$$2x + 3 = 0$$

n'a pas de solution, en arithmétique, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun nombre arithmétique x tel que $2x + 3$ soit nul.

La généralisation des nombres arithmétiques, par l'introduction des nombres négatifs, a levé cette difficulté et nous sommes arrivé à la conclusion que toute équation du premier degré, à une inconnue, a une solution (positive ou négative).

Lorsqu'on passe des équations du premier degré à celles du second degré, on est amené (n° 87) à conclure qu'une équation du second degré, à une inconnue, n'a de solutions que lorsque le discriminant $b^2 - 4ac$ n'est pas négatif. Il est, alors, naturel de se demander s'il ne serait pas possible d'imaginer une généralisation de l'idée de nombre telle que toute équation du second degré ait des solutions.

Cette généralisation, qui est aux nombres positifs et négatifs ce que ceux-ci sont aux nombres arithmétiques, est possible et conduit à la notion des nombres dits *nombres complexes*.

156. Définition. — On appelle *nombre complexe* un ensemble de deux nombres (positifs ou négatifs) donnés dans un certain ordre. Les deux nombres qui, par leur ensemble, forment un nombre complexe sont les deux *parties* de ce nombre complexe.

Nous désignerons, jusqu'à nouvel ordre, le nombre complexe, dont la première partie est a et la seconde partie b, par la notation

$$(a, b).$$

(1) La méthode d'exposition de la théorie des nombres complexes, que nous allons suivre, est due, dans ses grandes lignes, à M. Méray (*Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale*, chap. III). En Allemagne, M. Weierstrass suit, dans son enseignement, une méthode analogue.

Les nombres complexes ne seront parfaitement définis que lorsque nous aurons donné les *définitions* de l'égalité de deux tels nombres et des opérations fondamentales de ces nombres entre eux. De plus, l'emploi de ces nombres, dans le calcul, ne sera légitime que si les opérations jouissent des propriétés ordinaires des opérations sur les nombres algébriques. C'est ce que nous établirons à l'instant.

Deux nombres complexes sont dits *égaux* lorsque leurs premières parties et leurs secondes parties sont égales chacune à chacune.

Ainsi, par définition, l'égalité

$$(a, b) = (a', b')$$

entraîne les deux égalités

$$a = a' \qquad \text{et} \qquad b = b'.$$

157. Addition et soustraction. — On appelle *somme* de plusieurs nombres complexes le nombre complexe qui a pour première partie la somme des premières parties et pour seconde partie la somme des secondes parties des nombres donnés.

Ainsi, d'après cette définition,

$$(a, b) + (a', b') + (a'', b'') = (a + a' + a'', b + b' + b'').$$

Puisque, pour faire la somme de plusieurs nombres complexes, on est ramené à faire deux sommes de nombres positifs et négatifs, les propriétés ordinaires des sommes s'étendent immédiatement aux sommes de nombres complexes. Ainsi, on peut, dans une somme de nombres complexes, intervertir l'ordre des termes ou remplacer plusieurs termes par leur somme effectuée.

Étant donnés deux nombres complexes (a, b) et (a', b') il existe un nombre complexe qui, ajouté au second, reproduit le premier; ce nombre, est le nombre

$$(a - a', b - b')$$

et c'est, évidemment, le seul. Le nombre ainsi obtenu est la *différence* des deux nombres donnés et on écrit, comme d'ordinaire,

$$(a, b) - (a', b') = (a - a', b - b').$$

On peut remarquer que la différence précédente peut s'obtenir en *ajoutant* au nombre (a, b) le nombre $(-a', -b')$. Ce nombre $(-a', -b')$, qu'on déduit du nombre (a', b') en changeant les signes de ses deux parties, est ce qu'on appelle, par extension, le nombre *égal et de signe contraire* au nombre (a', b') (1).

Dans ces conditions, on peut donc dire qu'on obtient la différence des deux nombres (a, b) et (a', b') en ajoutant au nombre (a, b) le nombre égal et de signe contraire au nombre (a', b') (Voir n° 9).

(1) Il faut remarquer qu'un nombre complexe *n'a pas de signe*. L'expression *égal et de signe contraire* n'implique aucune idée de signe et n'est qu'une façon abrégée d'exprimer le fait que deux nombres complexes ont leurs deux parties, respectivement, égales et de signes contraires.

158. Multiplication et division. — On appelle *produit* des deux nombres complexes (a, b) et (a', b') le nombre

$$(aa' - bb', ab' + ba')$$

dont la première partie est $aa' - bb'$ et la seconde $ab' + ba'$. Ainsi,

$$(1, 2) \times \left(3, -\frac{1}{2}\right) = \left(3 + 1, -\frac{1}{2} + 6\right) = \left(4, \frac{11}{2}\right).$$

On étend, immédiatement, cette définition à un produit de plusieurs facteurs.

Par de simples vérifications, on démontre que toutes les propriétés des produits ordinaires s'étendent aux produits de nombres complexes.

Ainsi, voici comment on prouve que, dans un produit de deux facteurs, on peut intervertir l'ordre des facteurs :

$$(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba'),$$
$$(a', b')(a, b) = (a'a - b'b, a'b + b'a).$$

Or,
$$aa' - bb' = a'a - b'b$$
et
$$ab' + ba' = a'b + b'a.$$

Donc :

$$(a, b)(a', b') = (a', b')(a, b).$$

On démontrerait, d'une façon analogue, par une simple vérification, que, dans un produit, on peut remplacer plusieurs facteurs par leur produit effectué. On prouverait aussi la légitimité de la règle du produit d'une somme par un nombre ; et ainsi de suite.

Théorème. — *Étant donnés deux nombres complexes* (a, b) *et* (a', b'), a' *et* b' *n'étant pas nuls à la fois, il existe un troisième nombre complexe dont le produit par* (a', b') *est égal à* (a, b) *et un seul.*

Soit (x, y) le nombre complexe cherché, on devra avoir :

$$(a', b')(x, y) = (a, b)$$

ou

$$(a'x - b'y, b'x + a'y) = (a, b).$$

Ceci entraîne, par définition, les deux égalités

$$\begin{cases} a'x - b'y = a, \\ b'x + a'y = b, \end{cases}$$

qui sont deux équations du premier degré en x et y. Elles admettent toujours un système de solutions et un seul, si $a'^2 + b'^2$ est différent de zéro, ce qui a lieu puisque a' et b' ne sont pas nuls tous les deux.

On a, alors,

$$\begin{cases} x = \dfrac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}, \\ y = \dfrac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}. \end{cases}$$

Le nombre complexe cherché existe donc et il est unique, c'est :

$$\left(\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}, \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}\right).$$

Ce nombre est ce qu'on appelle le *quotient* de (a, b) par (a', b') et on écrit :

$$\frac{(a, b)}{(a', b')} = \left(\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}, \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}\right).$$

Ainsi, on a

$$\frac{(2, 3)}{(0, 1)} = (3, -2).$$

Les propriétés essentielles des fractions étant des conséquences directes des propriétés des produits, propriétés qui, comme nous l'avons indiqué plus haut, s'étendent toutes aux nombres complexes, on en conclut que les fractions de nombres complexes jouissent des propriétés ordinaires des fractions de nombres algébriques. Ainsi, on peut multiplier les deux termes d'une fraction par un même nombre complexe :

$$\frac{(2,3)}{(0,1)} = \frac{(2,3)\,(1,1)}{(0,1)\,(1,1)} = \frac{(-1,5)}{(-1,1)}.$$

159. De même qu'après avoir défini les nombres positifs et négatifs, nous avons montré qu'on pouvait, sans introduire aucune contradiction, identifier les nombres positifs et les nombres arithmétiques, nous observerons qu'on peut identifier tout nombre complexe dont la seconde partie est *zéro* avec sa première partie.

Il suffit, en effet, de remarquer que, si on se reporte aux définitions précédentes des opérations, *le résultat d'un nombre quelconque d'opérations, effectuées sur des nombres complexes ayant tous la forme* (a, 0), *est un nombre, de même forme, ayant pour première partie le nombre algébrique obtenu en faisant les mêmes opérations sur les premières parties des nombres donnés.*

Ainsi :

$$(a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0),$$
$$(a, 0)\,(a', 0) = (aa', 0),$$
$$\frac{(a, 0)}{(a', 0)} = \left(\frac{a}{a'}, 0\right).$$

Il en résulte que le calcul des nombres de la forme $(a, 0)$ est identique à celui de leurs premières parties. On n'introduira donc certainement aucune contradiction en faisant la *convention* suivante :

Tout nombre complexe dont la seconde partie est zéro est égal à sa première partie.

Donc, par convention,

$$(a, 0) = a.$$

Cette convention très importante fait rentrer les nombres positifs et négatifs dans les nombres complexes qui, ainsi, nous apparaissent comme une généralisation de ceux-là.

Les nombres complexes se groupent donc en deux classes : ceux dont la seconde partie est zéro, qui sont les nombres positifs et négatifs, et qu'on nomme nombres *réels ;* ceux dont la seconde partie est différente de zéro et qu'on nomme d'ordinaire nombres *imaginaires.*

La convention précédente donne lieu à quelques remarques importantes.

Pour qu'un nombre complexe soit réel *il faut et il suffit* que sa seconde partie soit zéro. Une égalité de la forme

$$(a, b) = c$$

entraîne donc la double égalité

$$a = c \quad \text{et} \quad b = 0,$$

car c n'est autre chose que $(c, 0)$.

Il résulte de là que *pour qu'un nombre complexe soit égal à zéro, il faut et il suffit que ses deux parties soient nulles.*

Ainsi

$$(a, b) = 0$$

entraîne $$a = 0, \quad b = 0.$$

Dans ces conditions, la somme de deux nombres égaux et de signes contraires est égale à zéro, car

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0) = 0,$$

on emploie alors la notation ordinaire pour désigner un nombre égal et de signe contraire à un autre, en faisant précéder ce dernier du signe (—).

Remarquons encore que le produit d'un nombre imaginaire par un nombre réel s'obtient en multipliant les deux parties du nombre imaginaire par le nombre réel. Car :

$$(a, b) \times c = (a, b) \times (c, 0) = (ac, bc).$$

Par exemple,

$$(0, 1) \times a = (0, a).$$

160. Parmi tous les nombres complexes il en existe un dont le carré est égal à -1, c'est le nombre $(0,1)$. Car, d'après la règle de multiplication et notre convention,

$$(0,1) \times (0,1) = (-1,0) = -1.$$

On fait jouer, à ce nombre particulier $(0, 1)$ un rôle spécial, et on le désigne d'ordinaire par i [1].

(1) Certains auteurs désignent ce nombre par $\sqrt{-1}$, pour rappeler que son carré est égal à -1. Cette notation a été généralement abandonnée pour éviter toute confusion. On aurait, en effet, des tendances d'appliquer au symbole $\sqrt{-1}$ le calcul des radicaux, ce qui conduirait aux erreurs les plus grossières.

On a :

$$i^2 = -1,$$
$$i^3 = (-1) \times i = -i,$$

en désignant par $-i$ le nombre égal et de signe contraire à i :

$$-i = (0, -1).$$

Ensuite,

$$i^4 = (-i)\,i = -i^2 = 1,$$
$$i^5 = i^4 .\, i = i,$$
$$i^6 = i^5 .\, i = i^2 = -1,$$
$$i^7 = -i,$$
$$i^8 = 1, \qquad \text{etc...}$$

Les puissances successives de ce nombre i se reproduisent donc périodiquement, de 4 en 4, et sont

$$i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i,\ -1,\ -i,\ 1,\ \ldots$$

Théorème. — *Tout nombre complexe peut se mettre sous la forme de la somme d'un nombre réel et du produit du nombre* i *par un nombre réel.*

On a, en effet,

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b);$$

or

$$(a, 0) = a,$$

par convention, et

$$(0, b) = b\,(0, 1) = bi.$$

Donc

$$(a, b) = a + bi.$$

Cette proposition, très importante, nous permet d'abandonner la notation (a, b). Dorénavant nous écrirons *toujours* un nombre complexe sous la forme

$$a + bi.$$

Cette nouvelle forme permet de retrouver très facilement, sans effort de mémoire, les règles de calcul des nombres complexes. Puisque, comme nous l'avons vu, les opérations sur les nombres complexes jouissent des mêmes propriétés que celles des nombres réels, il suffira :

Pour obtenir le résultat d'une opération quelconque, effectuée sur des nombres complexes, mis sous la forme $a + bi$, *de faire les opérations suivant les règles ordinaires du calcul algébrique en ayant soin de remplacer les puissances* i^2, i^3, i^4, i^5, *etc., du nombre* i, *respectivement par leurs valeurs* -1, $-i$, 1, *etc...*

Ainsi,

$$(a + bi) + (a' + b'i) = a + a' + (b + b')i;$$
$$(a + bi) - (a' + b'i) = a - a' + (b - b')i;$$
$$(a + bi)\,(a' + b'i) = aa' + bb'i^2 + (ab' + ba')i$$

ou, puisque

$$i^2 = -1,$$
$$(a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + ba')i;$$
$$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$$

161. Module. — On appelle *module* d'une quantité complexe $a + bi$ la racine carrée *arithmétique* de la somme des carrés de sa *partie réelle* et du *coefficient* de i. Ainsi, le module de $a + bi$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Le module d'une quantité réelle est sa *valeur absolue*, car

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

D'ailleurs, comme nous allons le montrer, le module d'une quantité complexe joue le même rôle que la valeur absolue d'une quantité positive ou négative. Pour cette raison, on emploie la même notation (deux barres | |) pour désigner le module d'une quantité complexe. On écrira donc,

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Le module est une quantité essentiellement réelle et positive.

Théorème I (1). — *Le module de la somme ou de la différence de deux quantités complexes est compris entre la somme et la différence des modules de ces deux quantités.*

Soient

$$a + bi \quad \text{et} \quad a' + b'i$$

deux quantités complexes et

$$a + a' + (b + b')i$$

leur somme. Supposons

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geqslant \sqrt{a'^2 + b'^2},$$

il faut, alors, vérifier la double inégalité :

$$\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a'^2 + b'^2} \leqslant \sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2}.$$

Les trois membres étant positifs, on peut élever au carré et on doit avoir :

$$a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 - 2\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} \leqslant (a + a')^2 + (b + b')^2$$
$$\leqslant a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)};$$

ce qui devient, en simplifiant,

$$-\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} \leqslant aa' + bb' \leqslant +\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}.$$

(1) On pourra rapprocher ce théorème et les suivants des théorèmes du n° 11 et du théorème I du n° 15.

Pour que cette double inégalité soit remplie, il faut et il suffit que la valeur absolue de $aa' + bb'$ soit plus petite que $\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}$; et, pour cela, il faut et il suffit que le carré de $aa' + bb'$ soit plus petit que le carré de $\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}$.

On doit donc avoir

$$(aa' + bb')^2 \leqslant (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2),$$

ce qui donne, en simplifiant :

$$0 \leqslant a^2b'^2 + b^2a'^2 - 2aa'bb'$$

ou

$$0 \leqslant (ab' - ba')^2,$$

ce qui a bien lieu [1].

Remarque. — Il n'y a égalité que dans le cas où

$$ab' - ba' = 0,$$

c'est-à-dire où

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \qquad (1).$$

Désignons par k le quotient $\frac{a}{a'}$ on aura, évidemment,

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = k.$$

Le quotient des deux quantités complexes est donc *réel*.

Il est, d'ailleurs, facile de distinguer de quel côté a lieu l'égalité, car $aa' + bb'$ est évidemment égal à $+\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}$ ou à $-\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}$ suivant qu'il est positif ou négatif. Or, puisque

$$aa' + bb' = k(a'^2 + b'^2),$$

$aa' + bb'$ est du signe de k.

Le module de la somme de deux quantités complexes est donc égal à la somme de leurs modules si leur quotient est réel et positif.

Le module de la somme est, au contraire, égal à la différence des modules si le quotient est réel et négatif.

Corollaire. — *Le module d'une somme de plusieurs quantités complexes est inférieur ou au plus égal à la somme des modules de ces quantités.*

Ce corollaire se déduit du précédent de la même façon que le théorème II du n° 11 se déduit de celui qui le précède.

(1) Il n'est pas nécessaire de recommencer la démonstration pour la différence, puisque la différence de deux quantités est la somme de l'une d'elles et de la quantité égale et de signe contraire à l'autre.

Théorème II. — *Le module du produit de plusieurs facteurs est égal au produit des modules de ces facteurs.*

1° *Cas de deux facteurs.*

Soit le produit

$$(a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + ba')i.$$

Il suffit de vérifier l'identité

$$\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2};$$

ce qui, en élevant les deux membres au carré, est l'identité de Lagrange (n° 42, *App. III*).

2° *Cas de plusieurs facteurs.*

Soient α, β, γ, δ quatre nombres complexes (1). En considérant le produit $\alpha\beta\gamma\delta$, comme le produit des deux facteurs $\alpha\beta\gamma$ et δ, on a, d'après ce qui précède,

$$|\alpha\beta\gamma\delta| = |\alpha\beta\gamma| \times |\delta|.$$

De même, en considérant $\alpha\beta\gamma$ comme le produit de $\alpha\beta$ par γ, on a :

$$|\alpha\beta\gamma| = |\alpha\beta| \times |\gamma|$$

d'où,

$$|\alpha\beta\gamma\delta| = |\alpha\beta| \times |\gamma| \times |\delta|;$$

et, enfin, comme

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \times |\beta|,$$

on a, finalement,

$$|\alpha\beta\delta\gamma| = |\alpha| \times |\beta| \times |\gamma| \times |\delta|.$$

Corollaire. — *Pour qu'un produit de facteurs complexes soit nul il faut et il suffit qu'un des facteurs soit nul.*

Remarquons, d'abord, que, pour qu'une quantité complexe soit nulle, il faut et il suffit que son module soit nul, car l'égalité

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

entraîne les deux égalités

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0$$

ou

$$a + bi = 0,$$

et réciproquement.

(1) Les nombres complexes jouissant des mêmes propriétés que les nombres positifs et négatifs, nous pourrons, dorénavant, les désigner par une seule lettre, lorsqu'il n'y aura pas nécessité de distinguer les deux parties, et les traiter dans les calculs comme les précédents.

Pour qu'un produit soit nul, il faut donc et il suffit que son module et, par suite, le produit des modules de ses facteurs, soit nul. Or, pour que le produit des modules des facteurs soit nul, il faut que l'un au moins des modules et, par suite, l'un au moins des facteurs soit nul.

Théorème III. — *Le module du quotient de deux quantités complexes est égal au quotient des modules de ces deux quantités.*

Soit γ le quotient des deux quantités complexes α et β. Par définition du quotient, on a

$$\alpha = \beta\gamma$$

et, par suite, d'après le théorème précédent,

$$|\alpha| = |\beta| \times |\gamma|$$

d'où on tire :

$$|\gamma| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

162. Quantités conjuguées. — Deux quantités imaginaires sont dites *conjuguées* lorsqu'elles ont même partie réelle et que les coefficients de i sont égaux et de signes contraires.

Ainsi, les deux quantités

$$a + bi \qquad \text{et} \qquad a - bi$$

sont conjuguées.

Deux quantités conjugées ont même module.

La somme de deux quantités imaginaires conjuguées est réelle, car

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

Le produit de deux quantités conjuguées est réel et égal au carré de leur module commun, car

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

D'ailleurs, réciproquement, si la somme et le produit de deux quantités *imaginaires* est réel, ces deux quantités sont conjuguées. La somme des deux quantités $a + bi$ et $a' + b'i$ est, en effet,

$$(a + a') + (b + b')i$$

et leur produit

$$aa' - bb' + (ab' + ba')i.$$

On doit avoir

$$b + b' = 0$$

et

$$ab' + ba' = 0.$$

La première égalité donne :

$$b' = -b$$

et la seconde devient

$$b(a' - a) = 0.$$

Or, puisque la quantité $a + bi$ est *imaginaire*, b est différent de zéro, on doit donc avoir

$$a' = a.$$

Remarque. — On obtient facilement l'expression du quotient de deux quantités complexes, sous la forme $a + bi$, en multipliant les deux termes de la fraction par la quantité conjuguée du dénominateur. Ainsi,

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{aa' + bb' + (ba' - ab')i}{a'^2 + b'^2}$$

et on retrouve l'expression du quotient (n° 158) :

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}i.$$

163. Racine carrée d'une quantité complexe.

Théorème. — *Étant donnée une quantité complexe* a + bi, *il existe toujours deux quantités complexes, égales et de signes contraires, et deux seulement, dont les carrés sont égaux à* a + bi.

Il s'agit de trouver une quantité $x + iy$ dont le carré soit égal à $a + bi$. On doit donc avoir :

$$(x + yi)^2 = a + bi$$

ou :

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi.$$

Ceci entraîne les deux égalités

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

On est, ainsi, ramené à trouver toutes les solutions *réelles* du système (1) de deux équations à deux inconnues x et y. Pour résoudre cette question, nous distinguerons trois cas.

1° $b = 0,\ a > 0$. — La quantité $a + bi$ est réelle et positive. Le système (1) devient :

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

La seconde équation donne soit $x = 0$, soit $y = 0$.

Si on prend $x = 0$, la première égalité donne

$$-y^2 = a,$$

équation qui n'a pas de solutions réelles.

Prenons, alors, $y = 0$, la première équation devient

$$x^2 = a$$

qui a deux solutions

$$x = +\sqrt{a}, \qquad x = -\sqrt{a}.$$

Il y a donc deux racines carrées, et deux seulement, qui sont $+\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, *toutes deux réelles.*

2° $b = 0$, $a < 0$. — La quantité $a + bi$ est réelle mais négative. Le système (1) prend encore la forme (2), mais ici la solution $y = 0$ est à rejeter, car elle donne, pour déterminer x,

$$x^2 = a,$$

équation qui n'a pas de solution réelle, puisque a est négatif.

Si on prend $x = 0$, on a, pour y,

$$-y^2 = a,$$

équation qui a deux racines réelles :

$$y = +\sqrt{-a}, \quad y = -\sqrt{-a}.$$

Il y a encore deux racines carrées et deux seulement. Ce sont

$$+i\sqrt{-a} \quad \text{et} \quad -i\sqrt{-a}.$$

Nous arrivons donc à ce résultat important que :

Tout nombre réel négatif a deux racines carrées imaginaires.

Ainsi, le nombre -1 a deux racines carrées qui sont

$$+i \quad \text{et} \quad -i.$$

3° $b \neq 0$. — Le nombre $a + bi$ est imaginaire. Les deux nombres x et y sont certainement différents de zéro, puisque b est différent de zéro. On tire, alors, de la seconde équation du système (1),

$$y = \frac{b}{2x}.$$

Ce qui donne, en portant cette valeur de y dans la première, l'équation bicarrée

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0.$$

Le produit $-b^2$ des racines de la résolvante de cette équation étant négatif, cette résolvante a une racine positive et une racine négative. L'équation bicarrée a donc deux racines réelles égales et de signes contraires :

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}},$$

provenant de la racine positive de la résolvante. A ces deux valeurs de x, correspondent, pour y, deux valeurs :

$$y = \frac{b}{\pm 2\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}}.$$

La quantité imaginaire $a + bi$ a donc deux racines carrées qui sont

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \frac{b}{2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}}\, i$$

et

$$-\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \frac{b}{2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}}\, i\right\}$$

Remarque. — Les deux valeurs de y peuvent se mettre sous une autre forme. Multiplions les deux termes de la fraction y par

$$\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

et il vient :

$$y = \pm\frac{b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}}{\sqrt{b^2}}.$$

Or, $\sqrt{b^2}$ est égal à la valeur absolue de b. On a donc

$$\sqrt{b^2} = b, \quad \text{lorsque} \quad b > 0$$

et

$$\sqrt{b^2} = -b, \quad \text{lorsque} \quad b < 0.$$

Par suite, lorsque $b > 0$, on a :

$$y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

et, lorsque $b < 0$, on a :

$$y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Les signes supérieurs et inférieurs de ces formules correspondant, respectivement, aux signes supérieurs et inférieurs de la formule qui donne x. Il en résulte que, quand $b > 0$, les deux racines carrées sont

$$\pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right\}$$

et, lorsque $b < 0$, les deux racines carrées de $a + bi$ sont

$$\pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right\}.$$

Exemples. — Le nombre i a deux racines carrées qui sont, en faisant dans les formules précédentes $a = 0$, $b = 1$,

$$\pm\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right].$$

De même, en faisant $a = 1$, $b = 1$, on a les deux racines carrées de $1 + i$ qui sont

$$\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right].$$

Résumé. — De tout ce qui précède, il résulte que les nombres complexes peuvent être soumis au calcul algébrique au même titre que les nombres réels (positifs et négatifs). Tout ce que nous avons dit dans les Livres I et II pourra donc subsister, sans modification, lors même que les lettres qui figurent dans les expressions représenteraient des nombres imaginaires. Ainsi, on résoudra des équations du premier degré à coefficients imaginaires de la même façon que les équations du premier degré à coefficients réels.

La seule différence qui existe entre les nombres imaginaires et les nombres réels, c'est que, les premiers étant dépourvus de signe, on ne peut pas définir ce qu'il faudrait entendre par un nombre imaginaire plus grand ou plus petit qu'un autre. Deux nombres imaginaires qui ne sont pas égaux sont *inégaux*, le mot *inégal* n'ayant ici que le sens de *non égal*. Tout ce qui est relatif aux inégalités ne peut donc s'appliquer qu'aux nombres essentiellement réels [1].

EXERCICES

236. Pour que le produit de deux quantités imaginaires soit réel, il faut et il suffit que les deux parties de l'une d'elles soient proportionnelles aux deux parties de la quantité conjuguée de l'autre.

237. Montrer que toute quantité complexe $a + bi$ peut se mettre sous la forme :

$$a + bi = \rho\left[\frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2}\right],$$

ρ désignant son module et t un nombre réel.

238. Dans l'identité

$$(ab' - ba')(cd' - c'd) \equiv (ac + bd)(a'c' + b'd') - (a'c + b'd)(ac' + bd'),$$

on pose :

$$a = \alpha + \beta i,\quad b = \gamma + \delta i,\quad c = \alpha' + \beta' i,\quad d = \gamma' + \delta' i,$$
$$a' = -\gamma + \delta i,\quad b' = \alpha - \beta i,\quad c' = -\gamma' + \delta' i,\quad d' = \alpha' - \beta' i.$$

(1) On ne peut pas songer à ranger les nombres imaginaires en comparant les modules, car deux quantités imaginaires non égales peuvent avoir le même module. Ainsi les quantités

$$1 \pm 2i \quad \text{et} \quad 2 \pm i$$

ont même module.

En déduire que le produit de deux sommes de quatre carrés est encore une somme de quatre carrés.

239. Même question en partant de l'identité

$$(b-d)(a-c) = (b-c)(a-d) + (c-d)(a-b),$$

dans laquelle on pose :

$$a = \frac{p+qi}{r+si}, \quad b = \frac{p'+q'i}{r'+s'i}, \quad c = \frac{-r+si}{p-qi}, \quad d = \frac{-r'+s'i}{p'-q'i}.$$

(Desboves).

240. Soient ox, oy deux axes rectangulaires. On appelle *affixe* de l'imaginaire $a+bi$, dans le plan xoy, le point M de coordonnées $x=a$, $y=b$.

1° Montrer que le module de la quantité $a+bi$ est égal à la distance géométrique OM.

2° Montrer que le module de la différence de deux quantités imaginaires est égal à la distance géométrique des affixes de ces deux quantités.

3° Connaissant les affixes de deux quantités complexes, construire l'affixe de leur somme.

4° Conclure, de ce qui précède, une démonstration géométrique simple du Théorème I (n° 161).

5° Soient M et M′ les affixes de deux quantités imaginaires dont le produit reste constant et égal à 1. Lorsque la première quantité varie de façon que son affixe M décrive une droite, quelle est la courbe décrite par l'affixe M′ de la seconde quantité ? Plus généralement, lorsque M décrit, dans le plan xoy, une courbe C quelle est la courbe décrite par le point M′ ?

241. Montrer qu'on peut exprimer toutes les valeurs réelles ou imaginaires de x, y, z, vérifiant la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

en posant :

$$x = \frac{1-uv}{u-v}, \quad y = i\,\frac{1+uv}{u-v}, \quad z = \frac{u+v}{u-v};$$

on remarquera que, quand x, y, z sont réels, u et $-\frac{1}{v}$ sont imaginaires conjugués.

242. Prouver que toute imaginaire dont le module est égal à l'unité peut être mise sous la forme

$$\frac{1+iz}{1-iz},$$

z étant un nombre *réel*.

243. Calculer les racines carrées de

$$-i, \quad 2+5i, \quad 3+i\sqrt{3}, \quad \frac{1-i}{4}.$$

RÉSOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

164. Considérons l'équation générale du second degré

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

où a, b, c désignent des nombres réels ou imaginaires. Résoudre cette équation, c'est trouver tous les nombres réels ou imaginaires qui, substitués à la place de x, rendent le premier membre nul.

En suivant la même marche qu'au n° 87, on met l'équation (1) sous la forme équivalente

$$(2) \qquad a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0,$$

en supposant a différent de zéro.

Désignons, alors, par le symbole

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

l'un des deux nombres complexes dont le carré est égal à $b^2 - 4ac$ (nombres dont l'existence a été établie au n° 163) [1]. L'équation (2) pourra se mettre sous la forme

$$(3) \qquad a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right] = 0.$$

La quantité entre crochets, étant une différence de deux carrés, se décompose en un produit d'une somme par une différence et l'équation s'écrit

$$(4) \qquad a\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = 0.$$

a étant différent de zéro, pour que le premier membre de l'équation (4) soit nul, il faut et il suffit que l'un des deux facteurs entre crochets (n° 161) soit nul. Il faut donc que l'on ait :

soit $$x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0,$$

soit $$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.$$

(1) Il faut remarquer que le symbole

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

n'a aucune signification arithmétique. Nous avons employé le signe $\sqrt{}$ pour ne pas créer une notation nouvelle, mais il faudrait bien se garder de traiter ces symboles comme des radicaux arithmétiques et leur appliquer, par exemple, le calcul des radicaux. On serait conduit à de graves erreurs. Le calcul des radicaux ne s'applique essentiellement qu'aux radicaux arithmétiques.

Ce qui donne, pour x, toujours deux valeurs, réelles ou imaginaires, et deux seulement,

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \\ x &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{aligned} \right.$$

Nous retrouvons ainsi la formule générale de résolution d'une équation du second degré, mais qui, maintenant, a un sens *dans tous les cas.*

On peut donc dire que :

Toute équation du second degré, à coefficients réels ou imaginaires, a deux racines réelles ou imaginaires.

Dans le cas particulier où le discriminant $b^2 - 4ac$ est nul, ces deux racines sont *confondues.*

Lorsque les coefficients a, b, c sont *réels* et que le discriminant $b^2 - 4ac$ est négatif, l'un des nombres dont le carré est $b^2 - 4ac$ est $i\sqrt{4ac - b^2}$ (le radical ayant ici son sens arithmétique) et les deux racines sont données par la formule

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Donc, lorsque dans une équation, à coefficients réels, le discriminant est négatif, cette équation a deux racines imaginaires conjuguées.

EXEMPLES :

1° *Résoudre l'équation*

$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Le discriminant est

$$4 - 8 = -4,$$

dont une des racines carrées est $2i$.

Les deux racines de l'équation sont donc

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

2° *Résoudre l'équation*

$$x^2 - 3(1 + i)x + 5i = 0.$$

Le discriminant est :

$$9(1 + i)^2 - 20i = -2i,$$

dont l'une des racines carrées est (n° 163)

$$1 - i.$$

Les racines de l'équation sont donc

$$x = \frac{3 + 3i + 1 - i}{2} = 2 + i$$

et

$$x = \frac{3 + 3i - 1 + i}{2} = 1 + 2i.$$

3° *Résoudre l'équation*

$$x^3 - 1 = 0.$$

Le premier membre est divisible par $x - 1$ et l'équation s'écrit

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

L'équation admet donc, d'abord, la racine 1 et, en outre, les deux racines de l'équation

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Ces deux racines sont

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \\ x &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}\right.$$

On peut remarquer que l'une quelconque de ces deux racines imaginaires est égale au carré de l'autre. Ainsi :

$$\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Si donc on désigne par j l'une d'elles, l'autre sera égale à j^2.

Au fond, résoudre l'équation proposée c'est trouver tous les nombres (réels ou imaginaires) dont les cubes sont égaux à 1. On peut donc dire que l'unité a trois racines cubiques qui sont :

$$1, j, j^2.$$

Il y en a une réelle et deux imaginaires conjuguées. On peut, d'ailleurs, vérifier que

$$1 + j + j^2 = 0.$$

165. Si on désigne par x' et x'' les deux racines de l'équation (1),

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ x'' &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \end{aligned}\right.$$

le premier membre de l'équation (1), mis sous la forme (4), s'écrit :

$$a(x - x')(x - x'').$$

On a donc, toujours, l'identité

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x')(x - x'') \qquad (5).$$

Tout trinôme du second degré peut donc être décomposé en un produit de deux facteurs du premier degré à coefficients réels ou imaginaires.

De l'identité (5) on conclut, alors, immédiatement les relations entre les coefficients et les racines (Voir n° 91)

$$\begin{cases} x' + x'' = -\dfrac{b}{a}, \\ x'x'' = \dfrac{c}{a}, \end{cases}$$

qui, par conséquent, subsistent dans tous les cas.

Lorsque les coefficients a, b, c sont réels, ces relations montrent que, si les racines x' et x'' sont imaginaires, elles sont nécessairement imaginaires conjuguées, puisque leur somme et leur produit sont réels (Voir n° 162). D'ailleurs, réciproquement, si les deux racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0$$

sont imaginaires conjuguées, les deux coefficients p et q sont réels, puisque

$$\begin{cases} p = -(x' + x''), \\ q = x'x''. \end{cases}$$

166. Condition pour que deux équations du second degré aient une racine commune.

Soient

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$
$$(2) \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

deux équations du second degré, à une inconnue.

Lorsque ces deux équations admettent une solution commune α, le système des deux équations du premier degré à deux inconnues

$$(3) \qquad \begin{cases} ay + bx + c = 0, \\ a'y + b'x + c' = 0, \end{cases}$$

admet un système de solutions de la forme

$$x = \alpha, \; y = \alpha^2$$

où la valeur de y est le carré de la valeur de x.

D'après les résultats connus de la discussion de deux équations du premier degré à deux inconnues (Voir n° 76), si $ab' - ba'$ est différent de

zéro, les deux équations (3) admettent un système de solutions et un seul :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}, \\ y &= \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}. \end{aligned}\right.$$

Pour que les deux équations (1) et (2) aient une racine commune, il *faut* donc que l'on ait :

$$\frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} = \left(\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right)^2,$$

ce qui s'écrit :

$$(4) \qquad (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0.$$

Désignons par R le premier membre de cette condition :

$$R = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb'),$$

R est ce qu'on appelle le *résultant* des deux équations du second degré (1) et (2).

Si $ab' - ba'$ est nul, mais si l'une des deux quantités a ou a', a par exemple, est différente de zéro, il faudra, d'abord, que le système (3) soit compatible, ce qui exige

$$ac' - ca' = 0.$$

Dans ce cas, R est encore nul et les deux équations (1) et (2) ont non seulement une, mais les *deux* racines communes. Car, comme on sait, toute solution de la première équation du système (3) vérifie la seconde. α et β désignant les deux racines de l'équation (1), les deux solutions

$$x = \alpha, \quad y = \alpha^2;$$
$$x = \beta, \quad y = \beta^2$$

de la première équation (3) vérifient la seconde, ce qui exprime que l'équation (2) admet les deux solutions de l'équation (1).

Si, $ab' - ba'$ étant nul, les deux quantités a et a' sont toutes deux nulles, on peut dire que les deux équations (1) et (2) (Voir n° 88) ont chacune une racine infiniment grande et, par suite, qu'elles ont encore une racine commune (infinie). D'ailleurs, comme, dans ce cas, on a encore $R = 0$, on peut dire, finalement, que la condition (4)

$$R = 0$$

est *nécessaire*.

Cette condition est aussi *suffisante*, car si elle est remplie :

1° Si $ab' - ba' \neq 0$, elle peut se mettre sous la forme

$$\frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} = \left(\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right)^2$$

qui exprime que le système (3) admet une solution où la valeur de y est le

carré de la valeur de x. Les équations (1) et (2) ont donc une solution commune qui est la valeur de x.

2° Si $ab' - ba' = 0$ mais $a \neq 0$, la condition (4) devient

$$ac' - ca' = 0.$$

Les deux équations (3) ont toutes leurs solutions communes et les deux solutions de l'équation (1) vérifient l'équation (2).

3° Si $a = a' = 0$, les deux équations (1) et (2) ont une racine commune infiniment grande.

En résumé, *la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations* (1) *et* (2) *aient au moins une racine commune est*

$$R = 0.$$

Cette condition étant remplie, les deux équations auront, une seule racine commune :

$$x = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'},$$

si $ab' - ba' \neq 0$.

Dans le cas où $a = a' = 0$, la racine commune est infiniment grande. S'il arrive, enfin, qu'on ait :

$$\left.\begin{array}{l} ab' - ba' = 0 \\ ac' - ca' = 0 \end{array}\right\} a \neq 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

les deux équations (1) et (2) ont les *deux* solutions communes.

Remarque I. — Trouver la condition pour que deux équations à une inconnue aient une racine commune, c'est ce qu'on appelle *éliminer* cette inconnue entre ces deux équations.

Ainsi, le résultat de *l'élimination* de l'inconnue x entre les équations (1) et (2) est la condition

$$R = 0.$$

Remarque II. — Lorsque les deux équations du second degré (1) et (2) ont une *seule* racine commune finie, cette racine est, comme nous venons de le voir,

$$x = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Cette racine est donc une fonction *rationnelle* des coefficients des deux équations. On peut en conclure les propositions suivantes :

Lorsque deux équations du second degré, à coefficients réels, ont une seule racine commune, cette racine commune est réelle.

Lorsque deux équations du second degré, à coefficients réels et rationnels, *ont une seule racine commune, cette racine commune est réelle et* rationnelle.

167. L'élimination de l'inconnue x entre les deux équations du second degré (1) et (2) peut encore se faire par une autre méthode dite « *des fonctions symétriques* ». Nous exposerons encore cette méthode, parce qu'elle est susceptible d'une extension à deux équations de degrés quelconques.

Désignons par $f(x)$ et $\varphi(x)$ les premiers membres des équations (1) et (2),

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c,$$
$$\varphi(x) \equiv a'x^2 + b'x + c',$$

et supposons, d'abord, a différent de zéro. L'équation (1) a, dans ce cas, deux racines finies α et β (réelles ou imaginaires, distinctes ou non). Il est clair que si l'une de ces deux racines vérifie l'équation (2), on a

$$a^2 \varphi(\alpha) \varphi(\beta) = 0,$$

puisque l'une des deux quantités $\varphi(\alpha)$ ou $\varphi(\beta)$ sera nulle. Développons le premier membre de cette égalité :

$$a^2\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \equiv a^2 [a'\alpha^2 + b'\alpha + c'] [a'\beta^2 + b'\beta + c']$$
$$\equiv a^2[a'^2\alpha^2\beta^2 + a'b'\alpha\beta(\alpha+\beta) + a'c'(\alpha^2+\beta^2) + b'^2\alpha\beta + b'c'(\alpha+\beta) + c'^2].$$

Or, α et β étant les racines de l'équation (1), on a

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a},$$
$$\alpha\beta = \frac{c}{a},$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

En portant ces valeurs dans l'identité précédente, on trouve :

$$a^2\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \equiv a'^2c^2 + a^2c'^2 - 2aca'c' + a'c'b^2 - a'cbb' + acb'^2 - ac'bb'.$$

Ce qui s'écrit

$$a^2\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \equiv (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')$$

ou

$$a^2\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \equiv \mathrm{R} \qquad (5).$$

Donc, a étant différent de zéro, si les deux équations ont une racine commune, on a

$$\mathrm{R} = 0.$$

On verrait de même, que, si a' est différent de zéro et si on désigne par α' et β' les deux racines de l'équation (2), on a l'identité

$$\mathrm{R} \equiv a'^2 f(\alpha') f(\beta')$$

et, par suite, que si l'une des racines de l'équation (2) vérifie l'équation (1) R est nul.

Comme on a

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta),$$

on peut encore écrire

$$R = a^2a'^2(\alpha' - \alpha)(\alpha' - \beta)(\beta' - \alpha)(\beta' - \beta),$$

lorsque a et a' sont différents de zéro.

Si a et a' sont nuls à la fois, les deux équations (1) et (2) ont une racine commune infiniment grande et, comme il est aisé de le vérifier, R est encore nul.

Donc, en résumé, chaque fois que les deux équations ont une racine commune (finie ou infinie) on a

$$R = 0.$$

Cette condition est donc nécessaire.

Elle est, d'ailleurs, suffisante. En effet, si l'une des deux quantités a ou a' est différente de zéro, a par exemple, l'équation (1) a deux racines finies α et β et on a l'identité

$$R \equiv a^2\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta) \qquad (6).$$

a étant différent de zéro, R ne peut être nul que si

$$\varphi(\alpha) = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(\beta) = 0,$$

ce qui exprime que l'une des racines de l'équation (1) vérifie l'équation (2).

Si, R étant nul, a et a' sont nuls à la fois, les deux équations ont une racine commune infiniment grande.

La condition est donc suffisante.

Remarque. — Lorsque le résultant R n'est pas nul, son signe peut donner des renseignements utiles sur la grandeur relative des racines, dans les équations à coefficients réels. On peut, en effet, démontrer la proposition suivante :

Théorème. — *Lorsque le résultant de deux équations du second degré, à coefficients réels, est négatif, ces deux équations ont, toutes deux, leurs deux racines réelles et distinctes et les deux racines de l'une d'elles comprennent entre elles une racine et une seule de l'autre.*

D'abord, si le résultant R des deux équations

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$
$$(2) \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

est différent de zéro, l'une au moins des deux quantités a ou a' est différente de zéro. Supposons, par exemple, a différent de zéro. L'équation (1) a, alors, deux racines finies α et β et on a l'identité

$$R \equiv a^2\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta).$$

R étant négatif, le produit $\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)$ est négatif. Les deux racines α et β sont nécessairement réelles, car, si elles étaient imaginaires, elles seraient imaginaires conjuguées. Les deux nombres $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ seraient également

imaginaires conjugués et leur produit serait égal au carré de leur module commun, par suite, positif. De plus α et β sont distincts, car, si on avait $\alpha = \beta$, on aurait

$$\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta) = [\varphi(\alpha)]^2 > 0.$$

α et β étant deux nombres réels et distincts et les résultats de substitution $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ étant de signes contraires, on peut affirmer que les deux racines α' et β' de l'équation (2)

$$\varphi(x) = 0$$

sont également réelles et distinctes et que l'une d'elles est comprise entre α et β (voir n° 95, *Rem.*). On a, donc,

soit $$\alpha' < \alpha < \beta' < \beta,$$
soit $$\alpha < \alpha' < \beta < \beta'.$$

On pourra, d'ailleurs, distinguer ces deux cas en comparant les demi-sommes $-\dfrac{b}{2a}$ et $-\dfrac{b'}{2a'}$ des racines des deux équations.

EXERCICES

244. Résoudre les équations

$$2x^2 + x + 3 = 0,$$
$$ix^2 - (1 + i)x + i = 0,$$
$$\frac{x+i}{x-i} = 3\,\frac{x-i}{x+i}.$$

245. Lorsque l'une des deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

a une racine double, la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux équations aient une racine commune est :

$$2ac' + 2ca' - bb' = 0$$

(voir l'exercice 18).

246. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$(a + a'i)x^2 + (b + b'i)x + c + c'i = 0$$

ait une racine *réelle* (a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels)? — Dans quel cas les deux racines sont-elles réelles?

247. Même question que dans l'exercice précédent, pour l'équation du quatrième degré

$$(ax^2 + bx + c)^2 + (a'x^2 + b'x + c')^2 = 0.$$

La racine réelle, lorsqu'elle existe, est double et on demande de terminer la résolution dans cette hypothèse.

248. Trouver la condition pour que l'une des racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

soit l'inverse de l'une des racines de l'équation

$$a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

249. Prouver que la condition nécessaire et suffisante pour que la fraction

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

se simplifie, sans être constante, est que sa dérivée soit carré parfait.

ÉQUATION ET TRINOME BICARRÉS

168. Équation bicarrée. — La résolution générale de l'équation bicarrée, à coefficients réels ou imaginaires, se fait de la même façon que celle de l'équation bicarrée à coefficients réels (Voir n° 99).

Soit

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \qquad (1)$$

l'équation bicarrée la plus générale. Nous poserons

$$x^2 = y$$

et nous serons ramené à résoudre la *résolvante* du second degré

$$ay^2 + by + c = 0 \qquad (2).$$

Cette résolvante a, comme nous venons de le voir, toujours deux racines y' et y'' (réelles ou imaginaires, distinctes ou non). On aura toutes les racines de l'équation (1) en résolvant les deux équations

$$x^2 = y' \quad \text{et} \quad x^2 = y''.$$

Chacune de ces deux équations a toujours deux racines égales et de signes contraires et, par suite, l'équation bicarrée a toujours quatre racines, deux à deux égales et de signes contraires.

Dans le cas particulier où l'un des deux nombres y' ou y'' est nul, l'équation (1) a deux racines égales à zéro.

Dans le cas où $b^2 - 4ac = 0$, l'équation (1) a deux racines doubles, car $y' = y''$.

Dans le cas où l'équation bicarrée a ses coefficients a, b, c réels, il est facile de voir que les racines imaginaires (s'il y en a) sont deux à deux conjuguées. Lorsque les racines y' et y'' sont réelles, cela est presque évident, car si l'équation

$$x^2 = y'$$

(y' réel) a ses racines imaginaires, ces racines sont conjuguées, car ce sont :

$$+ i\sqrt{-y'} \quad \text{et} \quad - i\sqrt{-y'}.$$

Si les deux racines y' et y'' de la résolvante sont imaginaires, elles sont imaginaires conjuguées (Voir n° 164). Or, comme il est facile de s'en rendre compte, deux quantités imaginaires conjuguées ont des racines carrées respectivement imaginaires conjuguées ; par suite, les deux racines de l'équation

$$x^2 = y'$$

sont les conjuguées des racines de l'équation

$$x^2 = y''.$$

L'équation bicarrée a, dans ce cas, quatre racines imaginaires, deux à deux conjuguées.

Remarque. — Puisque les deux racines de la résolvante (2) peuvent être représentées par la formule

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

les quatre racines de l'équation bicarrée (1) pourront être représentées par la formule

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

(Dans cette formule, lorsque la quantité placée sous un signe $\sqrt{}$ ne sera pas réelle et positive, ce signe indiquera l'*une* des quantités complexes dont le carré est égal à la quantité placée sous le radical.)

Exemples :

1° *Résoudre l'équation*

$$x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

La résolvante est :

$$y^2 + y + 1 = 0$$

dont les racines sont

$$y = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Il reste à résoudre les équations

$$x^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

dont les racines sont :

$$\pm\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{et} \quad \pm\left[\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right].$$

Si on désigne, comme nous l'avons déjà fait (n° 164, Ex. 3°), par j l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité, ces quatre racines sont

$$j,\ j^2,\ -j,\ -j^2.$$

2° *Résoudre l'équation*

$$x^4 + 1 = 0.$$

La résolvante

$$y^2 + 1 = 0$$

a pour racines

$$-i \quad \text{et} \quad +i.$$

Les quatre racines de l'équation proposée sont donc :

$$\frac{+1+i}{\sqrt{2}},\ \frac{+1-i}{\sqrt{2}},\ \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}}.$$

Leur somme est nulle. — Ce sont, au fond, les quatre racines quatrièmes de (-1).

Équations qui se ramènent au second degré. — Il est clair que, de même que nous avons repris les résolutions des équations du second degré et des équations bicarrées, on pourrait, d'une façon plus générale, reprendre les résolutions des équations et des systèmes d'équations dont les résolutions se ramènent au second degré et les traiter à notre nouveau point de vue.

Nous nous contenterons de donner quelques exemples.

Exemple I. — *Soit à résoudre l'équation réciproque*

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

(Voir n° 101, *Exemple*). La résolvante, en posant

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

est

$$y^2 + y - 1 = 0,$$

dont les racines sont

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Les racines de l'équation proposée sont, alors, les racines des deux équations

$$2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + 2 = 0,$$
$$2x^2 + (1 + \sqrt{5})x + 2 = 0.$$

Ces deux équations admettent, chacune, deux racines imaginaires. Les quatre racines de l'équation proposée sont donc :

$$\frac{-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{et} \quad \frac{-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Exemple II. — *Soit à résoudre le système :*

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 275, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Les équations étant symétriques en x et y, posons

$$x + y = u, \quad xy = v.$$

Le système devient :

$$\begin{cases} u(5v^2 - 5u^2v + u^4) = 275, \\ u = 5. \end{cases}$$

En portant la valeur de u dans la première, on a, pour déterminer v, l'équation

$$v^2 - 25v + 114 = 0,$$

qui a deux racines :

$$v' = 6, \quad v'' = 19.$$

x et y sont donc les deux racines de l'équation

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

ou de l'équation

$$x^2 - 5x + 19 = 0.$$

La première a pour racines 2 et 3 ; la seconde a pour racines

$$\frac{5 \pm i\sqrt{51}}{2}.$$

Le système a donc quatre solutions qui sont :

$$x = 2, \quad y = 3;$$
$$x = 3, \quad y = 2;$$
$$x = \frac{5 + i\sqrt{51}}{2}, \quad y = \frac{5 - i\sqrt{51}}{2};$$
$$x = \frac{5 - i\sqrt{51}}{2}, \quad y = \frac{5 + i\sqrt{51}}{2}.$$

169. Trinôme bicarré. — Désignons par $\sqrt{y'}$ l'une des racines carrées de la racine y' de la résolvante de l'équation bicarrée

$$(1) \qquad ax^4 + bx^2 + c = 0;$$

et par $\sqrt{y''}$ l'une des racines carrées de la seconde racine y'' de cette résolvante. Les quatre racines de l'équation bicarrée seront, alors,

$$+\sqrt{y'}, \quad -\sqrt{y'}, \quad +\sqrt{y''}, \quad -\sqrt{y''}$$

et on aura, évidemment, l'identité (Voir n° 100) :

$$ax^4 + bx^2 + c \equiv a\left(x - \sqrt{y'}\right)\left(x + \sqrt{y'}\right)\left(x - \sqrt{y''}\right)\left(x + \sqrt{y''}\right)$$

qui peut s'écrire, en désignant par x_1, x_2, x_3, x_4 les quatre racines de l'équation (1),

$$ax^4 + bx^2 + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

En d'autres termes :

Tout trinôme bicarré peut être décomposé en un produit de quatre facteurs binômes du premier degré.

En écrivant que, dans les deux membres de l'identité précédente, les coefficients des mêmes puissances de x sont égaux, on obtient quatre relations entre les coefficients et les racines de l'équation (1). Ces relations sont :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0, \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{c}{a}. \end{array}\right.$$

170. Décomposition du trinôme bicarré en deux facteurs du second degré. — Supposons que, dans l'identité

$$ax^4 + bx^2 + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),$$

on effectue, d'une part, le produit $(x - x_1)(x - x_2)$ et, d'autre part, le produit $(x - x_3)(x - x_4)$, l'identité prendra la forme nouvelle

$$ax^4 + bx^2 + c \equiv a(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q')$$

en posant :

$$\begin{array}{l} (x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q, \\ (x - x_3)(x - x_4) = x^2 + p'x + q'. \end{array}$$

Ceci nous montre que tout trinôme bicarré peut être décomposé en un produit de deux facteurs du second degré. On voit, d'ailleurs, *a priori*, que cette décomposition est possible de *trois* manières, car on peut associer de

trois manières différentes les quatre binômes du premier degré en deux couples de deux facteurs. Ces couples sont :

$$\begin{array}{ll}(x - x_1)(x - x_2), & (x - x_3)(x - x_4);\\ (x - x_1)(x - x_3), & (x - x_2)(x - x_4);\\ (x - x_1)(x - x_4), & (x - x_2)(x - x_3).\end{array}$$

Nous pouvons, alors, nous proposer de calculer tous les systèmes de valeurs de p, q, p', q' tels qu'on ait l'identité

$$(1) \qquad ax^4 + bx^2 + c \equiv a(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q'),$$

c'est-à-dire de chercher toutes les décompositions du trinôme, en deux facteurs du second degré. En identifiant les deux membres de l'identité (1) terme à terme, on parvient au système d'égalités suivant :

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} p + p' = 0,\\ q + q' + pp' = \dfrac{b}{a},\\ pq' + qp' = 0,\\ qq' = \dfrac{c}{a}.\end{array}\right.$$

Le problème revient donc à résoudre, de la façon la plus générale, ce système de quatre équations à quatre inconnues p, p', q, q'.

La première équation donne

$$p' = -p$$

et, en portant dans la troisième, celle-ci devient :

$$p(q' - q) = 0.$$

Ceci nous conduit, naturellement, à distinguer deux cas.

1° $p = 0$; par suite, $p' = 0$ et il reste, pour déterminer q et q', le système

$$\left\{\begin{array}{r} q + q' = \dfrac{b}{a},\\ qq' = \dfrac{c}{a},\end{array}\right.$$

qui prouve que q et q' sont les racines de l'équation

$$az^2 - bz + c = 0.$$

Or, cette équation est la transformée en $-z$ de la résolvante

$$ay^2 + by + c = 0$$

de l'équation obtenue en égalant à zéro le trinôme. Si donc y' et y'' sont les racines de la résolvante, on devra prendre pour q l'une des deux valeurs $-y'$ ou $-y''$ et pour q' l'autre. D'ailleurs, il sera indifférent de prendre

pour q l'une ou l'autre valeur, on obtiendra toujours la même solution. Prenons, par exemple,

$$q = -y', \qquad q' = -y'',$$

et on a la première décomposition

$$ax^4 + bx^2 + c \equiv a(x^2 - y')(x^2 - y'') \qquad (3).$$

Cette décomposition, d'ailleurs, résulte immédiatement de la décomposition du premier membre de la résolvante en deux facteurs binômes.

2° Supposons

$$q' - q = 0,$$

le système (2) devient alors,

$$\left\{\begin{array}{l} p' = -p, \\ q' = q, \\ 2q - p^2 = \dfrac{b}{a}, \\ q^2 = \dfrac{c}{a}. \end{array}\right.$$

La dernière relation donne, de suite, pour q' et q deux valeurs,

$$q' = q = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$$

$\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right.$ désignant l'un des deux nombres complexes dont le carré est égal à $\left.\frac{c}{a}\right)$.

La troisième équation donne, alors,

$$p^2 = \pm 2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}.$$

A chaque valeur de q correspond ainsi pour p deux valeurs égales et de signes contraires. Il semble donc, au premier abord, qu'il y ait quatre solutions. Il n'en est rien, car, si on prend pour p une des racines carrées de

$$\pm 2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a},$$

p' sera égale à l'autre. Si on changeait, ensuite, la détermination de p, cela reviendrait à permuter p et p'. Or, comme

$$q = q',$$

la permutation de p et de p' ne changera pas l'identité (1). Donc, quelle

que soit la racine choisie pour p, la décomposition obtenue sera toujours la même. Désignons, par

$$\sqrt{\pm 2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}$$

l'un des deux nombres complexes dont le carré est égal à

$$\pm 2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}.$$

On pourra prendre

$$p = \sqrt{\pm 2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}},$$

et

$$p' = -\sqrt{\pm 2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}.$$

On a donc *deux* nouvelles décompositions, et deux seulement,

$$(4) \qquad ax^4 + bx^2 + c \equiv$$

$$a\left[x^2 + \sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}\,.\,x + \sqrt{\frac{c}{a}}\right]\left[x^2 - \sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}\,.\,x + \sqrt{\frac{c}{a}}\right]$$

et :

$$(5) \qquad ax^4 + bx^2 + c \equiv$$

$$a\left[x^2 + \sqrt{-2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}\,.\,x - \sqrt{\frac{c}{a}}\right]\left[x^2 - \sqrt{-2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}\,.\,x - \sqrt{\frac{c}{a}}\right].$$

Il y a donc, en tout, trois décompositions [(3), (4) et (5)], et trois seulement.

Remarque I. — Il est facile, en suivant la marche que nous avons indiquée au n° 100, de retrouver les deux dernières décompositions de la façon suivante : Mettons a en facteur dans le trinôme :

$$ax^4 + bx^2 + c \equiv a\left[x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}\right].$$

On remarque que x^4 et $\frac{c}{a}$ peuvent être considérés comme les deux termes carrés du développement du carré de

$$x^2 + \sqrt{\frac{c}{a}} \quad \text{ou de} \quad x^2 - \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

On peut, donc, écrire :

$$ax^4 + bx^2 + c \equiv a\left[\left(x^2 \pm \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 - \left(\pm 2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}\right)x^2\right].$$

La quantité entre crochets peut, maintenant, être considérée comme la différence des carrés de deux quantités

$$x^2 \pm \sqrt{\frac{c}{a}} \qquad \text{et} \qquad x\sqrt{\pm 2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}$$

et, en remplaçant cette parenthèse par le produit d'une somme et d'une différence, on a :

$$ax^4 + bx^2 + c \equiv$$

$$a\left[x^2 \pm \sqrt{\frac{c}{a}} + x\sqrt{\pm 2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}\right]\left[x^2 \pm \sqrt{\frac{c}{a}} - x\sqrt{\pm 2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}\right].$$

Remarque II. — *Lorsque le trinôme bicarré a ses coefficients réels, il y a toujours au moins une décomposition à coefficients réels.*

Cette proposition résulterait immédiatement du fait que, lorsque le trinôme a des racines imaginaires, ces racines sont conjuguées deux à deux. Il suffit donc d'associer les facteurs binômes conjugués pour obtenir une décomposition réelle.

Il est facile, d'ailleurs, de vérifier directement qu'il y a toujours une des trois décompositions (3), (4) ou (5) à coefficients réels, comme nous l'avons montré au n° 100 (page 271).

Cette proposition très importante permet de ramener la résolution de toute équation bicarrée à coefficients réels à celle de deux équations du second degré également à coefficients réels. Car, à cause de l'identité (1), résoudre l'équation

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

revient à résoudre les deux équations

$$x^2 + px + q = 0,$$
$$x^2 + p'x + q' = 0.$$

Exemple. — Considérons l'équation

$$x^4 + x^2 + 1 = 0 \qquad \text{(Voir n° 100, page 272).}$$

Le premier membre s'écrit

$$x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Pour résoudre l'équation proposée, il suffit donc de résoudre les deux équations

$$x^2 + x + 1 = 0,$$
$$x^2 - x + 1 = 0.$$

Les autres décompositions du trinôme sont à coefficients imaginaires; ce sont :

$$x^4 + x^2 + 1 \equiv \left(x^2 - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x^2 - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + ix - 1)(x^2 - ix - 1).$$

Remarque III. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les trois décompositions d'un trinôme bicarré, à coefficients réels, en facteurs du second degré, soient également à coefficients réels, est que les quatre racines du trinôme soient réelles.*

Les trois décompositions sont, en effet:

$$a(x^2 - y')(x^2 - y''),$$

$$a\left[x^2 + \sqrt{\frac{c}{a}} + x\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}\right]\left[x^2 + \sqrt{\frac{c}{a}} - x\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}\right],$$

$$a\left[x^2 - \sqrt{\frac{c}{a}} + x\sqrt{-2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}\right]\left[x^2 - \sqrt{\frac{c}{a}} - x\sqrt{-2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}\right].$$

Pour que ces trois décompositions aient leurs coefficients réels, il faut d'abord que les racines y' et y'' de la résolvante soient réelles, ce qui donne :

$$b^2 - 4ac \geqslant 0.$$

Puis, que les trois quantités

$$\frac{c}{a}, \quad 2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}, \quad -2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}$$

soient positives. Or, le produit des deux dernières est :

$$\frac{b^2}{a^2} - 4\,\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Ce produit est donc positif. Pour que les deux dernières quantités soient positives, il faut, alors, et il suffit que leur somme $-2\frac{b}{a}$ soit positive (puisqu'elles sont de même signe).

Les conditions sont donc, finalement,

$$b^2 - 4ac \geqslant 0, \qquad \frac{c}{a} > 0, \qquad -\frac{b}{a} > 0,$$

qui sont précisément les conditions qui expriment que les quatre racines de l'équation

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

sont réelles.

EXERCICES

250. Résoudre les équations :

$$x^4 + 2x^2 - 3 = 0;$$
$$2x^4 - x^2 + 5 = 0;$$
$$x^4 + 2x^2 + 4 = 0;$$
$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0;$$
$$x^3 - 1 = 0; \quad x^5 + 1 = 0; \quad x^6 - 1 = 0;$$
$$x^8 - 1 = 0; \quad x^{16} - 1 = 0;$$

plus généralement

$$x^{2^n} - 1 = 0.$$

Vérifier que, dans toutes ces équations binômes, la somme des racines est nulle.

251. Décomposer en deux facteurs du second degré les trinômes bicarrés suivants :

$$x^4 - 5x^2 + 4;$$
$$x^4 - x^2 + 2;$$
$$2x^4 + x^2 - 1;$$
$$x^4 + ix^2 - 1.$$

TRANSFORMATION DE L'EXPRESSION $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

171. Considérons l'équation bicarrée

$$x^4 - 8x^2 + 9 = 0.$$

En résolvant cette équation comme d'ordinaire, on trouve qu'elle a quatre racines réelles données par la formule

$$x = \pm \sqrt{4 \pm \sqrt{7}} \qquad (1).$$

D'autre part, pour résoudre l'équation proposée, on peut décomposer le premier membre en deux facteurs du second degré par une décomposition de la forme (4) ou (5) du numéro précédent.

On a, alors :

$$x^4 - 8x^2 + 9 \equiv (x + 3)^2 - 14x^2$$

d'où :

$$x^4 - 8x^2 + 9 \equiv \left(x^2 - x\sqrt{14} + 3\right)\left(x^2 + x\sqrt{14} + 3\right);$$

on a donc également les quatre racines de l'équation proposée en résolvant les deux équations du second degré

$$x^2 - x\sqrt{14} + 3 = 0,$$
$$x^2 + x\sqrt{14} + 3 = 0.$$

Or, en résolvant ces deux équations, on trouve, pour les racines, la nouvelle expression

$$x = \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad (2).$$

En rapprochant les expressions (1) et (2) on arrive à l'égalité intéressante :

$$\sqrt{4 \pm \sqrt{7}} = \sqrt{\frac{7}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Cette remarque nous conduit naturellement à chercher si toute expression de la forme

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

peut se mettre sous la forme d'une somme de deux radicaux simples.

172. Étant donnée l'expression

$$\sqrt{A + \sqrt{B}}$$

où A et B désignent des nombres *arithmétiques rationnels*, B n'étant pas carré parfait, cherchons à déterminer deux nombres *arithmétiques*, x et y, *également rationnels* tels que l'on ait l'égalité

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \qquad (3).$$

Élevons les deux membres au carré, on devra avoir :

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy} \qquad (4)$$

ou

$$2\sqrt{xy} = A - x - y + \sqrt{B}.$$

Élevons encore les deux membres au carré, et nous aurons :

$$4xy = (A - x - y)^2 + B + 2(A - x - y)\sqrt{B}.$$

Cette dernière égalité nous prouve qu'il faut que l'on ait

$$A - x - y = 0.$$

Car, si $A - x - y$ était différent de zéro, on tirerait de cette égalité

$$\sqrt{B} = \frac{4xy - B - (A - x - y)^2}{2(A - x - y)},$$

égalité qui est impossible; car, B n'étant pas carré parfait, le premier membre est un nombre irrationnel et, A, B, x et y étant, par hypothèse, rationnels, le second membre est rationnel.

On doit donc, d'abord, avoir

$$x + y = A.$$

L'égalité (4) devient alors,

$$\sqrt{B} = 2\sqrt{xy}$$

qui donne

$$B = 4\,xy,$$

$$xy = \frac{B}{4}.$$

Les deux nombres x et y, s'ils existent, sont donc les racines de l'équation du second degré :

$$x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0 \qquad (5).$$

Pour que le problème ait une solution, il faut que cette équation ait deux solutions réelles, positives et rationnelles. Pour que les solutions soient réelles, il faut que l'on ait

$$A^2 - B > 0.$$

Elles seront, alors, positives (car leur somme A et leur produit $\frac{B}{4}$ sont positifs) et données par la formule

$$x = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Pour que ces solutions soient, enfin, rationnelles, il faut que

$$A^2 - B$$

soit carré parfait.

Ces conditions nécessaires sont suffisantes, car, si $A^2 - B$ est égal à un carré parfait C^2, l'équation (5) a deux racines positives et rationnelles :

$$\frac{A + C}{2} \quad \text{et} \quad \frac{A - C}{2}.$$

En prenant pour x l'une de ces valeurs et pour y l'autre, l'équation (4) sera vérifiée. Or, comme l'égalité (4) provient de l'égalité (3) élevée au carré, x et y vérifieront soit l'égalité (3), soit l'égalité

$$-\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

qui est, manifestement, impossible.

x et y vérifient donc l'égalité (3), et à cause de la symétrie, on pourra prendre pour x une valeur quelconque et pour y l'autre.

Par exemple, on prendra :

$$x = \frac{A + C}{2}, \quad y = \frac{A - C}{2}$$

et on aura

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}.$$

EXEMPLE. — *Soit à transformer :*

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{4+\sqrt{12}}.$$

On a ici

$$A = 4, \quad B = 12,$$
$$A^2 - B = 4.$$

La transformation est donc possible et on a :

$$C = 2,$$

ce qui donne :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1.$$

173. La transformation de

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}$$

en

$$\sqrt{x} - \sqrt{y}$$

se fait absolument de la même façon que la précédente. On traitera l'égalité

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

de la même façon que l'égalité (3) et on arrivera, de même, à voir que x et y doivent être les racines de l'équation (5) :

$$x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0.$$

Pour que la transformation soit possible, il faudra encore que $A^2 - B$ soit égal à un carré parfait C^2.

Mais, ici, on ne devra pas prendre pour x l'une quelconque de deux racines, car, pour que l'égalité

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

soit vérifiée, il faudra que x soit plus grand que y. On prendra donc pour x la plus grande racine :

$$x = \frac{A+C}{2}, \quad y = \frac{A-C}{2}$$

et on aura :

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} - \sqrt{\frac{A - C}{2}}.$$

174. Comme application, nous rechercherons dans quels cas la transformation précédente est applicable aux racines de l'équation bicarrée

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

où a, b, c désignent des nombres *entiers*.

Les racines de cette équation sont données par la formule

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

ou

$$x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}}$$

(nous supposons, évidemment, ces racines réelles, par suite $\frac{c}{a} > 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$ et $b^2 - 4ac > 0$).

On a, ici,

$$A = -\frac{b}{2a}, \qquad B = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

$$A^2 - B = \frac{c}{a}.$$

Pour que la transformation soit possible, il faut donc et il suffit que le produit $\frac{c}{a}$ des racines de la résolvante soit carré parfait. C'est ce qui avait lieu, par exemple, dans l'équation que nous avons considérée au début (n° 171).

Chaque fois, d'ailleurs, que la transformation est possible, on obtiendra directement les racines sous la forme $\pm\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ en décomposant le trinôme bicarré en deux facteurs du second degré de la forme (4) ou (5) du n° 170.

EXERCICES

252. Transformer les expressions

$$\sqrt{9 \pm \sqrt{17}}, \qquad \sqrt{5 \pm \sqrt{21}},$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{77}}, \qquad \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{10}\sqrt{21}},$$

$$\sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - a^2})}.$$

253. Trouver, directement, les racines des équations

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0,$$
$$x^4 - 7x^2 + 9 = 0$$

sous la forme $\pm\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$.

APPENDICE II

COMPLÉMENT A L'ÉTUDE DE LA VARIATION DES FONCTIONS

175. Dans l'étude élémentaire de la variation d'une fonction au moyen de sa dérivée (n°s 119 et 120), nous avons *admis* que, lorsqu'une fonction est croissante, pour toutes les valeurs de la variable comprises dans un intervalle, elle varie, dans cet intervalle, dans le même sens que la variable. Nous allons, maintenant, combler cette lacune et montrer comment on peut établir, directement, les propositions analogues à celles du n° **119**, pour la variation d'une fonction *dans un intervalle.*

Rappelons, d'abord, et précisons les définitions de la croissance et de la décroissance *dans un intervalle* (Voir n° 31).

Définitions. — I. On dit qu'une fonction est croissante, dans un intervalle, lorsqu'elle varie, dans cet intervalle, dans le même sens que la variable.

Ceci peut encore s'exprimer sous la forme équivalente que voici :

Une fonction $f(x)$ est dite *croissante, dans l'intervalle* (a, b), si, α et β étant deux nombres *quelconques,* compris dans cet intervalle, le quotient

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$$

est *positif.*

II. Une fonction est dite décroissante, dans un intervalle, lorsqu'elle varie, dans cet intervalle, en sens contraire de la variable.

On peut encore dire ceci de la façon suivante :

Une fonction $f(x)$ est dite *décroissante, dans l'intervalle* (a, b), si, α et β étant deux nombres *quelconques,* compris dans cet intervalle, le quotient

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$$

est *négatif.*

Théorème de Rolle. — *Lorsqu'une fonction* f(x) *est finie, continue, et admet une dérivée, pour toutes les valeurs de* x *comprises dans un intervalle* (a, b), *si, de plus, elle prend des valeurs égales pour* x = a *et* x = b, *il existe au moins une valeur* c *de la variable, comprise entre* a *et* b, *pour laquelle la dérivée s'annule.*

Par hypothèse, on a :

$$f(a) = f(b).$$

Si, lorsque x varie de a à b, la fonction reste constante, sa dérivée est nulle pour toutes les valeurs de x (*Th. I,* n° 117), par suite, pour toute valeur c, comprise entre a et b.

Si, x variant de a à b, la fonction ne conserve pas toujours la même valeur, elle prendra certainement des valeurs soit plus grandes, soit plus petites que $f(a)$. Supposons, par exemple, que la fonction prenne des valeurs plus grandes que $f(a)$; comme elle reste finie, elle atteindra

certainement une valeur plus grande que toutes les autres ou, du moins, une valeur qu'elle ne dépassera pas. Soit, alors, c un nombre compris entre a et b tel que, x variant de a à b, la fonction ne prenne pas de valeurs supérieures à $f(c)$, on aura :

$$f(c-h)-f(c) \leqslant 0$$

et

$$f(c+h)-f(c) \leqslant 0,$$

h étant un nombre positif, assez petit pour que $c-h$ et $c+h$ soient compris entre a et b. Par suite, on aura :

$$\frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \geqslant 0,$$

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0.$$

Or, lorsque h tend vers zéro, les deux rapports $\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$ et $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ tendent tous les deux vers une limite commune $f'(c)$; comme ils ont des signes contraires, cette limite commune est zéro. On a donc :

$$f'(c) = 0.$$

Ce qui démontre le théorème proposé.

Théorème des accroissements finis. — *Lorsqu'une fonction* f(x) *est finie, continue, et admet une dérivée, pour toutes les valeurs de* x *comprises dans l'intervalle* (a, b), *il existe un nombre* c, *compris entre* a *et* b, *tel que l'on ait l'égalité :*

$$f(b)-f(a) = (b-a)\,f'(c).$$

Désignons, en effet, par A le quotient

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

On aura, par définition de A,

$$f(b)-f(a) = (b-a)A$$

ou :

$$(1) \qquad f(b)-bA = f(a)-aA.$$

Considérons alors la fonction $\varphi(x)$ suivante :

$$\varphi(x) = f(x) - Ax.$$

Cette fonction est finie, continue, et admet une dérivée, pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, puisque c'est une différence de deux fonctions de cette nature. Sa dérivée est, d'ailleurs :

$$\varphi'(x) = f'(x) - A.$$

Or, l'égalité (1) exprime que l'on a :

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe un nombre c, compris entre a et b, tel que

$$\varphi'(c) = 0,$$

c'est-à-dire, tel que

$$f'(c) - A = 0$$

ou tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ce qui prouve la proposition.

Théorème I (*Réciproque du Théorème I*, n° 117). — *Lorsqu'une fonction* f (x) *admet une dérivée, pour toutes les valeurs de* x *comprises entre* a *et* b, *et que, pour toutes ces valeurs, cette dérivée est nulle, la fonction est constante dans l'intervalle* (a, b).

Pour démontrer ce théorème, il suffit de prouver que, si α et β sont deux nombres *quelconques* compris entre a et b, on a :

$$f(\alpha) = f(\beta).$$

Or, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un nombre γ, compris entre α et β, et, par suite, entre a et b, tel que

$$f(\alpha) - f(\beta) = (\alpha - \beta)\, f'(\gamma).$$

Or, d'après l'hypothèse,

$$f'(\gamma) = 0$$

donc

$$f(\alpha) - f(\beta) = 0.$$

Remarque. — La proposition précédente est presque intuitive lorsqu'on se reporte à la signification géométrique de la dérivée. Car, la dérivée $f'(x)$ étant le coefficient angulaire de la tangente à la courbe représentative

$$y = f(x),$$

si cette dérivée est toujours nulle, la tangente à la courbe est *toujours parallèle à* ox. On conçoit, alors, que la courbe ne peut être qu'une droite parallèle à ox et, par suite que, y, c'est-à-dire $f(x)$, est constant.

Théorème II. — *Lorsqu'une fonction* f(x) *admet une dérivée, pour toutes les valeurs de* x *comprises dans un intervalle* (a, b) :

1° *Si la dérivée est positive, pour toutes les valeurs de cet intervalle, la fonction est croissante, dans cet intervalle.*

2° *Si la dérivée est négative, pour toutes les valeurs de cet intervalle, la fonction est décroissante, dans cet intervalle.*

Il suffit de prouver, en vertu même des définitions, que, si α et β sont deux nombres *quelconques*, pris dans l'intervalle (a, b), on a :

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} > 0,$$

lorsque la dérivée est positive. Or, d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = f'(\gamma),$$

γ étant un certain nombre compris entre α et β et, par suite, entre a et b. D'après l'hypothèse, $f'(\gamma)$ est positif, et la proposition est démontrée.

L'égalité précédente montre, de même, que, lorsque $f'(\gamma)$ est négatif, on a

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} < 0,$$

et que, par suite, la fonction est décroissante.

Réciproque du théorème II. — *Lorsqu'une fonction* f(x) *admet une dérivée pour toutes les valeurs de* x *comprises dans l'intervalle* (a, b) :

1° *Si elle est croissante dans cet intervalle, la dérivée est positive ou nulle, pour toutes les valeurs de l'intervalle.*

2° *Si elle est décroissante dans cet intervalle, la dérivée est négative ou nulle, pour toutes les valeurs de l'intervalle.*

La démonstration est identique à celle de la réciproque du théorème I du n° 119.

Remarque. — Il faut remarquer que si la dérivée est nulle, elle ne peut l'être que pour des valeurs *isolées* de x; car, s'il existait un intervalle, quelque petit qu'il soit, compris dans l'intervalle (a, b), dans lequel la dérivée serait constamment nulle, la fonction serait constante dans cet intervalle, d'après le théorème I, qui précède.

176. Continuité des fonctions circulaires (1).

Les fonctions *circulaires* sont les fonctions :

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \text{séc}\, x, \quad \text{coséc}\, x, \quad \operatorname{cotg} x.$$

qui sont les lignes trigonométriques de l'arc x.

Pour montrer que ces fonctions sont des fonctions continues de la variable x, nous remarquerons d'abord que :

Le sinus *d'un arc tend vers zéro en même temps que cet arc.*

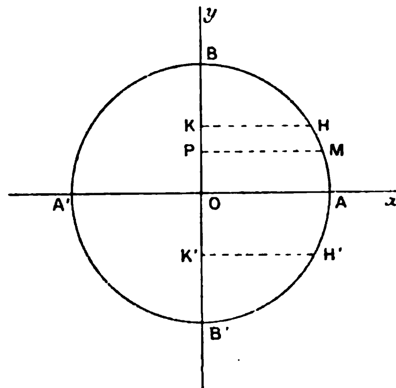


Fig. 53.

Soit, en effet, O (*fig.* 53) le cercle trigonométrique de rayon 1. A, l'origine des arcs; ox l'axe des cosinus dont le sens positif est de O vers A, et oy l'axe des sinus perpendiculaire à ox. Le sinus d'un arc AM est, par définition, le segment $\overline{OP}$, P étant la projection orthogonale de M sur oy.

Cela étant, soit ε un nombre positif donné à l'avance. Portons, sur oy, de

(1) Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons le lecteur familiarisé avec les formules ordinaires de la trigonométrie élémentaire.

part et d'autre de O, deux longueurs OK, OK' égales à ε. Menons par K et K' des parallèles à ox qui coupent le demi-cercle BAB' en H et H'. Soit α la valeur commune des arcs égaux AH et AH'. Il est clair que si l'arc AM est, en valeur absolue, plus petit que α, son extrémité M tombera entre H et H'; par suite, la projection P de M sur oy tombera entre K et K' et le segment $\overline{OP}$ sera, en valeur absolue, plus petit que ε. En d'autres termes, ceci nous prouve que : si

$$|x| < \alpha,$$

on a

$$|\sin x| < \varepsilon.$$

Sin x tend donc vers zéro en même temps que x.

1° *Continuité de sin* x. — Donnons à la variable x un accroissement h, il en résultera, pour $\sin x$, l'accroissement

$$k = \sin(x + h) - \sin x;$$

ce qui s'écrit, en transformant cette différence en produit :

$$k = 2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Quand h tend vers zéro, $\sin\left(\frac{h}{2}\right)$ tend vers zéro et $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$ reste *fini* (compris entre -1 et $+1$), donc leur produit k tend vers zéro.

2° *Continuité de* cos x. — Soit h l'accroissement donné à x, l'accroissement correspondant de $\cos x$ sera :

$$k = \cos(x + h) - \cos x;$$

ce qui s'écrit :

$$k = -2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Quand h tend vers zéro, $\sin\left(\frac{h}{2}\right)$ tend vers zéro et $\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$ reste fini, donc k tend vers zéro.

3° Les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ étant continues, on en conclut, immédiatement, que les autres fonctions circulaires sont continues pour toutes les valeurs de x, pour lesquelles elles ont une valeur finie. On a, en effet,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$\operatorname{séc} x = \frac{1}{\cos x};$$

$$\operatorname{coséc} x = \frac{1}{\sin x}.$$

En appliquant le théorème sur le quotient de deux fonctions continues (n° 114, *Th. III*), on conclut, immédiatement, que les quatre fonctions $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{séc} x$, $\operatorname{coséc} x$ sont continues pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas leurs dénominateurs.

177. Dérivées des fonctions circulaires.

Lemme. — *Le rapport du sinus d'un arc à cet arc tend vers l'unité quand l'arc tend vers zéro* [1].

Supposons d'abord l'arc x positif. Nous pouvons, évidemment, le supposer aussi plus petit que $\frac{\pi}{2}$, puisque nous allons le faire tendre vers zéro. Soit O le cercle trigonométrique, AM l'arc x (*fig.* 54), MP la perpendiculaire abaissée de M sur OA et T le point d'intersection du rayon OM avec la tangente en A au cercle. On a :

$$MP = \sin x, \qquad AT = \operatorname{tg} x,$$

puisque le sinus et la tangente sont positifs.

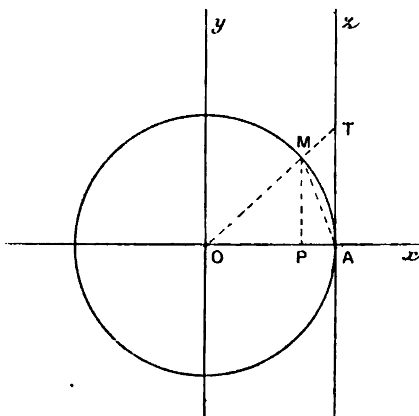


Fig. 54.

Si l'on compare entre elles les aires des triangles OAM, OAT et du secteur circulaire OAM, on a :

$$\textit{aire } OAM < \textit{aire sect. } OAM < \textit{aire } OAT.$$

Ceci donne, en remplaçant les aires par leurs mesures,

$$\frac{1}{2} OA \times MP < \frac{1}{2} OA \times \textit{arc } AM < \frac{1}{2} OA \times AT$$

ou

$$MP < \textit{arc } AM < AT,$$

ou, enfin,

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

$\sin x$ étant positif, nous pouvons diviser les trois membres de cette double inégalité par $\sin x$ et il vient :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Or, quand x tend vers zéro, $\cos x$ tend vers 1, puisque $\cos x$ est une fonction continue et que

$$\cos 0 = 1.$$

[1] On suppose, dans l'énoncé de cette proposition, que l'unité d'arc est, comme d'ordinaire en trigonométrie, l'arc qui a pour longueur l'unité de longueur, c'est-à-dire l'arc qui a même longueur que le rayon du cercle (qui est pris pour unité).

$\frac{x}{\sin x}$ reste donc compris entre 1 et une quantité qui a pour limite 1.
$\frac{x}{\sin x}$ a donc aussi pour limite 1, quand x tend vers zéro par valeurs positives.

La proposition est encore vraie quand x est négatif. Posons, dans ce cas,

$$x = -x',$$

x' sera positif et on aura :

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{-\sin x'}{-x'} = \frac{\sin x'}{x'}.$$

Quand x tend vers zéro par valeurs négatives, x' tend vers zéro par valeurs positives, $\frac{\sin x'}{x'}$ a pour limite 1, il en est donc de même de $\frac{\sin x}{x}$.

I. — *La dérivée de* $\sin x$ *est* $\cos x$.

Donnons à x l'accroissement h, $\sin x$ prendra l'accroissement :

$$k = \sin(x + h) - \sin x = 2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

On a donc :

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} . \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Lorsque h tend vers zéro, le quotient

$$\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}$$

a pour limite 1 (d'après le *Lemme*); $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$ a pour limite $\cos x$, puisque $x + \frac{h}{2}$ a pour limite x et que $\cos x$ est une fonction continue. Le quotient $\frac{k}{h}$ a donc une limite qui est

$$\lim\left(\frac{k}{h}\right) = 1 \times \cos x = \cos x.$$

La fonction $\sin x$ admet donc une dérivée pour toute valeur de x, et cette dérivée est $\cos x$.

II. — *La dérivée de* $\cos x$ *est* $-\sin x$.

Soit h un accroissement donné à x, l'accroissement correspondant de $\cos x$ est :

$$k = \cos(x + h) - \cos x = -2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

On a donc :

$$\frac{k}{h} = -\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} \cdot \sin\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Quand h tend vers zéro, le quotient

$$\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}$$

tend vers 1 ; et $\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$ tend vers $\sin x$, puisque le sinus est une fonction continue. $\frac{k}{h}$ a donc une limite qui est

$$\lim\left(\frac{k}{h}\right) = -1 \times \sin x = -\sin x.$$

La fonction $\cos x$ a donc une dérivée, pour toute valeur de x, qui est $-\sin x$.

III. — *La dérivée de* $\operatorname{tg} x$ *est* $\frac{1}{\cos^2 x}$.

L'accroissement de $\operatorname{tg} x$, correspondant à un accroissement h de x, est :

$$k = \operatorname{tg}(x + h) - \operatorname{tg} x = \frac{\sin h}{\cos(x + h) \cos x}.$$

On a donc, pour toute valeur de x qui n'annule pas $\cos x$,

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{\cos(x + h) \cos x}.$$

Lorsque h tend vers zéro, le rapport

$$\frac{\sin h}{h}$$

tend vers 1. D'ailleurs, $\cos x$ étant une fonction continue, $\cos(x + h)$ a pour limite $\cos x$ et le dénominateur, $\cos(x + h) \cos x$, a une limite $\cos^2 x$, différente de zéro, pour toute valeur de x qui n'annule pas $\cos x$. Par suite,

en vertu des théorèmes sur les limites, $\frac{k}{h}$ a une limite, lorsque x tend vers zéro, qui est :

$$\lim\left(\frac{k}{h}\right) = 1 \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

La fonction $\operatorname{tg} x$ a donc une dérivée pour toute valeur de x qui ne la rend pas infinie, et cette dérivée est $\frac{1}{\cos^2 x}$.

Cette dérivée s'écrit encore :

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Remarque. — Connaissant les dérivées de $\sin x$ et de $\cos x$, on pourrait avoir la dérivée de $\operatorname{tg} x$ en appliquant la règle de la dérivée d'un quotient. On a :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Par suite,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

On calculera de la même façon les dérivées des trois autres lignes trigonométriques.

1°
$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

d'où

$$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

2°
$$\operatorname{séc} x = \frac{1}{\cos x};$$

d'où

$$(\operatorname{séc} x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

3°
$$\operatorname{coséc} x = \frac{1}{\sin x};$$

d'où

$$(\operatorname{coséc} x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

178. Dérivée d'une fonction de fonction. — Soit u une fonction d'une variable x et $f(u)$ une fonction de u. $f(u)$ peut être considérée comme une fonction de la variable x et, à ce titre, est dite *fonction de fonction.*

Ainsi, par exemple, l'expression

$$\sqrt{x^2 + 1}$$

peut être considérée comme une fonction de fonction, car, si on pose

$$u = x^2 + 1,$$

on aura

$$\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{u}.$$

De même,

$$\sin(\sqrt{x})$$

est une fonction de la fonction $\sqrt{x}$.

Théorème. — *Si la fonction* u, *de la variable* x, *admet une dérivée* u' *et si la fonction* f (u), *de la variable* u, *admet une dérivée* f' (u), *la fonction de fonction* f (u), *fonction de* x, *admet une dérivée qui est le produit*

$$f'(u)\,u'.$$

Désignons par y la fonction de fonction $f(u)$, de la variable x. Donnons à x un accroissement Δx, il en résultera pour la fonction u un accroissement correspondant Δu et pour la fonction y un accroissement Δy. On aura évidemment,

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

puisque, pour $x + \Delta x$, u prend la valeur $u + \Delta u$.

Par suite, on a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x};$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Quand Δx tend vers zéro, le quotient $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ a, par hypothèse, une limite u'. D'ailleurs, Δu tend vers zéro, car la fonction u, admettant une dérivée, est nécessairement continue; par suite, le quotient

$$\frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u}$$

tend vers une limite $f'(u)$, d'après l'hypothèse.

Il résulte, de là, que le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a une limite qui est le produit des limites de ses deux facteurs, et que y, fonction de x, admet une dérivée qui est :

$$y' = f'(u) \cdot u'.$$

EXEMPLE I. — u^m peut être considérée comme une fonction de fonction. Or, la dérivée de u^m, où on considère u comme une variable indépendante, est

$$mu^{m-1}$$

on a donc

$$(u^m)' = mu^{m-1}.u'.$$

Nous retrouvons la règle énoncée au nº 117. (*Th.* III, *Cor.* II.)

EXEMPLE II. — *La dérivée de* sin u *est*

$$\cos u.\, u'.$$

Ainsi prenons $u = \sqrt{x}$, nous aurons

$$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

et, par suite,

$$\left(\sin(\sqrt{x})\right)' = \cos(\sqrt{x}).\ \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Prenons $u = x + a$, nous aurons $u' = 1$.

Donc

$$(\sin(x + a))' = \cos(x + a);$$

de même,

$$(\cos(x + a))' = -\sin(x + a).$$

Ceci nous permet de donner les expressions des dérivées $m^{\text{ièmes}}$ de $\sin x$ et de $\cos x$.

Remarquons, en effet, que

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$-\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

on aura, alors,

$$(\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$(\cos x)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

En dérivant, encore une fois, on aura

$$(\sin x)'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$
$$(\cos x)'' = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right).$$

On voit facilement la loi. Chaque dérivation augmente l'arc de $\frac{\pi}{2}$. m dérivations successives augmenteront l'arc de m fois $\frac{\pi}{2}$. On a, par conséquent :

$$D^m_{x^m}(\sin x) = \sin\left(x + m\frac{\pi}{2}\right),$$

$$D^m_{x^m}(\cos x) = \cos\left(x + m\frac{\pi}{2}\right).$$

EXEMPLE III. — Soit

$$y = \sin\left(\frac{ax + b}{a'x + b'}\right);$$

on aura

$$y' = \cos\left(\frac{ax + b}{a'x + b'}\right)\frac{ab' - ba'}{(a'x + b')^2}.$$

De même, soit

$$y = \sqrt{1 - \sin^2 x};$$

on a :

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sin^2 x}}(1 - \sin^2 x)'.$$

Or

$$(1 - \sin^2 x)' = -2\sin x(\sin x)' = -2\sin x.\cos x,$$

donc

$$y' = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}.$$

179. Variation des fonctions circulaires. — La connaissance des dérivées des fonctions circulaires pourra nous permettre d'étudier, facilement, la variation de ces fonctions et de celles qui sont des combinaisons simples des fonctions circulaires. Voici quelques exemples d'études de ce genre.

EXEMPLE I. — *Variation de* $\sin x$.

Pour étudier la variation de $\sin x$, nous remarquerons, d'abord, que, puisqu'on a

$$\sin(2\pi + x) = \sin x,$$

lorsque x varie de 2π à 4π, la fonction varie de la même façon que lorsque x varie de 0 à 2π. De même, x variant de 4π à 6π, de 6π à 8π, etc..., ou encore, x variant de -2π à 0, de -4π à -2π, etc..., $\sin x$ varie de la même façon que lorsque x varie de 0 à 2π.

Il nous suffira donc d'étudier la variation de la fonction dans l'intervalle $(0,2\pi)$ puisque, dans les intervalles suivants et précédents, $\sin x$ passe périodiquement par les mêmes valeurs.

La fonction $\sin x$ admet une dérivée, pour toute valeur de x, qui est $\cos x$.

Or, $\cos x$ s'annule pour

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ et } x = \frac{3\pi}{2}.$$

dans l'intervalle de 0 à 2π.

x croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ est positif, par suite, $\sin x$ croît (de 0 à 1) ; x croissant de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$, $\cos x$ est négatif, et $\sin x$ décroît (de 1 à -1) ; enfin, x croissant de $3\frac{\pi}{2}$ à 2π, $\cos x$ est positif et $\sin x$ croît (de -1 à 0). En remarquant que $\sin x$ s'annule pour $x = \pi$, on peut résumer cette discussion dans le tableau suivant :

x	y' $\cos x$	y $\sin x$
0		0
	+	croît
$\frac{\pi}{2}$	0	1 (*max*)
	—	décroît
π		0
	—	décroît
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1 (*min*)
	+	croît
2π		0

La courbe représentative de la variation est, alors, la suivante (*fig.* 55). La courbe part de l'origine O, monte jusqu'à un maximum A (tangente horizontale) pour $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$. Elle descend, ensuite, du maximum A à un minimum C $\left(x = \frac{3\pi}{2}, y = -1\right)$ en traversant l'axe des x au point B ($x = \pi$, $y = 0$). Enfin, la courbe remonte du minimum C au point D, situé sur l'axe des x, pour lequel $x = 2\pi$, $y = 0$.

On peut remarquer qu'il est facile de construire les tangentes à la courbe aux points A, B et D. On a, en effet, pour

$$x = 0, \quad y' = \cos 0 = 1;$$
$$x = \pi, \quad y' = \cos \pi = -1;$$
$$x = 2\pi, \quad y' = \cos 2\pi = 1.$$

Les coefficients angulaires des tangentes en A et D sont donc égaux à 1. Les tangentes en A et D sont donc parallèles à la droite

$$y = x$$

qui est la bissectrice de l'angle xoy.

Le coefficient angulaire de la tangente en B est — 1. La tangente en B est parallèle à la droite

$$y = -x$$

qui est la bissectrice de l'angle $x'oy$.

Connaissant la courbe OABCD qui représente la variation du sinus, quand x varie de 0 à 2π, on a, facilement, la courbe complète représentant

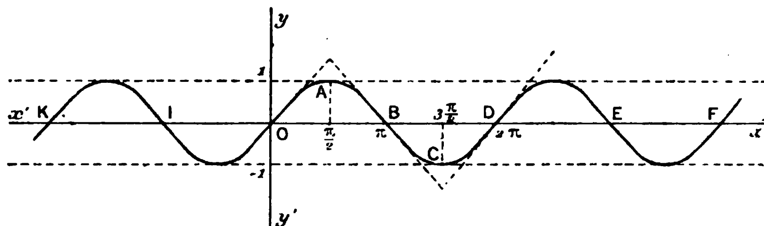


FIG. 55.

la variation du sinus lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$. En effet, lorsque x varie de 2π à 4π, la variation du sinus étant la même que de 0 à 2π, la courbe représentative DEF est identique à la courbe OABCD. On obtient, alors, la courbe complète en traçant une suite indéfinie d'arcs de courbe DEF, FGH, etc... OIK, etc..., identiques à l'arc OBD et se prolongeant indéfiniment dans les deux sens. La courbe complète est, comme on le voit, une courbe qui serpente autour de ox en faisant une torsade régulière se prolongeant indéfiniment dans les deux sens ox et ox'. C'est par analogie avec cette courbe qu'on désigne, souvent, une courbe quelconque qui serpente autour d'une droite sous le nom de courbe *sinusoïdale*.

Remarque. — On pourrait étudier, de la même façon, la variation du cosinus, mais, si on remarque que

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

on voit que cette étude est inutile. Car, lorsque x varie de 0 à 2π, cette égalité nous montre que $\cos x$ a les mêmes variations que $\sin x$ lorsque x varie de $\frac{\pi}{2}$ à $2\pi + \frac{\pi}{2}$.

La courbe représentative de la variation de $\cos x$ est identique à la courbe qui représente $\sin x$, il n'y a de différence que dans la place de l'axe *oy* relativement à la courbe. On obtiendra évidemment la courbe qui représente $\cos x$ en diminuant les abcisses de tous les points de la courbe, qui représente $\sin x$, de $\frac{\pi}{2}$. Ceci revient, au fond, à déplacer l'axe *oy* de façon qu'il passe par le point A (*fig.* 55).

Exemple II. — *Variation de* $\operatorname{tg} x$.

L'égalité bien connue

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$$

nous montre, de suite, qu'il suffit d'étudier la variation de la fonction $\operatorname{tg} x$ lorsque x croît de 0 à π, car de π à 2π, de 2π à 3π, etc... et de $-\pi$ à 0, de -2π à $-\pi$, etc... la fonction passera par les mêmes valeurs, dans le même ordre.

Dans l'intervalle de 0 à π, la fonction $\operatorname{tg} x$ est continue pour toutes les valeurs de x sauf pour $x = \frac{\pi}{2}$, valeur pour laquelle elle devient infiniment grande. D'ailleurs, pour toutes les valeurs de x pour lesquelles elle est continue, la fonction admet une dérivée qui est $\frac{1}{\cos^2 x}$. La dérivée étant toujours positive, la fonction est toujours croissante. Ceci nous conduit à la discussion suivante :

x croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x$ croît de 0 à $+\infty$. Lorsque x passe par la valeur $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x$ passe brusquement de $+\infty$ à $-\infty$. Enfin, x croissant de $\frac{\pi}{2}$ à π, $\operatorname{tg} x$ croît de $-\infty$ à 0.

La courbe représentative de la fonction présente une asymptote parallèle à *oy* :

$$x = \frac{\pi}{2}.$$

Lorsque x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, la courbe monte de l'origine O pour devenir asymptote à la droite AB $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$ (*fig.* 56). Puis elle repart asymptote à AB, en bas, et monte jusqu'au point C $(x = \pi,\ y = 0)$, lorsque x croît de $\frac{\pi}{2}$ à π.

Les coefficients angulaires des tangentes en O et C sont égaux à 1, ces tangentes sont donc parallèles à la bissectrice de l'angle *xoy*.

En transportant la courbe OA, BC, parallèlement à elle-même, de façon que O vienne en C, on obtient la courbe CD, EF qui représente la variation de $\operatorname{tg} x$ quand x varie de π à 2π. On transportera ensuite O en F, et ainsi de suite. En continuant de la sorte, on obtiendra la courbe tout entière représentant la variation de $\operatorname{tg} x$ quand x croît de 0 à $+\infty$. En

transportant, de même, la courbe vers la gauche en OA', B'C', etc., on aura la courbe qui correspond au cas où x croît de $-\infty$ à 0.

La courbe totale se compose donc d'une infinité de branches D'C'B', A'OA,

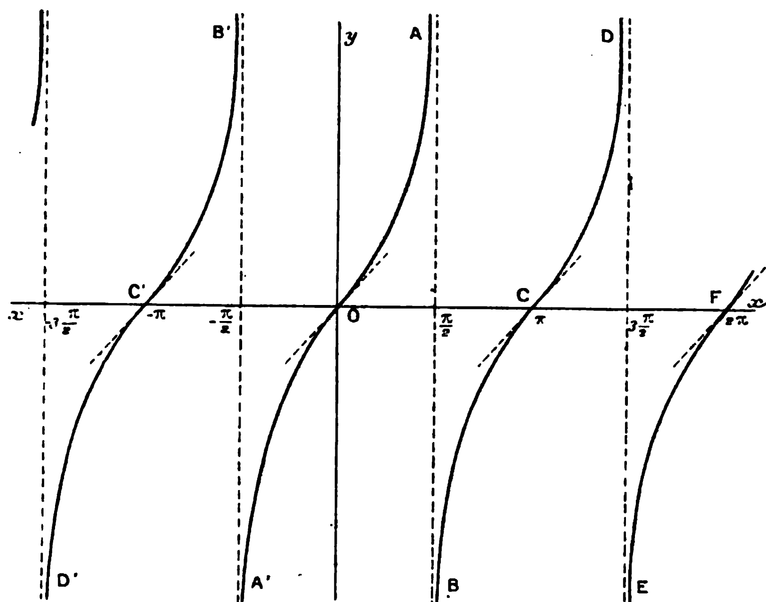


Fig. 56.

BCD, EFG, etc..., s'étendant à l'infini dans les deux sens ox et ox', identiques entre elles et asymptotes à des droites parallèles à oy qui sont

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{3\pi}{2}, \quad x = \frac{5\pi}{2}, \ldots$$
$$x = -\frac{\pi}{2}, \quad x = -\frac{3\pi}{2}, \quad x = -\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

en nombre infini.

Remarque. — L'égalité

$$\cot g x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

nous prouve qu'on pourra déduire la variation de $\cot g\, x$ de celle de $\operatorname{tg} x$, comme on a déduit la variation de $\cos x$ de celle de $\sin x$.

180. Variation de la fraction du second degré. — Dans l'étude de la variation des fonctions (liv. IV, ch. IV), nous avons traité de nombreux exemples numériques où la fonction considérée était une fraction rationnelle dont les deux termes étaient des polynômes du premier ou du second degré. Nous nous proposerons, pour terminer ce complément, d'examiner en détail et de discuter les divers cas qui peuvent se présenter

dans l'étude de la variation de la fraction la plus générale du second degré

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'},$$

suivant les diverses valeurs numériques, réelles, qu'on peut attribuer aux coefficients a, b, c, a', b', c'.

La fonction :

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

est continue pour toute valeur de x, sauf pour celles qui annulent le dénominateur (s'il en existe). Elle admet une dérivée :

$$y' = \frac{(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + bc' - cb'}{(a'x^2 + b'x + c')^2}.$$

Pour que cette dérivée puisse changer de signe, il faut que son numérateur ait des racines réelles et distinctes ; il faut donc que le discriminant de ce numérateur soit positif. Or, le discriminant du numérateur est :

$$R = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb'),$$

et on voit, de suite, que ce n'est autre chose que le *résultant* R des deux termes de la fraction (Voir n° 166).

Nous sommes ainsi amené à distinguer trois cas principaux suivant le signe de ce résultant.

1° $R < 0$.

La dérivée ne s'annule pour aucune valeur réelle de x. D'ailleurs, $ab' - ba'$ est nécessairement différent de zéro, car sans cela R serait positif. Par suite, la dérivée est toujours du signe de $ab' - ba'$. *La fonction varie toujours dans le même sens*, il n'y a ni maximum ni minimum.

Le numérateur et le dénominateur de la fraction ont leurs racines réelles et distinctes. Car, comme nous l'avons vu (n° 167, *Th.*), le résultant R de ces deux trinômes étant négatif, ces deux trinômes ont leurs racines réelles et distinctes et les deux racines de l'un *séparent* les racines de l'autre.

(A) — Si $a' \neq 0$, le dénominateur a *deux* racines réelles et distinctes, α' et β', qui sont deux valeurs de discontinuité pour la fonction. La courbe représentative de la variation admet les deux asymptotes

$$x = \alpha', \qquad x = \beta',$$

parallèles à oy. De plus, comme, pour $x = \pm \infty$, on a : $y = \frac{a}{a'}$, la courbe admet une asymptote parallèle à ox qui a pour équation :

$$y = \frac{a}{a'}.$$

La forme générale de la courbe représentative est celle de la figure 57 qui est construite, en supposant $ab' - ba' > 0$. Dans cette figure, nous n'avons pas tracé les deux axes ox et oy dont la position relative,

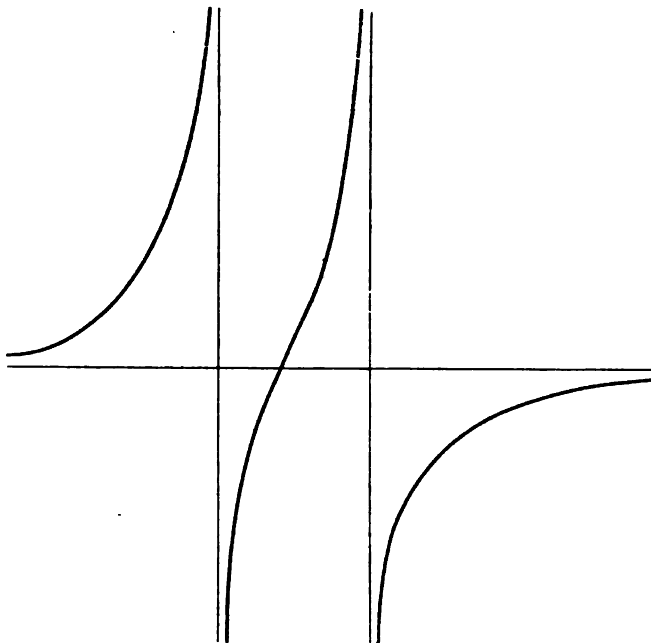


FIG. 57.

par rapport à la figure, varie suivant les grandeurs numériques des coefficients.

(B) — Lorsque $a' = 0$, le dénominateur n'a plus qu'une racine finie, $-\frac{c'}{b'}$, qui est la seule valeur de discontinuité pour la fonction. La courbe représentative n'a plus qu'une seule asymptote parallèle à oy qui est :

$$x = -\frac{c'}{b'}.$$

D'ailleurs, a est nécessairement différent de zéro, puisque $ab' - ba'$ n'est pas nul, et, par suite, pour $x = \pm \infty$, y est infiniment grand. La courbe représentative présente alors une asymptote, non parallèle à un axe,

$$y = \alpha x + \beta,$$

où $\alpha x + \beta$ désigne la partie entière du quotient du numérateur par le dénominateur (Voir n° 124, *Exemple VII*, *Rem.*).

La courbe représentative est une hyperbole qui a la disposition de la figure 58, lorsque $ab' - ba' > 0$ (1).

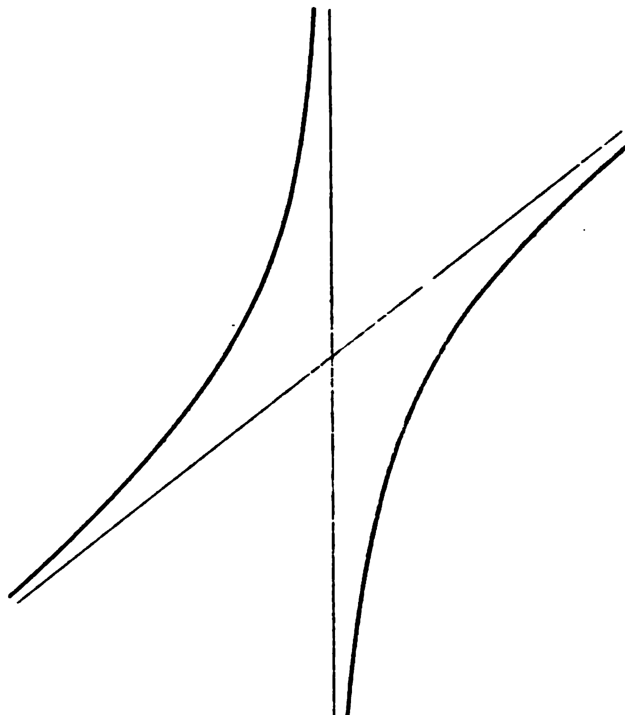


Fig. 58.

2° $R > 0$.

La dérivée a, dans ce cas, deux racines réelles et distinctes que nous désignerons par

$$x' \text{ et } x'' \ (x' < x'').$$

On est, alors, conduit à subdiviser ce cas en plusieurs autres suivant que le dénominateur a ou n'a pas de racines réelles.

I. — Soit $b'^2 - 4a'c' > 0$.

Le dénominateur de la fraction a des racines réelles et distinctes

(1) Dans la suite, nous construirons toujours la courbe représentative dans l'hypothèse $ab' - ba' > 0$, lorsque $ab' - ba'$ sera différent de zéro. Pour avoir les formes générales des courbes représentatives correspondantes au cas de $ab' - ba' < 0$, il suffirait de regarder les courbes que nous avons tracées par transparence à travers la feuille de papier.

α' et β'. Pour ranger les quatre nombres x', x'', α' et β', formons le résultant des deux trinômes

$$a'x^2 + b'x + c'$$

et

$$(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + bc' - cb'.$$

Ce résultant est :

$$R_1 = -(b'^2 - 4a'c')R \text{ (1)};$$

ce qui montre que, dans notre hypothèse, R_1 est négatif. Les racines x' et x'' comprennent donc entre elles une racine α' ou β' et une seule (n° 167, *Th.*).

(A). — Si $ab' - ba' \neq 0$, $a' \neq 0$, les quatre nombres x', x'', α', β' sont finis. En supposant $ab' - ba' > 0$, et l'ordre suivant, pour les racines :

$$x' < \alpha' < x'' < \beta',$$

on a le tableau de variation que voici :

x	y'	y
$-\infty$		$\frac{a}{a'}$
	$+$	croît
x'	0	(*max.*)
	$-$	décroît
		$-\infty$
α'		
		$+\infty$
	$-$	décroît
x''	0	(*min.*)
	$+$	croît
		$+\infty$
β'		
		$-\infty$
	$+$	croît
$+\infty$		$\frac{a}{a'}$

(1) Pour voir cela facilement, on remarque que le résultant R peut se mettre sous la forme suivante :

$$4R \equiv (2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c').$$

(Voir le *premier Exercice* 18). En appliquant cette forme du résultant, aux deux trinômes en question, on trouve, de suite, l'expression de R_1 sous la forme indiquée.

La courbe représentative (*fig.* 59) a deux asymptotes,

$$x = \alpha', \quad x = \beta',$$

parallèles à oy; et une asymptote

$$y = \frac{a}{a'},$$

parallèle à ox.

On peut remarquer que la valeur de y relative au minimum ($x = x''$) est certainement plus grande que celle qui est relative au maximum ($x = x'$);

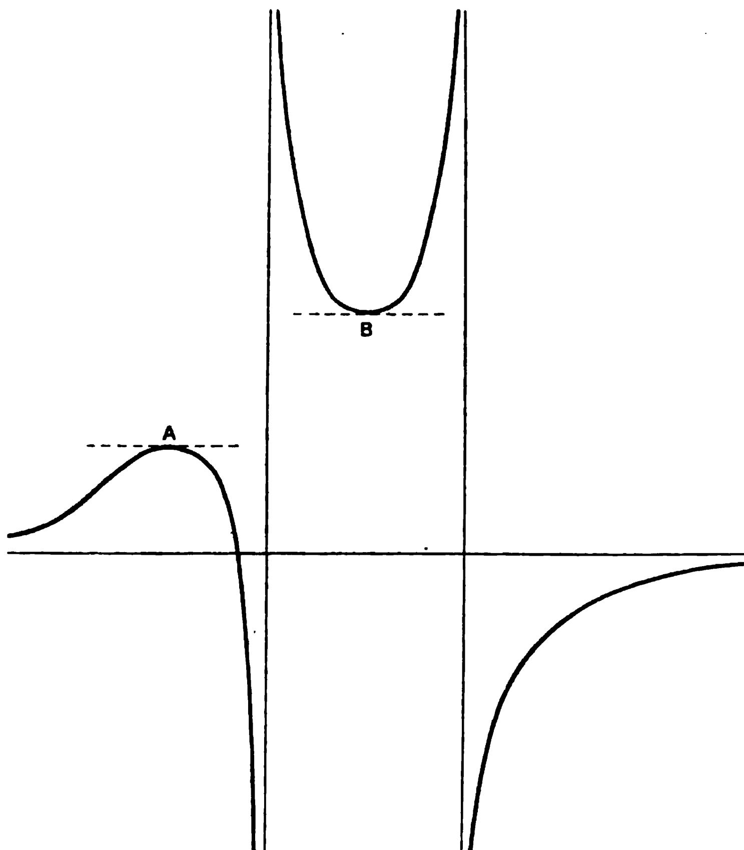


Fig. 59.

car, si on se reporte à la figure 59, on voit immédiatement que, si le minimum B était plus bas que le maximum A, on pourrait tracer des parallèles à ox qui couperaient la courbe en *quatre* points. Il y aurait alors quatre valeurs de x donnant à y la même valeur. Or ceci est manifestement impossible, car, si on donne la valeur de y, on a, pour déterminer x, une

équation du second degré et, par suite, à toute valeur de y il ne peut correspondre, au plus, que deux valeurs de x.

(B). — Si $ab' - ba' \neq 0$, $a' = 0$, le dénominateur n'a plus qu'*une* racine *finie* α', comprise entre x' et x''. La courbe représentative n'a plus qu'une seule asymptote parallèle à oy. D'ailleurs, pour $x = \pm \infty$, y est indéfiniment grand (car $a \neq 0$), il y a une asymptote non parallèle aux axes (Voir n° 124, *Exemple VII, Rem.*).

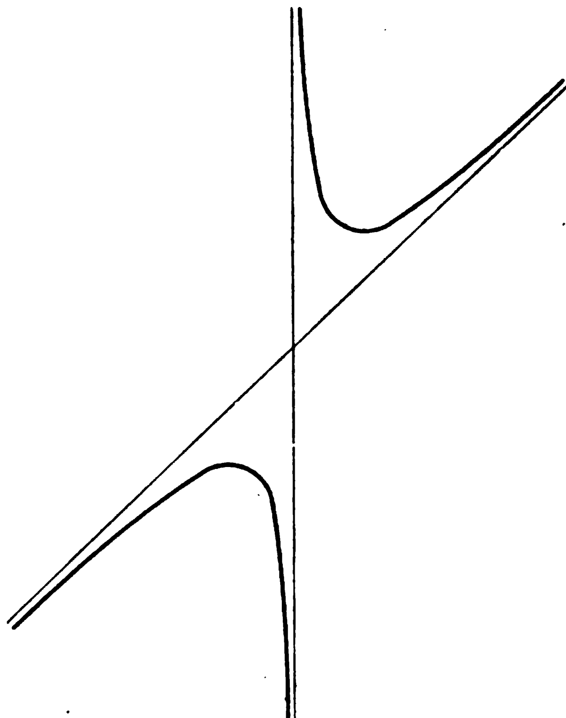


Fig. 60.

La courbe représentative est encore une hyperbole (*fig.* 60), comme dans le cas de $R < 0$, $a' = 0$.

(C). — Si $ab' - ba' = 0$, a' est nécessairement différent de zéro; car, si a' était nul, il faudrait : ou bien que $a = 0$ et alors R serait nul, ou bien que $b' = 0$ et alors on n'aurait plus affaire qu'à un trinôme du second degré, car le dénominateur serait constant. La dérivée ne s'annule plus que pour *une seule* valeur *finie* x', comprise entre α' et β'.

La courbe représentative a deux asymptotes,

$$x = \alpha', \qquad x = \beta',$$

parallèles à oy, et une asymptote

$$y = \frac{a}{a'},$$

parallèle à ox. Elle a, en supposant $ac' - ca' < 0$, la forme de la figure 61.

On peut remarquer qu'on peut considérer cette fonction y comme ayant un minimum pour $x = \pm \infty$. En effet, ce cas peut être considéré comme un cas-limite obtenu en faisant *tendre* $ab' - ba'$ vers zéro. La racine x'' disparait en croissant indéfiniment. Lorsque x passe brusquement, de $+ \infty$ à $- \infty$, la dérivée change de signe, la fonction cesse de

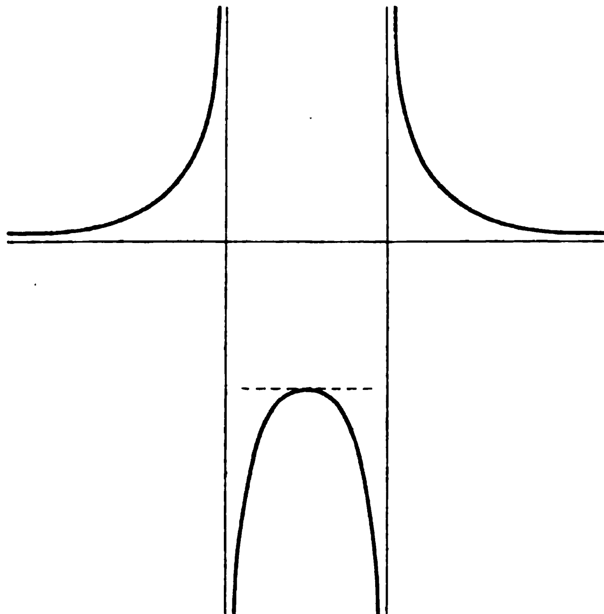


Fig. 61.

décroître pour croître. D'ailleurs, l'inspection de la courbe représentative (*fig.* 61) montre que l'asymptote $y = \frac{a}{a'}$, parallèle à ox, se comporte comme une tangente en un minimum, puisque la courbe ne descend pas au-dessous de cette asymptote. $\frac{a}{a'}$ est donc un minimum relatif pour la fonction.

II. — *Supposons* $b'^2 - 4a'c' < 0$.

Dans ce cas, a' est nécessairement différent de zéro (car sans cela $b'^2 - 4a'c'$ serait positif ou nul). Le dénominateur ayant des racines imaginaires, la fonction y est finie et continue pour toute valeur réelle de x.

(A). — Si $ab' - ba' \neq 0$, la dérivée s'annule pour deux valeurs réelles, finies et distinctes, x' et x'', il y a un maximum et un minimum. Quand x croît de $- \infty$ $+ \infty$, y croît de $\frac{a}{a'}$ à un maximum, pour $x = x'$ (en suppo-

sant $ab' - ba' > 0$) ; puis décroît jusqu'à un minimum, pour $x = x''$; pour croître enfin jusqu'à $\frac{a}{a'}$.

La courbe représentative n'a qu'une asymptote qui est :

$$y = \frac{a}{a'}.$$

Elle a la forme de la figure 62.

Le maximum et le minimum sont *absolus*.

(B). — Si $ab' - ba' = 0$, la dérivée ne s'annule plus que pour une seule

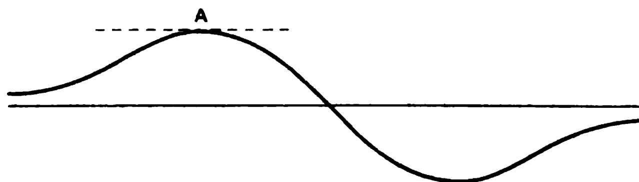


Fig. 62.

valeur finie, x'. On peut dire, encore, que la dérivée a une racine infiniment grande et qu'il y a un minimum pour $x = \pm \infty$ (en supposant $ac' - ca' < 0$). Quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$, y croît de $\frac{a}{a'}$ à un maximum (absolu), pour $x = x'$; puis décroît jusqu'à $\frac{a}{a'}$. On voit bien que la valeur $\frac{a}{a'}$ est un minimum absolu, pour y, puisque cette fonction atteint cette valeur et ne peut pas prendre de valeurs plus petites. La courbe représentative a une seule asymptote. Sa forme générale est celle de la figure 63.

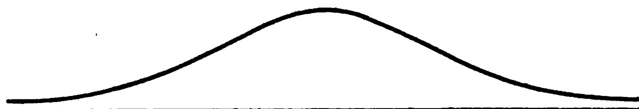


Fig. 63.

III. — *Soit, enfin,* $b'^2 - 4a'c' = 0$.

a' est encore, ici, nécessairement différent de zéro, car, sans cela, il faudrait que b' le soit aussi et y ne serait plus une *fraction*, mais se réduirait à un trinôme du second degré. Le dénominateur ayant une racine double, la fonction y est discontinue pour la seule valeur $x = -\frac{b'}{2a'}$.

Il faut alors remarquer, de suite, que le résultant R_1 du numérateur de la dérivée y' et du dénominateur de y est nul, puisque

$$R_1 = -(b'^2 - 4a'c')R.$$

Il en résulte que ces deux trinômes ont une racine commune et, par suite, que l'une des deux racines du numérateur de la dérivée est égale à $-\frac{b'}{2a'}$.

(A). — Si $ab' - ba' \neq 0$, le numérateur de la dérivée a deux racines réelles, finies et distinctes, qui sont : $x' = -\frac{b'}{2a'}$ et x''.

Supposons, par exemple, $x' < x''$ et, comme d'ordinaire, $ab' - ba' > 0$, on a, alors, le tableau suivant de la variation :

x	y'	y
$-\infty$		$\frac{a}{a'}$
	$+$	croît
$-\frac{b'}{2a'}$	$+\infty$ / $-\infty$	$\frac{+\infty}{+\infty}$ (*max.*)
	$-$	décroît
x''	0	(*min.*)
	$+$	croît
$+\infty$		$\frac{a}{a'}$

En examinant ce tableau, on voit que la dérivée change de signe pour $x = -\frac{b'}{2a'}$ *en devenant infiniment grande*. La fonction y, pour cette valeur de x, devient également infiniment grande, mais sans changer de signe. A l'encontre de ce qui se présentait jusqu'ici, le sens de la variation de la fonction change lorsqu'elle devient infiniment grande. La fonction cesse de croître pour décroître. Tout se passe donc comme dans le cas d'un maximum. On est donc conduit à dire que la fonction a *un maximum à l'infini*.

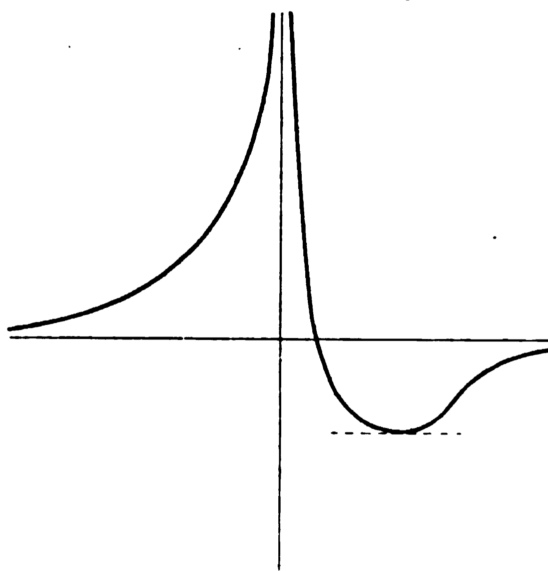


Fig. 64.

La courbe représentative a une asymptote parallèle à ox qui est :

$$y = \frac{a}{a'};$$

et une asymptote parallèle à oy qui est :

$$x = -\frac{b'}{2a'}.$$

La disposition des deux branches de courbe asymptotes à cette dernière droite est spéciale, car les *deux* branches sont asymptotes à la même extrémité (*fig.* 64). On se rend, d'ailleurs, parfaitement compte du maximum à l'infini en imaginant que, dans la figure 62, on déforme la courbe de façon que le maximum A s'éloigne indéfiniment dans une direction parallèle à oy.

(B). — Si $ab' - ba' = 0$, la dérivée n'a plus qu'une seule racine finie qui est $-\frac{b'}{2a'}$. La seconde racine peut être considérée comme étant devenue infiniment grande. Le minimum, correspondant à x'', dans le cas précédent, est, alors, rejeté à l'infini.

La valeur $\frac{a}{a'}$, pour $x = \pm \infty$, est un minimum absolu pour la fonction.

La courbe représentative (en supposant $ac' - ca' < 0$) a la forme générale de la figure 63.

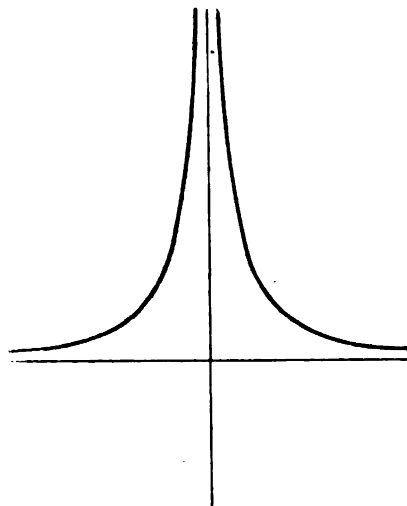


Fig. 63.

3° $R = 0$.

Dans ce cas, le résultant R du numérateur et du dénominateur de la fraction y étant nul, ses deux termes ont au moins une racine commune. Soit α une racine commune ; les deux termes sont divisibles par $x - \alpha$ et la fraction se simplifie. La fonction y n'est, alors, du second degré *qu'en apparence*.

(A) — *Si* $ab' - ba' \neq 0$, les deux termes n'ont *qu'une seule* racine commune (Voir n° 166) et, en divisant les deux termes par $x - \alpha$, la fraction prend la forme simplifiée :

$$y = \frac{ax + d}{a'x + d'}.$$

On est ramené à étudier une fraction dont les deux termes sont du premier degré. Nous avons étudié de telles fractions. Elles varient toujours dans le même sens, et la courbe représentative est une hyperbole (Voir n° 123, *Exemple* IV, *Rem.*).

(B) — *Si* $ab' - ba' = 0$, la condition $R = 0$, donne :

$$ac' - ca' = 0.$$

On a donc aussi

$$bc' - cb' = 0.$$

La dérivée y' est *identiquement nulle*. On en conclut (n° 175, *Th. I*) que la fonction y est *constante*. D'ailleurs, en vertu des conditions précédentes, on a :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

qui est, comme nous le savons (Voir *Exercice* 35) la condition nécessaire et suffisante pour que la fraction y conserve toujours la même valeur numérique.

Remarque. — Dans cet examen rapide des divers cas qui peuvent se présenter dans l'étude de la variation d'une fraction du second degré, nous avons indiqué, brièvement, la forme générale de la courbe représentative dans chacun des cas. Il est évident que, dans le cas d'un exemple numérique, il faudra calculer toutes les valeurs remarquables de y, comme nous l'avons fait dans les exemples numériques traités dans le chapitre IV du livre IV. En particulier, il faudra calculer les valeurs de y pour le maximum et le minimum.

On peut remarquer, qu'il est facile d'obtenir l'équation du second degré dont les racines sont le maximum et le minimum de y en traitant le problème suivant :

Calculer la valeur qu'il faut donner à x *pour que la fraction*

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

prenne une valeur donnée y.

La valeur cherchée de x sera, évidemment, racine de l'équation du second degré :

$$y\,(a'x^2 + b'x + c') = ax^2 + bx + c,$$

qui s'écrit :

$$(a'y - a)\,x^2 + (b'y - b)\,x + c'y - c = 0 \qquad (1).$$

Pour que cette équation, en x, ait des racines réelles, il faut que l'on ait :

$$(b'y - b)^2 - 4\,(a'y - a)\,(c'y - c) \geqslant 0 \qquad (2).$$

Le premier membre de l'inégalité (2) est un trinôme du second degré en y et les valeurs que pourra prendre y seront donc limitées par les deux racines de ce trinôme. Les deux racines de ce trinôme sont donc les *valeurs limites* de y, c'est-à-dire le maximum et le minimum.

On trouve, en développant les calculs, l'équation suivante pour déterminer les deux valeurs de y :

$$(b'^2 - 4a'c')y^2 + 2(2ac' + 2ca' - bb')y + b^2 - 4ac = 0.$$

Il est à remarquer que le discriminant de cette équation est, à un facteur numérique près, le résultant R; car on a :

$$4\mathrm{R} = (2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)\,(b'^2 - 4a'c').$$

Ceci est, d'ailleurs, assez naturel, car il est évident que cette équation doit avoir des racines réelles en même temps que la dérivée y', et dans ce cas seulement.

EXERCICES

254. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\sin(\sin x), \qquad \sin(x^2), \qquad \cos(\cos x),$$

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}, \qquad x - \sin x, \qquad \cos x - 1 + \frac{x^2}{2},$$

$$x \operatorname{tg} x + \sqrt{x \sin x}, \qquad \frac{1}{\sqrt{a \cos^2 x + b \sin^2 x + c}},$$

$$\sqrt[8]{u} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{u}}} \ (u \textit{ fonction de } x), \qquad \sqrt[8]{\operatorname{tg} x}, \qquad \sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x},$$

$$\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right), \qquad \sin\left(\sqrt{x^2 + x + 1}\right).$$

255. Étudier les variations des fonctions :

$$y = \sin x + \cos x, \qquad y = \operatorname{séc} x, \qquad y = \operatorname{coséc} x,$$

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x}, \qquad y = \sin^m x + \cos^m x,$$

$$y = \sin x + \cos x + \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x),$$

$$y = \sin x + \cos x + \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x) + \frac{1}{3}(\sin 3x + \cos 3x);$$

plus généralement, étudier la variation de la fonction :

$$y = \sin x + \cos x + \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x) + \ldots + \frac{1}{m}(\sin mx + \cos mx).$$

256. Soit un cercle fixe O et un point P dans l'intérieur de ce cercle. Par le point P on mène deux cordes rectangulaires AB et CD. Soit x l'angle que fait PA avec le diamètre qui passe par P. Étudier la variation de la somme

$$AB + CD$$

des longueurs des deux cordes, quand x varie de 0 à π.

257. Soit un demi-cercle de diamètre AB. Par A on mène une corde AM faisant l'angle x avec AB. Soit I le milieu de l'arc AM. Étudier la variation de l'aire du quadrilatère ABMI lorsque x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

APPENDICE III

RADICAUX ET EXPOSANTS FRACTIONNAIRES

Nous avons supposé dans ces « Leçons » que le lecteur connaissait le calcul des radicaux et la notation des exposants fractionnaires, car l'exposition de ces questions est du domaine de l'arithmétique. Cependant, comme certains traités d'arithmétique ne contiennent pas cette exposition, nous pensons rendre service à nos lecteurs en reproduisant ici les numéros des excellentes « Leçons d'arithmétique » de M. Tannery relatifs à ces questions.

443. Opérations sur les radicaux. — Pour prouver qu'un nombre est la racine $n^{\text{ième}}$ de A, il suffit de prouver que la puissance $n^{\text{ième}}$ de ce nombre est égale à A. Cette remarque suffit à établir les propositions qui suivent.

Le produit des racines $n^{\text{ièmes}}$ de plusieurs nombres A, B, C, D est égal à la racine $n^{\text{ième}}$ du produit de ces nombres. En d'autres termes, on a

$$(1) \qquad \sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} \times \sqrt[n]{C} \times \sqrt[n]{D} = \sqrt[n]{ABCD}.$$

Pour élever à la puissance $n^{\text{ième}}$ le produit $\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} \times \sqrt[n]{C} \times \sqrt[n]{D}$, il suffit, en effet, d'élever à la puissance n chacun de ses facteurs, et l'on obtient ainsi le produit ABCD.

Dans le cas de deux facteurs, le théorème s'exprime par l'égalité

$$\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{AB}.$$

Un cas particulier intéressant est celui où l'un des nombres A, B, le nombre A, par exemple, est la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre rationnel : supposons $A = a^n$; on aura

$$\sqrt[n]{a^n B} = a \times \sqrt[n]{B};$$

remplacer ainsi $\sqrt[n]{a^n B}$ par $a\sqrt[n]{B}$, c'est ce qu'on appelle faire sortir a du radical, remplacer de même $a\sqrt[n]{B}$ par $\sqrt[n]{a^n B}$ c'est faire entrer a sous le radical. On a, par exemple,

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2},$$
$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^3 \times 3} = 3\sqrt[3]{3}.$$

Un autre cas particulier intéressant est celui où tous les nombres A, B, C, ... qui figurent dans l'égalité (1) sont égaux. On n'a écrit dans cette égalité que quatre facteurs, mais il est clair qu'on aurait pu en écrire

autant qu'on aurait voulu, p par exemple. En les supposant tous égaux, l'égalité prendrait la forme

$$(\sqrt[n]{A})^p = \sqrt[n]{A^p}.$$

En d'autres termes, pour élever à la puissance p la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre A, on peut extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de la puissance p de ce nombre. Inversement, la racine $n^{\text{ième}}$ de la puissance $p^{\text{ième}}$ d'un nombre est la puissance $p^{\text{ième}}$ de la racine $n^{\text{ième}}$ de ce nombre. On observera que, dans le cas où p est égal à n, cette proposition est évidente.

444. La racine $n^{\text{ième}}$ du quotient de deux nombres A, B est égale au quotient des racines $n^{\text{ièmes}}$ de ces nombres ; en d'autres termes, on a

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}.$$

Cette proposition pourrait se déduire de la précédente; on peut aussi l'établir directement. Pour élever la fraction $\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$ à la puissance $n^{\text{ième}}$, on peut élever ses deux termes à la puissance n, ce qui donne $\frac{A}{B}$: elle est donc bien la racine $n^{\text{ième}}$ de $\frac{A}{B}$. En particulier, on a

$$\sqrt[n]{\frac{1}{B}} = \frac{1}{\sqrt[n]{B}}.$$

445. Étant donnée une fraction $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$, dans laquelle le dénominateur est la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre rationnel b, on peut la remplacer par une fraction égale dont le dénominateur soit b ; il suffit de multiplier les deux termes de la fraction par $(\sqrt[n]{b})^{n-1}$ ou $\sqrt[n]{b^{n-1}}$, on a ainsi

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b} \times (\sqrt[n]{b})^{n-1}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b};$$

par exemple, on a

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

il est clair que, pour le calcul numérique, il est plus avantageux de calculer $\sqrt{2}$ avec une certaine approximation, de diviser ensuite le résultat par 2, que de diviser 1 par la racine carrée de 2 ; on pourrait d'ailleurs aussi bien calculer $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,5}.$

Si l'on applique la transformation précédente à la fraction $\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$ du numéro précédent, on voit qu'on peut l'écrire

$$\frac{\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B^{n-1}}}{B} = \frac{\sqrt[n]{A \times B^{n-1}}}{B}.$$

On a, par exemple,

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2 \times 3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

446. Si l'indice de la racine d'un nombre A est le produit de deux nombres entiers n, p, on peut, pour extraire cette racine, extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de A, puis la racine $p^{\text{ième}}$ du résultat : en d'autres termes, on a

$$\sqrt[np]{A} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{A}}.$$

Il suffit de remarquer qu'en élevant le second nombre à la puissance np ou, ce qui revient au même, d'abord à la puissance p, puis à la puissance n, on trouve A. On observera qu'on aurait pu aussi bien écrire

$$\sqrt[np]{A} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{A}}.$$

D'après cela, on peut se borner, pour le calcul des racines, au cas où l'indice est premier. On a, par exemple :

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt{\sqrt{3}}, \quad \sqrt[6]{5} = \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt[3]{5}}.$$

Il est à peine utile de dire que, réciproquement, pour extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de la racine $p^{\text{ième}}$ d'un nombre, on peut, si l'on veut, extraire la racine $(np)^{\text{ième}}$ de ce nombre.

447. On ne change pas la valeur d'une racine en multipliant l'indice de cette racine par un nombre entier et en élevant en même temps la quantité sous le radical à une puissance dont l'exposant soit ce même nombre entier. En d'autres termes, on a

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[np]{A^p};$$

le second nombre, en effet, est égal à $\sqrt[n]{\sqrt[p]{A^p}}$ ou à $\sqrt[n]{A}$. Par exemple, on a

$$\sqrt{7} = \sqrt[6]{7^3}.$$

Inversement, quand on a à extraire la racine d'un nombre élevé à une certaine puissance, si l'indice de la racine et l'exposant sont divisibles par un même facteur, on peut supprimer ce facteur.

Ce théorème ne diffère pas du précédent.

On a, par exemple :

$$\sqrt[10]{2^{10} \times 3^5} = \sqrt[2.5]{(2^2 \times 3)^5} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}.$$

448. Les propositions précédentes permettent, étant données plusieurs racines, avec des indices différents, de les ramener à avoir toutes le même indice.

Soient, par exemple, les racines

$$\sqrt[a]{A}, \quad \sqrt[b]{B}, \quad \sqrt[c]{C},$$

a, b, c désignant des nombres entiers; soit m le plus petit multiple commun de a, b, c et soient a', b', c' les quotients respectifs de m par a, b, c; on multipliera les indices, a, b, c respectivement par a', b', c', et l'on élèvera en même temps A, B, C aux puissances a', b', c'; les racines précédentes seront remplacées par

$$\sqrt[m]{A^{a'}}, \quad \sqrt[m]{B^{b'}}, \quad \sqrt[m]{C^{c'}}$$

qui leurs sont respectivement égales et qui ont même indice.

449. Cette proposition permet d'utiliser les règles des n°s 443, 444 pour effectuer des produits ou des quotients de radicaux.

Soient, par exemple, les quantités

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{2^2 \times 5}, \quad \sqrt[6]{2 \times 5^2};$$

6 est le plus petit commun multiple des indices 2, 3, 6; on aura, en appliquant les règles précédentes,

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}, \quad \sqrt[3]{2^2 \times 5} = \sqrt[6]{2^4 \times 5^2},$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2^2 \times 5} \times \sqrt[6]{2 \times 5^2} = \sqrt[6]{2^3 \times 2^4 \times 5^2 \times 2 \times 5^2} = \sqrt[6]{2^8 \times 5^4} = \sqrt[3]{2^4 \times 5^2}.$$

De même,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{3^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^3}{3^2}}.$$

450. Exposants fractionnaires. — Le lecteur n'a pas manqué de remarquer que les dernières propositions établies ont leurs analogues dans la théorie des fractions. Cette analogie deviendra frappante si l'on adopte la notation des *exposants fractionnaires*.

Avant d'expliquer cette notation, je ferai d'abord les remarques suivantes:

On n'a pas parlé, dans ce qui précède, de racine dont l'indice serait égal à un; mais rien n'empêche de considérer une telle racine, pourvu que l'on convienne de regarder sa valeur comme étant égale à celle du nombre sur lequel elle porte; on aurait ainsi

$$\sqrt[1]{A} = A.$$

Cette convention est bien conforme à la définition générale des radicaux, puisque, en élevant un nombre à la puissance 1, on reproduit ce nombre. Dès lors, puisque, dans la démonstration des théorèmes du para-

graphe précédent, on s'est appuyé uniquement sur cette définition, il est clair que tous ces théorèmes subsisteront, lors même qu'on y fera figurer des racines d'indice égal à un.

451. En désignant par A un nombre quelconque et par p, q deux nombres entiers différents de zéro, on représente $\sqrt[q]{A^p}$ par le symbole :

$$A^{\frac{p}{q}},$$

que l'on énonce A puissance $\frac{p}{q}$: $\frac{p}{q}$ est un exposant *fractionnaire*.

Dans le cas où p est égal à 1, comme le symbole A^1 est la même chose que A, on aura pour la définition précédente

$$A^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{A}.$$

Dans le cas où q est égal à 1, le symbole $A^{\frac{p}{1}}$ représente la même chose que A^p. Cette convention est conforme à ce qu'on a dit dans le précédent numéro.

Cette notation ne présente aucune difficulté si l'on veut bien se rappeler qu'une fraction doit être regardée comme l'ensemble de deux nombres entiers qui jouent un rôle différent.

Elle est justifiée par ce fait que si les deux fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ sont égales, on a

$$A^{\frac{p}{q}} = A^{\frac{p'}{q'}};$$

Si en effet les deux fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ sont égales, on a $pq' = p'q$ et, par suite,

$$A^{pq'} = A^{p'q};$$

extrayons les racines d'indice qq' des deux membres, on aura

$$\sqrt[qq']{A^{pq'}} = \sqrt[qq']{A^{p'q}};$$

or, en divisant les indices et les exposants par q' dans le premier membre, par q dans le second, on a

$$\sqrt[q]{A^p} = \sqrt[q']{A^{p'}},$$

ou, en remontant à la définition des exposants fractionnaires,

$$A^{\frac{p}{q}} = A^{\frac{p'}{q'}}.$$

Il est à peine utile de faire remarquer que, par cette proposition, la simplification de la racine $q^{\text{ième}}$ d'un nombre élevé à une certaine puissance p revient à la simplification d'une fraction, et que la réduction au même indice de plusieurs racines revient à la réduction de plusieurs fractions au même dénominateur.

Mais il y a plus : les règles établies pour le calcul des exposants entiers s'appliquent aux exposants fractionnaires.

452. Pour faire le produit de deux puissances fractionnaires d'un même nombre, il suffit d'élever ce nombre à une puissance dont l'exposant soit une fraction égale à la somme des deux exposants primitifs.

En d'autres termes, on a, en désignant par p, q, p', q' des nombres entiers, différents de zéro,

$$A^{\frac{p}{q}} \times A^{\frac{p'}{q'}} = A^{\frac{pq'+p'q}{qq'}}.$$

On a en effet

$$A^{\frac{p}{q}} = A^{\frac{pq'}{qq'}} = \sqrt[qq']{A^{pq'}},$$

$$A^{\frac{p'}{q'}} = A^{\frac{p'q}{q'q}} = \sqrt[qq']{A^{p'q}},$$

et, par suite,

$$A^{\frac{p}{q}} \times A^{\frac{p'}{q'}} = \sqrt[qq']{A^{pq'}} \times \sqrt[qq']{A^{p'q}};$$

mais, en appliquant le théorème du n° 443, on voit que le second membre est égal à la racine $(qq')^{\text{ième}}$ du produit $A^{pq'} \times A^{p'q}$, qui est lui-même égal à $A^{pq'+p'q}$, puisque les nombres pq' et $p'q$ sont entiers. D'ailleurs on a, en vertu de la définition,

$$\sqrt[qq']{A^{pq'+p'q}} = A^{\frac{pq'+p'q}{qq'}}.$$

La proposition est donc démontrée. On écrit souvent l'égalité qui l'exprime sous la forme

$$A^{\frac{p}{q}} \times A^{\frac{p'}{q'}} = A^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}};$$

mais il convient de remarquer que le second membre n'a pas de sens par lui-même; il est sous-entendu qu'on doit remplacer la somme $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}$ par sa définition, c'est-à-dire par une fraction à termes entiers, égale à cette somme, mais cette notation est commode pour permettre l'extension du théorème considéré au cas de trois, quatre, ... facteurs. Ainsi, de l'égalité précédente on déduit

$$A^{\frac{p}{q}} \times A^{\frac{p'}{q'}} \times A^{\frac{p''}{q''}} = A^{\left(\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}\right)+\frac{p''}{q''}}.$$

Voici quel sens il faut attribuer au second nombre : la somme $\left(\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}\right)$ ayant été remplacée par une fraction à termes entiers, on lui ajoute la fraction $\frac{p''}{q''}$, et l'on obtient ainsi, sous forme d'une fraction à termes entiers, l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever A; mais il est clair que cet exposant peut être aussi bien obtenu en calculant, comme on voudra, la fraction à termes entiers qui est égale à la somme des trois fractions $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}$.

453. Pour élever à la puissance $\frac{p'}{q'}$ un nombre A, élevé déjà à une puissance entière ou fractionnaire $\frac{p}{q}$, il suffit de multiplier par $\frac{p'}{q'}$ l'exposant de A ; en d'autres termes, on a

$$\left(A^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p'}{q'}} = A^{\frac{pp'}{qq'}}.$$

On a, en effet, d'après les définitions,

$$A^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{A^p},$$

$$\left(A^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p'}{q'}} = \sqrt[q']{\left(\sqrt[q]{A^p}\right)^{p'}};$$

mais on a de même

$$\left(\sqrt[q]{A^p}\right)^{p'} = \sqrt[q]{A^{pp'}},$$

et la racine $q'^{\text{ième}}$ de cette quantité est égale à $\sqrt[qq']{A^{pp'}}$, ou, en vertu de la définition des exposants fractionnaires, à $A^{\frac{pp'}{qq'}}$: la proposition est donc démontrée.

454. Si, en désignant par p, q, p', q' des nombres entiers, on a

$$\frac{p}{q} > \frac{p'}{q'},$$

on aura, en désignant par A un nombre quelconque, autre que zéro,

$$\frac{A^{\frac{p}{q}}}{A^{\frac{p'}{q'}}} = A^{\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}},$$

en entendant que, dans le second membre, la différence $\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}$ soit remplacée par une fraction à termes entiers qui lui soit égale, par exemple par $\frac{pq' - p'q}{qq'}$.

La démonstration est toujours la même; on a

$$\frac{A^{\frac{p}{q}}}{A^{\frac{p'}{q'}}} = \frac{A^{\frac{pq'}{qq'}}}{A^{\frac{p'q}{qq'}}} = \frac{\sqrt[qq']{A^{pq'}}}{\sqrt[qq']{A^{p'q}}} = \sqrt[qq']{\frac{A^{pq'}}{A^{p'q}}} = \sqrt[qq']{A^{pq'-p'q}} = A^{\frac{pq'-p'q}{qq'}}.$$

Paris. — Imp. E. Capiomont et Cie, rue des Poitevins, 6.

